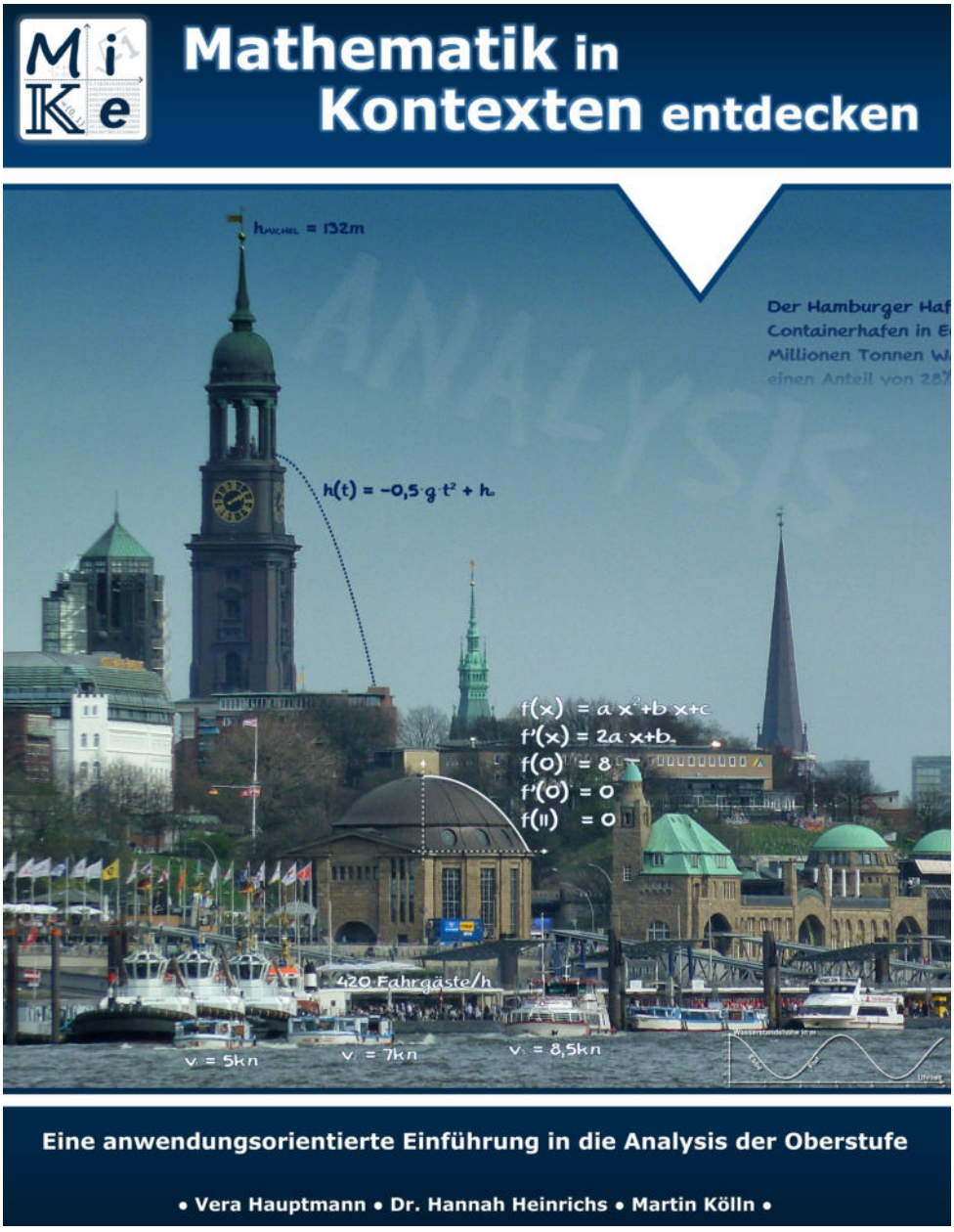
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis

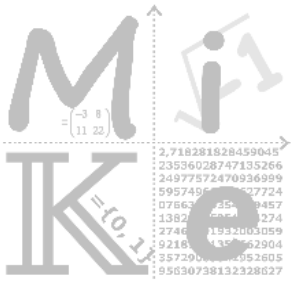
Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe

von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

„Wofür braucht man das eigentlich?“

Niemand liest die Einleitung eines Mathematikbuches - und trotzdem halten wir es für sinnvoll, Ihnen in Kürze unsere Idee hinter diesem Buch vorzustellen. Eine der Fragen im Mathematikunterricht, die am schwierigsten zu beantworten ist, lautet: „Wofür braucht man das eigentlich?“. Diese Frage lässt sich aus unserem persönlichen Alltag nicht immer zufriedenstellend beantworten, obwohl hinter vielen alltäglichen Gegenständen und Phänomenen viel mathematisches Wissen steckt. In diesem Buch beginnt das Entdecken von Mathematik immer im Kontext. Sie werden sich mit Kontexten beschäftigen, die Ihnen Schritt für Schritt das Denken in funktionalen Zusammenhängen näherbringen.

Natürlich ist unsere Lebenswelt so komplex, dass wir vereinfachende Annahmen treffen müssen, um sie mit mathematischen Modellen beschreiben zu können. Bei Mathematikaufgaben in Kontexten ist es häufig ein schmaler Grat zwischen einer Beschreibung der Realität mithilfe von mathematischen Modellen und einem Versuch, die Realität um die Mathematik herum zu konstruieren. Dieses Buch hat den Anspruch, so oft wie möglich Aufgaben des ersten Typs anzubieten und die mathematischen Modelle gegebenenfalls kritisch zu reflektieren.

Dem Ziel, Mathematik in Kontexten zu entdecken, folgt auch der Aufbau des Buches. Am Anfang jeder Erkenntnis steht immer eine anwendungsbezogene **Aufgabe**, die Sie herausfordert, sich mit neuen mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen. In diesen Aufgaben können Sie Ihr bisheriges Wissen zur Lösung eines neuen Problems einsetzen. Im Anschluss daran werden die wichtigsten Inhalte in einer **Information** zusammengefasst und erklärt. Diese können in den **Übungsaufgaben** weiter gefestigt werden.

Ergänzend zu den mathematischen Inhalten wird ein Fokus auf das Erlernen und Anwenden der zugehörigen sprachlichen Ausdrücke gelegt. Die Aufgaben mit dem Symbol 🗣 unterstützen die Anwendung und Übung dieser **sprachlichen Strukturen**. Eine weitere Besonderheit sind die Aufgabenteile mit dem Titel VERDACHT?!. Hier werden Sie mit typischen **Fehlvorstellungen** zu dem jeweiligen Inhalt konfrontiert. Da Fehler und Fehlvorstellungen zu jedem Lernprozess dazu gehören, kann es passieren, dass Sie selbst diese Fehler vorher gemacht haben. In diesen Aufgaben geht es darum, dass Sie verstehen, was daran falsch ist und wie diese Fehlvorstellungen überwunden werden können. Für alle, die in Teilgebiete tiefer einsteigen wollen, gibt es weiterführende Informationen unter der Überschrift **Genau hingeschaut.**

Dieses Buch eignet sich nicht nur für den Unterrichtseinsatz, sondern auch zum Vor- und Nachbereiten von Unterricht durch die Lernenden und zur selbstständigen Erarbeitung der Themen. Die **Lösungen** im hinteren Teil des Buches ermöglichen die Selbstkontrolle Ihrer Lösungswege und Ergebnisse und geben bei Bedarf Anhaltspunkte für einen möglichen Lösungsansatz.

An vielen Stellen des Buches werden Sie zum Einsatz eines Computer-Algebra-Systems (CAS) oder eines Funktionenplotters motiviert. Dadurch werden realistischere Modellierungen der Real-situationen möglich. Zusätzlich können durch die einfachere Veranschaulichung von Funktions-graphen Eigenschaften von Funktionen erforscht werden. Grundlegende Anwendungen der Handhelds Casio ClassPad und TI-Nspire CAS sowie der frei verfügbaren Software Geogebra (**`www.geogebra.org`**) werden im **CASten** erklärt.

Zur Unterstützung Ihrer unterrichtlichen Tätigkeit finden Sie digitale Ergänzungen zu diesem Buch auf der Internetseite **`www.Lerntresen.de/MiKe`**. Als zusätzliches Selbstlernmaterial gibt es auch begleitende Videos auf dem Youtube-Kanal „Mathematik in Kontexten entdecken“.

Wir bedanken uns herzlich bei den Lernenden und den Lehrkräften, die dieses Material in den vergangenen Jahren bereits in ihrem Unterricht eingesetzt und uns durch ihre Rückmeldungen sehr geholfen haben. Wir wünschen Ihnen viel Erfolg beim Entdecken der Mathematik in Kontexten!

Vera Hauptmann, Hannah Heinrichs und Martin Kölln

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis

Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe

Hamburg, 2024

© 2024 Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln

5. korrigierte und erweiterte Auflage

Kontakt
Wenn Sie einen Fehler gefunden haben, freuen wir uns über eine E-Mail an: Fehlerteufel@Lerntresen.de
Für andere Rückmeldungen senden Sie Ihre E-Mail bitte an: MiKe@Lerntresen.de

A camel is a horse designed by a committee.

Bildnachweis
Die Quellen der meisten Fotografien und Abbildungen sind an den jeweiligen Stellen angegeben.
Alle Fotos, die unter einer Creative Commons ShareAlike (CC SA) Lizenz stehen, werden auch in diesem Buch unter der angegebenen Lizenz veröffentlicht.

Weitere Quellen
NASA: *The earth seen from Apollo 17 (public domain) 94, Mond (public domain) 128*
Pearson Scott Foresman: *Buche (public domain) 137*
Vera Hauptmann: *Berliner Bogen 57, Großmarkthallen 67, Erlöserkirche 68, Skisprungschanze 85*
Hannah Heinrichs: *Radrennen 8*
Martin Kölln: *Hamburger Hafen (Buchcover), Collage Differentialrechnung 7, Golden Gate Brücke 14, Wasserrakete 14, Straßenschilder 19, Burger 34, Pumpspeicherwerk 40, Wasserrutschen 58, Landungsbrücken 64, Brücke am Hoover Damm 71, Schornstein 77, Halfpipe 79, Tunnel am Arches NP 84, Sequoia Baum 100, Hamburger Zollkanal 101, Riesenrad 104, U-Bahn-Station St. Pauli 104, Cuxhavener Kugelbake 105, Hamburger Sandtorhafen 119, Mammutbäume 122, nachgestellter Tatort 133, Helgoland 136*
Sophia Kölln: *Hafenfähre 143*

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Inhaltsverzeichnis

Differentialrechnung

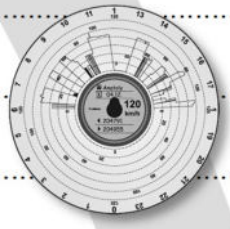


Vom Höhenprofil zur Steigung in einem Punkt 7
Lösungen ab Seite 158

Vom Weg zur Geschwindigkeit 14
Lösungen ab Seite 159

Integralrechnung

Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg 36
Lösungen ab Seite 168



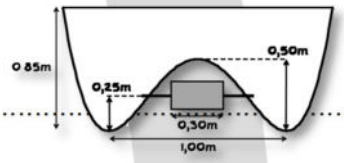
Von der Näherung zur Berechnung 45
Lösungen ab Seite 170

Auf dem Weg zum Hauptsatz 52
Lösungen ab Seite 172

Weitere Anwendungen 60
Lösungen ab Seite 174

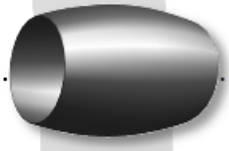
Flächen zwischen zwei Graphen 65
Lösungen ab Seite 177

Interpolation



Von der Realität zur mathematischen Beschreibung 71
Lösungen ab Seite 180

Rotationskörper



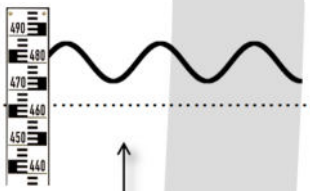
Von der zweiten zur dritten Dimension 87
Lösungen ab Seite 186

Regression



Von Messdaten zur mathematischen Näherung 94
Lösungen ab Seite 189

Trigonometrische Funktionen



Von sich wiederholenden Vorgängen zu periodischen Funktionen 104
Lösungen ab Seite 191

Exponentialfunktion



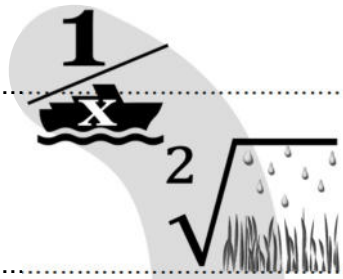
Von Wachstums- und Zerfallsprozessen zu funktionalen Zusammenhängen 123
Lösungen ab Seite 195

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Gebrochenrationale Funktionen

Vom Fährbetrieb zur Definitionslücke 143
Lösungen ab Seite 203



Wurzelfunktionen

Von Beregnungssystemen zur Wurzel 152
Lösungen ab Seite 208

Lösungen, Index und Übersichten



Lösungen für alle Aufgaben und Übungen 158
Tabellarische Übersicht einiger Funktionen 211
Infografik: Beschreiben von markanten Punkten und der Steigung eines Graphen 217
Stichwortverzeichnis 217

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einstieg in das Thema Differentialrechnung



(1) Aufgabe zum Einstieg

Beschreiben Sie die Abbildung und formulieren Sie dazu Fragestellungen, welche sich mithilfe von Mathematik beantworten lassen.

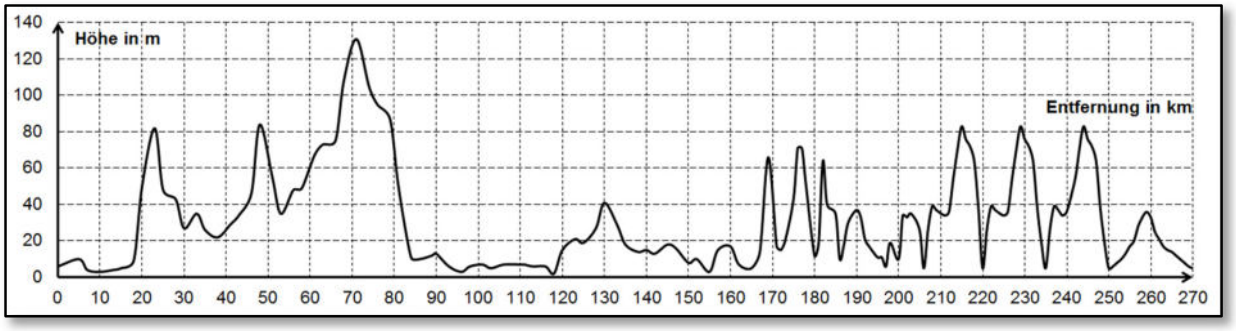
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Differentialrechnung - Vom Höhenprofil zur Steigung in einem Punkt

(2) Aufgabe: Radrennen

Das folgende Diagramm zeigt ein sogenanntes Höhenprofil eines Hamburger Radrennens. Hierbei ist auf der x-Achse (Rechtsachse; Abszisse) die Entfernung von der Startlinie des Rennens in Kilometern [km] und auf der y-Achse (Hochachse; Ordinate) die Höhe in Metern [m] angegeben.





Beschreiben Sie das Höhenprofil des Rennens. Gehen Sie unter anderem auf folgende Aspekte ein:

a) höchster Punkt der Strecke

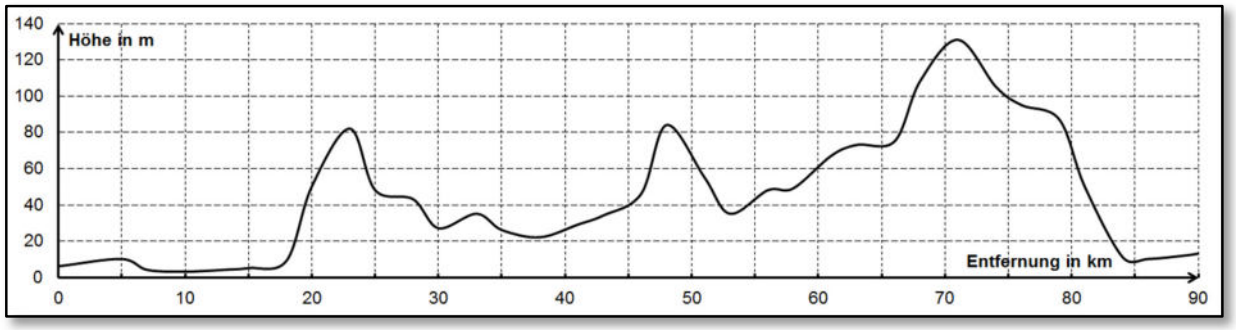
b) größte Steigung / größtes Gefälle

c) nahezu waagerecht verlaufende Streckenabschnitte

d) sich wiederholende Streckenabschnitte

(3) Aufgabe: Untersuchung eines Streckenabschnitts

Untenstehend sehen Sie die ersten 90 Kilometer [km] des Höhenprofils des Hamburger Radrennens aus der vorherigen Aufgabe. Hierbei gibt die x-Achse wieder die Entfernung vom Start in Kilometern [km] und die y-Achse die Höhe in Metern [m] an.



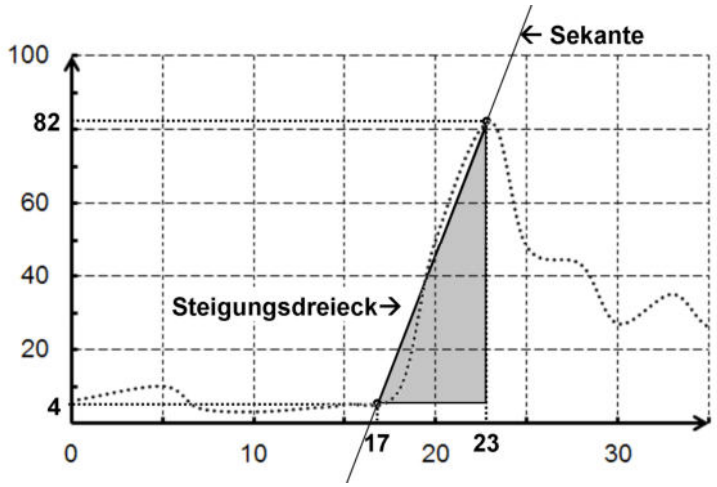
Bestimmen Sie die durchschnittliche Steigung zwischen dem 53. und 71. Kilometer sowie das durchschnittliche Gefälle zwischen dem 71. und 84. Kilometer.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten / Sekantensteigung

Die durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten lässt sich grafisch mithilfe eines *Steigungsdreiecks* an einer Geraden, die durch die beiden Punkte verläuft, bestimmen.



Eine solche Gerade, die den Graphen in (mindestens) zwei Punkten schneidet, wird als **Sekante** (von lateinisch *secare* - schneiden) bezeichnet.

Man berechnet die Sekantensteigung a einer Sekante durch die Punkte $P_1(x_1\,|y_1)$ und $P_2(x_2\,|y_2)$ mit der Formel:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Gefälle werden auch als *negative Steigungen* bezeichnet. Der Wert der Steigung ist dann negativ ($a < 0$).

Im gezeigten Beispiel wäre die Steigung also:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{82 - 4}{23 - 17} = \frac{78}{6} = 13$$

Im Anwendungskontext ergibt sich die **Einheit der Steigung** als Quotient aus der Einheit der y- und der x-Achse. Im Beispiel des Radrennens bedeutet der Steigungswert $a = 13$ also 13 Meter Höhenanstieg auf 1 Kilometer [$a = 13\frac{\text{m}}{\text{km}} = 0{,}013\frac{\text{m}}{\text{m}} = 1{,}3\%$].

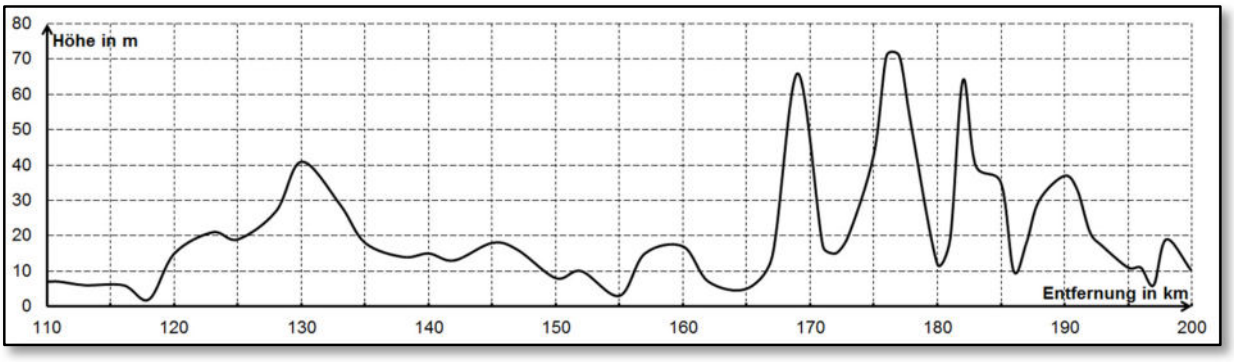
Die Steigung lässt sich alternativ durch den sogenannten **Steigungswinkel** φ (*phi*, griechischer Buchstabe) angeben. Der Steigungswinkel wird mit $\varphi = \tan^{-1}(a)$ berechnet.

Im Beispiel ergibt sich damit $\varphi = \tan^{-1}(0{,}013) = 0{,}74°$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Übungsaufgabe: Durchschnittliche Steigungen bestimmen



a) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Steigung (in Prozent) zwischen dem 118. und dem 130. Kilometer des Rennens.

b) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Steigung (in Prozent) zwischen dem 145. und dem 155. Kilometer des Rennens.

Auf dem Abschnitt zwischen dem 146. und dem 150. Kilometer lässt sich das Höhenprofil näherungsweise durch die folgende Funktion beschreiben:

$$f(x) = \frac{5}{16}x^3 - \frac{555}{4}x^2 + \frac{82125}{4}x - 1012492$$

mit x in km und $f(x)$ in m

c) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Steigung (in Prozent) zwischen dem 146. und dem 150. Kilometer des Rennens.

Näherungsweises Berechnen der Steigung an einer Stelle

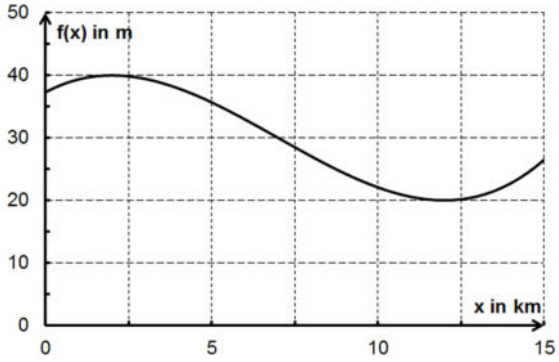
Für den Radfahrer ist die durchschnittliche Steigung auf einem größeren Streckenstück zwar von Interesse, relevant ist jedoch auch die Steigung in spezifischen Punkten der Strecke.

Wenn man das Höhenprofil mithilfe einer Funktionsgleichung beschreibt, dann ergeben sich neue Möglichkeiten zur Berechnung von Steigungswerten. Zusätzlich lassen sich Höhenwerte nun exakt berechnen.

Der Streckenabschnitt zwischen Kilometer 0 und Kilometer 15 lässt sich durch die folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$f(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}84x^2 + 2{,}88x + 37{,}28$$

mit x in km und $f(x)$ in m



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Besonders kritisch beim Bergabfahren ist die steilste Stelle, die bei $x = 7$ zu liegen scheint. In diesem Punkt soll die Steigung berechnet werden. Um diese zu berechnen, wählt man einen weiteren Punkt, den man immer weiter an den ersten Punkt heranrücken lässt, und berechnet jeweils die durchschnittliche Steigung mithilfe des sogenannten *Differenzenquotienten*:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Streckenabschnitt in km	**Steigung in $\frac{\text{m}}{\text{km}}$**
[7 ; 7,5]	$\frac{f(7{,}5)-f(7)}{7{,}5-7} = \frac{28{,}505-30}{0{,}5} = -2{,}99$
[7 ; 7,1]	$\frac{f(7{,}1)-f(7)}{7{,}1-7} = \frac{29{,}7-30}{0{,}1} = -2{,}9996$
[7 ; 7,01]	$\frac{f(7{,}01)-f(7)}{7{,}01-7} = \frac{29{,}97000004-30}{0{,}01} = -2{,}999996$
[7 ; 7,001]	$\frac{f(7{,}001)-f(7)}{7{,}001-7} = \frac{29{,}997-30}{0{,}001} \approx -3$

Man sieht, dass sich die durchschnittliche Steigung einem Wert annähert, der die Steigung an der Stelle $x = 7$ näherungsweise beschreibt. Demnach beträgt die Steigung an der Stelle $x = 7$ ungefähr $-3\ \frac{\text{m}}{\text{km}}$. Das negative Vorzeichen zeigt, dass es sich um ein Gefälle handelt.

(5) Übungsaufgabe zu "Näherungsweises Berechnen der Steigung an einer Stelle"

Berechnen Sie für die aus der letzten Information bekannte Funktion

$$f(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}84x^2 + 2{,}88x + 37{,}28$$

die Näherungswerte der Steigung an den Stellen $x = 1$, $x = 5$ und $x = 12$.

CASten

Darstellung von betragsmäßig sehr kleinen und sehr großen Zahlen

Zur Darstellung von Zahlen, deren Betrag sehr groß oder sehr klein ist, wird die *wissenschaftliche Darstellung* verwendet. Hierbei wird die Zahl mithilfe einer Zehnerpotenz geschrieben. Taschenrechner und CAS haben hierfür manchmal eigene Darstellungsarten.

Beispiel:	$3120000 = 3{,}12 \cdot 10^6$	und	$0{,}000678 = 6{,}78 \cdot 10^{-4}$
Casio ClassPad II:	`3.12E6`	und	`6.78E-4`
Geogebra:	`3.12·10^6`	und	`6.78·10^-4`
TI-Nspire CAS:	`3.12E6`	und	`6.78E-4`

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Genau hingeschaut: Der Grenzwert des Differenzenquotienten

Wie man in dem Beispiel festgestellt hat, kann die Steigung an einer Stelle mit Hilfe von mittleren Steigungen näherungsweise bestimmt werden, indem man die durchschnittliche Steigung für immer kürzere Streckenabschnitte betrachtet.

Es handelt sich bei den Ergebnissen jedoch „nur“ um Näherungen. Die mathematische Darstellung für die zu berechnenden **Differenzenquotienten** ist:

$$d(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Dabei steht x_0 für den betrachteten x-Wert und h für den Abstand zwischen diesem und dem zweiten gewählten x-Wert. Somit ist der oben genannte Differenzenquotient d von h abhängig, da wie in der vorangegangenen Information für x_0 ein fester Wert eingesetzt wird und h variiert. Somit ist h die Variable.

Zeitraum in *s*	[7 ; 7,5]	[7 ; 7,1]	[7 ; 7,01]
Differenz *h* in *s*	0,5	0,1	0,01
Steigung in $\frac{\text{m}}{\text{km}}$	$\frac{f(7+0{,}5)-f(7)}{0{,}5} = -2{,}99$	$\frac{f(7+0{,}1)-f(7)}{0{,}1} = -2{,}9996$	$\frac{f(7+0{,}01)-f(7)}{0{,}01} = -2{,}999996$

Theoretisch müsste $h = 0$ eingesetzt werden, um einen genauen Wert für die Steigung an der Stelle x_0 zu ermitteln, jedoch müsste dann durch 0 geteilt werden. Diese mathematische Operation ist nicht definiert. Aus diesem Grund betrachtet man den sogenannten Grenzwert (lateinisch: *Limes*). Dieser liefert das gesuchte Ergebnis.

Berechnet man den Grenzwert für $h \to 0$, das heißt für immer kleiner werdende Werte für h, so erhält man den Wert der Steigung an der Stelle x_0.

$$\lim_{h \to 0} d(h) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Der Ausdruck $f'(x_0)$ steht für den **Grenzwert des Differenzenquotienten** an der Stelle x_0 und gibt damit die Steigung an der Stelle x_0 an. Allgemein wird mit dem Grenzwert des Differenzenquotienten die *momentane Änderungsrate* bestimmt.

Auf die weitere Bedeutung von f' wird im späteren Verlauf eingegangen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

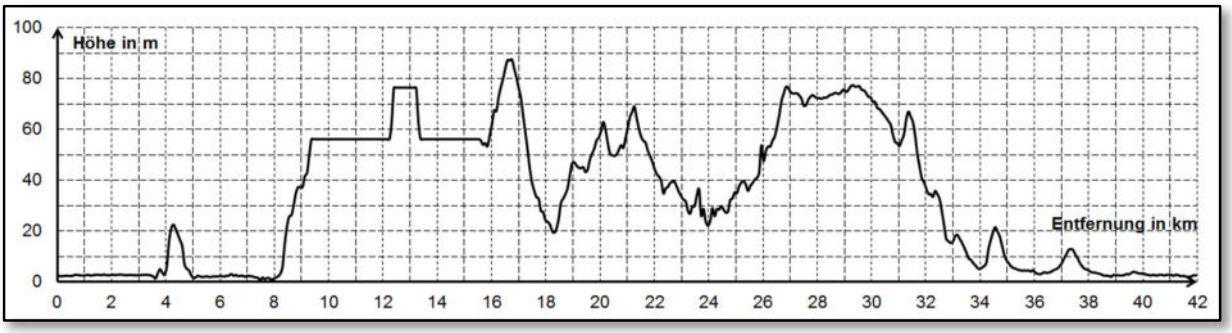
Berechnen des Grenzwertes einer Funktion d(h) an der Stelle Null

Casio ClassPad II:	lim(d(h),h,0)	oder
Geogebra:	Grenzwert[d(h),0]	
TI-Nspire CAS:	lim(d(h),h,0)	oder [menu] → Analyis → Limes:

(6) Übungsaufgabe zu "Der Grenzwert des Differenzenquotienten" CAS

Berechnen Sie die Steigung der Funktion $f(x) = 0{,}04x^3 - 0{,}84x^2 + 2{,}88x + 37{,}28$ an der Stelle $x = 1$, $x = 5$ und an der Stelle $x = 12$ mithilfe des Grenzwerts des Differenzenquotienten.

(7) Übungsaufgabe: San Francisco Marathon



Das Diagramm zeigt das Höhenprofil eines Marathons durch San Francisco. Die Route führt entlang des Ufers der San Francisco Bay, einmal über die Golden Gate Brücke und zurück, durch den Golden Gate Park und dann quer durch die Stadt zurück ans Ufer.



Der Verlauf des Höhenprofils zwischen dem Kilometer 16 und 18,5 lässt sich durch die folgende Funktion beschreiben

$$f(x) = 40{,}89x^3 - 2152{,}8x^2 + 37712{,}64x - 219758{,}144$$

mit x in km und $f(x)$ in m

a) **Berechnen** Sie die durchschnittliche Steigung zwischen $x = 16{,}8$ und $x = 18{,}3$.

b) **Berechnen** Sie (exakt oder näherungsweise) die Steigung an der Stelle $x = 17{,}5$.

c) **Berechnen** Sie (exakt oder näherungsweise) die Steigung an der Stelle $x = 16{,}8$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Differentialrechnung - Vom Weg zur Geschwindigkeit

(1) Aufgabe: Wasserrakete



Schon lange interessieren sich nicht nur Physiker dafür, wie beispielsweise Raketen oder andere Objekte in Bewegung gesetzt werden können. Insbesondere regenerative Energiequellen und Treibstoffe rücken immer mehr in den Fokus der Betrachtung. Im Folgenden soll das Prinzip der sogenannten Wasserrakete vorgestellt werden.

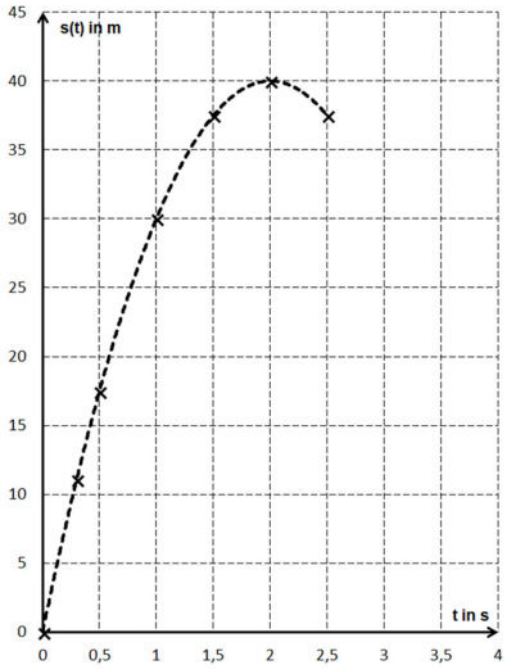
Bei einer Wasserrakete wird die zum Start notwendige Energie dadurch zugeführt, dass in einen teilweise mit Wasser gefüllten Drucktank Luft gepumpt wird, bis der Überdruck so groß wird, dass das Wasser mit hoher Geschwindigkeit aus dem Tank nach unten ausgestoßen wird. Die dabei freigesetzte Energie beschleunigt dabei die Rakete und sie hebt ab.

In einem Experiment wurden die folgenden Daten während des Starts einer solchen Wasserrakete dokumentiert.

Zeit in Sekunden [s]	0	0,3	0,5	1	1,5	2	2,5
Höhe in Metern [m]	0	11,1	17,5	30	37,5	40	37,5

Im Rahmen dieses Experiments wurde die Frage aufgeworfen, wie schnell die Rakete zu den angegebenen Zeitpunkten (0,3 s, 0,5 s, …) in die Höhe flog. Gesucht ist somit die Steig- bzw. Sinkgeschwindigkeit der Rakete in Metern pro Sekunde $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ zu den gegebenen Zeitpunkten. Im Folgenden soll für die Begriffe *Steiggeschwindigkeit* und *Sinkgeschwindigkeit* nur noch der Begriff *Geschwindigkeit* verwendet werden.

In der nebenstehenden Abbildung wurden die gegebenen Messwerte als Punkte eingetragen. In einem zweiten Schritt wurden diese Punkte mit Hilfe einer geeigneten Kurve miteinander verbunden, die die Höhe der Rakete abhängig von der Zeit t mathematisch beschreibt.



Betrachtet man den gestrichelt eingezeichneten Graphen genauer, so ist festzustellen, dass dieser Graph in dem durch die Messwerte dokumentierten Zeitraum einen parabelförmigen Verlauf aufzeigt. Es handelt sich somit um eine quadratische Funktion, also um eine ganzrationale Funktion 2. Grades.

Die Funktionsgleichung lautet:

$$\text{s}(t) = -10 \cdot (t-2)^2 + 40 = -10t^2 + 40t$$

mit t in s und $s(t)$ in m

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Beschreiben** Sie die Flugbahn der Wasserrakete. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

b) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Geschwindigkeit vom Start ($t = 0$) bis zum höchsten Punkt der Flugbahn.

c) **Bestimmen** Sie näherungsweise für die Zeitpunkte $t = 0{,}3$, $t = 0{,}5$, $t = 1$, $t = 1{,}5$, $t = 2$ und $t = 2{,}5$ die momentanen Geschwindigkeiten.

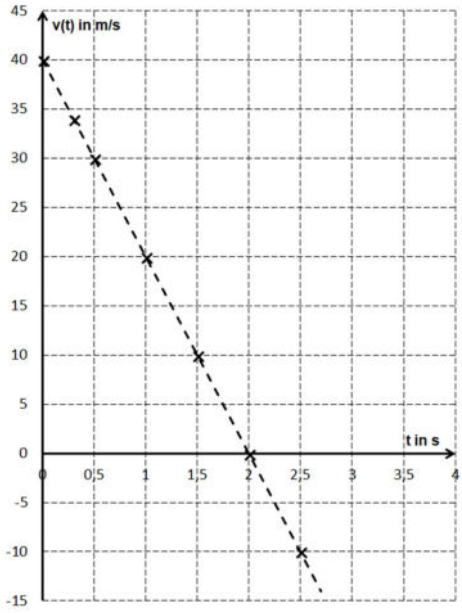
d) **Zeichnen** Sie die Werte in ein Koordinatensystem ein (mit t in Sekunden [s] und $v(t)$ in Metern pro Sekunde $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$). Verbinden Sie die Punkte miteinander und **bestimmen** Sie die zugehörige Funktionsgleichung, die $v(t)$ genannt werden soll.

e) **Bestimmen** Sie mithilfe von $v(t)$ die Geschwindigkeit an der Stelle $t = 3$.

Von momentanen Geschwindigkeiten zum Graphen der Ableitungsfunktion

Im Folgenden wird die Funktion betrachtet, die im vorangegangenen Aufgabenteil c) aufgestellt wurde und die die Beziehung zwischen der Zeit und der Geschwindigkeit darstellt.

Zeichnet man die ermittelten momentanen Geschwindigkeiten in Metern pro Sekunde $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ aus der Aufgabe "Wasserrakete" abhängig von der Zeit t in Sekunden [s] in ein Koordinatensystem ein, so erhält man die nebenstehende Abbildung.



Verbindet man die Punkte miteinander, so erhält man eine Gerade, die durch die folgende Funktionsgleichung mathematisch beschrieben werden kann:

$$v(t) = -20t + 40$$

mit t in s und $v(t)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

In diesem Fall kann die Funktionsgleichung des eingezeichneten Funktionsgraphen recht schnell und unkompliziert angegeben werden, da in diesem Fall die Geschwindigkeitsfunktion einen linearen Verlauf hat.

Die Funktion $v(t)$ wird *Ableitung der Funktion* $s(t)$ genannt.

Man schreibt für die Ableitung der Funktion $s(t)$ auch $s'(t)$ und spricht es als: "s Strich von t". Die Ableitung beschreibt zu jedem beliebigen Zeitpunkt die sogenannte Änderungsrate der Funktion $s(t)$, das heißt in diesem Kontext zu jedem beliebigen Zeitpunkt die Geschwindigkeit der Wasserrakete.

Ist nun die Geschwindigkeit der Wasserrakete nach 3 Sekunden gesucht, so kann diese mit Hilfe der Ableitungsfunktion berechnet werden, indem man in die Ableitungsfunktion den Wert $t = 3$ einsetzt: $v(3) = s'(3) = -20 \cdot 3 + 40 = -20$. Die Rakete fällt also zu diesem Zeitpunkt mit einer Geschwindigkeit von -20 Metern pro Sekunde $\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Ableitungsregeln entdecken

Im Folgenden ist für verschiedene Funktionen die jeweilige Ableitungsfunktion (kurz: *Ableitung*) angegeben. **Untersuchen** Sie, nach welchen Regeln aus einer Funktion die Ableitungsfunktion gebildet wird. **Geben** Sie analog die Ableitungen der vier weiteren Funktionen **an**.

Funktion	Ableitung	Funktion	Ableitung
$f(x) = x^3$	$f'(x) = 3x^2$	$f(x) = x^6$	
$f(x) = x^5 + x^4$	$f'(x) = 5x^4 + 4x^3$	$f(x) = x^3 + x^9$	
$f(x) = 2x^7$	$f'(x) = 14x^6$	$f(x) = 3x^4$	
$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 7x + 42$	$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 7$	$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 2x - 10$	

Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen

Es gelten folgende Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen, die es ermöglichen, zu jeder ganzrationalen Funktion die zugehörige Ableitungsfunktion zu bestimmen.

	Allgemein gilt		**Beispiele**	
	Funktion $f(x)$	**Ableitungsfunktion** $f'(x)$	**Funktion** $f(x)$	**Ableitungsfunktion** $f'(x)$
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$	x^5	$5 \cdot x^{5-1} = 5 \cdot x^4$
			x	$1 \cdot x^{1-1} = x^0 = 1$
Faktorregel	$a \cdot x^n$	$a \cdot n \cdot x^{n-1}$	$2 \cdot x^4$	$2 \cdot 4 \cdot x^{4-1} = 8 \cdot x^3$
			$(-7) \cdot x^6$	$(-7) \cdot 6 \cdot x^{6-1} = -42 \cdot x^5$
Summenregel	$u(x) + v(x)$	$u'(x) + v'(x)$	$4 \cdot x^7 + 5 \cdot x^2$	$4 \cdot 7 \cdot x^{7-1} + 5 \cdot 2 \cdot x^{2-1} = 28 \cdot x^6 + 10 \cdot x$

Aus den Ableitungsregeln folgt, dass der Grad der Ableitungsfunktion um 1 geringer ist als der Grad der Ausgangsfunktion, z.B. ist die Ableitungsfunktion einer kubischen Funktion (Grad 3) eine quadratische Funktion (Grad 2).

Zudem gilt:
Ist $f(x)$ eine konstante Funktion der Form $f(x) = a$ mit $a \in \mathbb{R}$, so gilt für die Ableitung:
$f'(x) = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

Die Ableitung einer Funktion berechnen

Casio ClassPad II:	diff(f(x),x)	
Geogebra:	Ableitung[f(x),x]	oder f′
TI-Nspire CAS:	derivative(f(x),x)	oder [menu] → Analysis → Ableitung

(3) Übungsaufgabe: Ableitungsfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^8$

b) $f(x) = 4x^3$

c) $f(x) = 12x^4 + 2x^2$

d) $f(x) = 6x^6 - 3x^5 + 8$

e) $f(x) = 9x^2 - 6x^5 + 2x$

f) $f(x) = -7x^3 + x^2 - x + 1$

g) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil d) lautet:
$f'(x) = 30x^5 - 12x^4$.
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

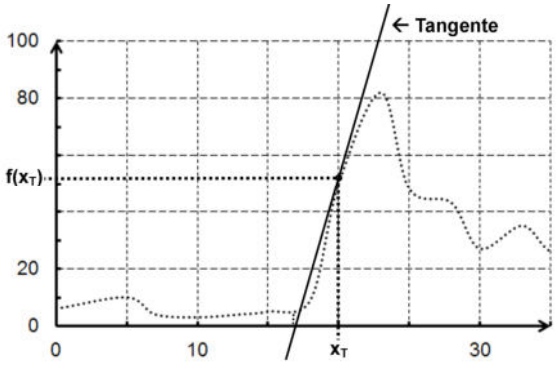
h) VERDACHT?! Ein weiterer Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil d) lautet:
$f'(x) = 36x^5 - 15x^4 + 8$.
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Bedeutung der ersten Ableitung

Die Ableitung $f'(x)$ einer Funktion $f(x)$ beschreibt die Steigung der Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x. Allgemein gibt die Ableitung $f'(x)$ die *Änderungsrate* einer Funktion $f(x)$ an jeder Stelle x an.

Genau hingeschaut: Tangente

Grafisch lässt sich die Steigung einer Funktion $f(x)$ in dem Punkt $(x_T|y_T)$ mit Hilfe einer sogenannten *Tangente* darstellen. Eine Tangente ist eine Gerade, die den Graphen der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_T berührt und die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_T übernimmt.



Da es sich um eine lineare Funktion handelt, lautet die allgemeine Funktionsgleichung: $t(x) = ax + b$.

Dabei entspricht a der Steigung der Funktion an der Stelle x_T, das heißt es gilt $a = f'(x_T)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Parameter b lässt sich berechnen, indem man die Gleichung $y_T = a \cdot x_T + b$ mit $y_T = f(x_T)$ nach b auflöst.

Beispiel: Für die Funktion $f(x) = x^3 - 9x^2 + 23x - 10$ soll die Tangente an der Stelle $x_T = 1$ bestimmt werden.

Die Funktionsgleichung der Tangente bei $x_T = 1$ lässt sich folgendermaßen berechnen:

- Bilden der Ableitung: $f'(x) = 3x^2 - 18x + 23$
- Berechnen der Steigung: $a = f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 18 \cdot 1 + 23 = 8$
- Berechnen von y_T mit $y_T = f(1) = 1^3 - 9 \cdot 1^2 + 23 \cdot 1 - 10 = 5$
- Berechnen des y-Achsenabschnitts: Das Einsetzen von x_T, y_T und a in die allgemeine Funktionsgleichung der Tangente liefert die Gleichung $5 = 8 \cdot 1 + b$. Daraus ergibt sich $b = -3$.
- Damit lautet die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle $x_T = 1$ folgendermaßen: $t(x) = 8x - 3$

(4) Übungsaufgabe: Funktionsgleichung einer Tangente

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Funktionsgleichung der Tangente an der Stelle $x = 2$.

a) $f(x) = x^2 + 7$
b) $g(x) = 2x^2 + 3x + 4$
c) $h(x) = 5x^3 + 4x^2$

(5) Aufgabe: Weltrekord über 100m Sprint

Bei der Leichtathletik WM 2009 in Berlin hat der jamaikanische Leichtathlet Usain Bolt über die 100 m Sprintstrecke einen neuen Weltrekord aufgestellt. Er lief diese Strecke in 9,58 Sekunden [s].

In den Medien war zu vernehmen: *„Neuer Weltrekord!!! Der schnellste Mann der Welt läuft 37,578 km/h schnell!!!“*

Folgende Tabelle listet die gemessenen Zwischenzeiten des Weltrekordlaufs auf:

Zwischenzeit t in s	0	2,89	4,64	6,31	7,92	9,58
Zurückgelegt Strecke in m	0	20	40	60	80	100

a) **Stellen** Sie die zurückgelegte Strecke ($s(t)$-Achse) abhängig von der Zeit (t-Achse) graphisch **dar**.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die zurückgelegte Strecke in Abhängigkeit von der Zeit kann näherungsweise durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$s(t) = -0{,}0023488t^5 + 0{,}066745t^4 - 0{,}745558t^3 + 4{,}22464t^2 - 0{,}50905t$$

mit t in s und $s(t)$ in m

b) **Bestimmen** Sie für die Zeitpunkte $t = 2{,}89$, $t = 4{,}64$, $t = 6{,}31$, $t = 7{,}92$ und $t = 9{,}58$ die momentanen Geschwindigkeiten.

c) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil b) lautet: Die momentane Geschwindigkeit bei $t = 2{,}89$ beträgt $s(2{,}89) = 19{,}999956\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

d) **Zeichnen** Sie die momentanen Geschwindigkeiten abhängig von der Zeit t in ein geeignetes Koordinatensystem und verbinden Sie die Punkte miteinander.

e) **Beschreiben** Sie den Graphen aus dem vorigen Aufgabenteil im Sachkontext. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

f) **Geben** Sie anhand des Graphen **an**, zu welchem Zeitpunkt Usain Bolt seine maximale Geschwindigkeit erreicht hat, und **geben** Sie im Anschluss die maximale Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und in $\frac{\mathrm{km}}{h}$ **an**.

Nehmen Sie zu der aus den Medien zitierten Aussage **Stellung**.

(6) Aufgabe: Höhenprofil einer Straße



Im Straßenverkehr müssen von den Verkehrsteilnehmern viele verschiedene Verkehrsschilder beachtet werden, so auch Verkehrsschilder, die Angaben über die Steigung einer Straße machen. Starke Gefälle beanspruchen die Bremsen und nicht jedes Fahrzeug besitzt die notwendige Steigfähigkeit, um Straßen mit größeren Steigungen problemlos zu befahren.

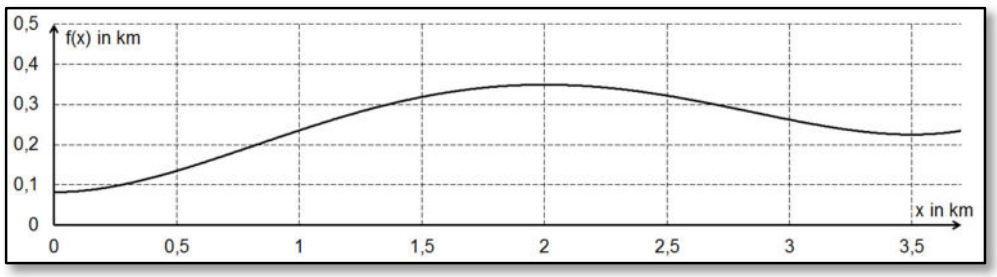
So kann ein PKW-Steigungen von circa 35 % problemlos bewältigen, ein Wohnwagen jedoch nur Straßen mit einer Steigung von bis zu 12 % und ein PKW mit einer Anhängerlast von 1700 kg lediglich Straßen mit einer maximalen Steigung von 8 % befahren.

In der folgenden Abbildung ist das Höhenprofil einer Straße dargestellt.

Das abgebildete Höhenprofil lässt sich mithilfe der folgenden Funktion mathematisch beschreiben:

$$f(x) = \frac{1}{50}x^4 - \frac{11}{75}x^3 + \frac{7}{25}x^2 + \frac{197}{2400}$$

mit x in km und $f(x)$ in km



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Bestimmen** Sie die Steigung der Straße bei Kilometer eins.

Besonders interessant in diesem Kontext sind die Stellen des Graphen, an denen die Steigung bzw. das Gefälle am größten ist. Diese werden als Wendestellen bezeichnet.

b) Die stärkste Steigung auf der Strecke befindet sich bei $x = 0{,}82$. **Bestimmen** Sie die Steigung an dieser Stelle und **geben** Sie **an**, welches von den genannten Fahrzeugen, diese Strecke befahren kann.

c) Auch bei Gefälle ist es nötig, Warnschilder anzubringen. Die Stelle mit dem stärksten Gefälle liegt bei $x = 2{,}85$. **Bestimmen** Sie das Gefälle an dieser Stelle und **geben** Sie **an,** welches prozentuale Gefälle auf dem Warnschild angegeben werden muss.

Bedeutung der ersten Ableitung im Kontext

Die Ableitung $f'(x)$ kann unterschiedliche Bedeutungen im Kontext haben, die abhängig von der Bedeutung der Funktion $f(x)$ sind. Allgemein beschreibt die Ableitung $f'(x)$ die Veränderung des $f(x)$-Wertes der Funktion $f(x)$ im Verhältnis zum x-Wert.

Die **Einheit** der Funktionswerte der ersten Ableitung ergibt sich aus dem Differenzenquotienten, indem die Einheit der $f(x)$-Werte durch die Einheit der x-Werte dividiert wird.

In der Anwendung bedeutet das:

Zeit-Weg-Funktion
$f(x)$ in m und x in s

Ableitung

Zeit-Geschwindigkeit-Funktion
$f'(x)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und x in s

(7) Übungsaufgabe: Bedeutung der ersten Ableitung im Kontext

Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Einheit der Funktionswerte der Ableitung **an**. **Interpretieren** Sie die Bedeutung der ersten Ableitung im Kontext.

a) In einer Flaschenabfüllanlage werden Flaschen befüllt, $f(t)$ beschreibt die Abfüllmenge in Litern [l] und t die Zeit seit Beginn der Abfüllung in Stunden [h].

b) Die Geschwindigkeit eines Autos wird dokumentiert. Die Funktion $g(t)$ beschreibt die Geschwindigkeit in Kilometern pro Stunde $\left[\frac{\text{km}}{\text{h}}\right]$ und t die Zeit in Stunden [h].

c) Ein Höhenprofil wird betrachtet. Dabei ist $h(x)$ in Metern [m] und x in Kilometern [km] angegeben.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

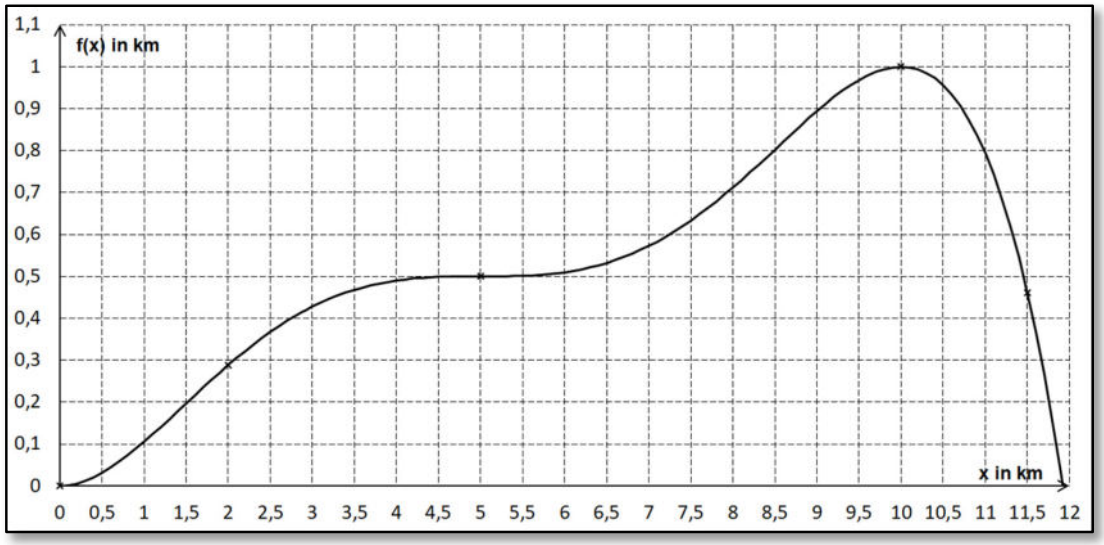
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(8) Aufgabe: Bergwanderung

Das Höhenprofil einer Wanderung ist gegeben durch die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{12500} \cdot (-3x^5 + 75x^4 - 625x^3 + 1875x^2)$$

mit $f(x)$ in km und x in km



a) **Beschreiben** Sie den Graphen im Sachkontext. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

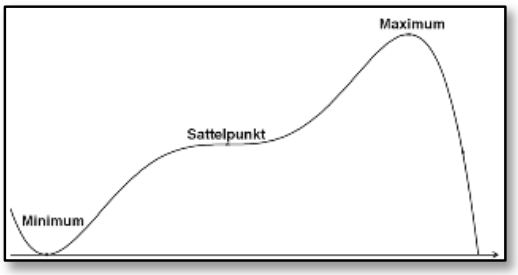
b) **Bestimmen** Sie die Steigung an den Stellen $x = 0$, $x = 2$, $x = 5$, $x = 10$ und $x = 11{,}5$.

c) **Begründen** Sie, warum drei der berechneten Steigungswerte den gleichen Zahlenwert haben.

Notwendige Bedingung für Hochpunkte, Tiefpunkte und Sattelpunkte

In der Aufgabe zur Bergwanderung wurde die Steigung der Funktion unter anderem an drei markanten Punkten berechnet. Bei den drei markanten Punkten handelt es sich um einen *Tiefpunkt*, einen *Sattelpunkt* und einen *Hochpunkt*.
An allen drei Punkten beträgt die Steigung des Graphen 0.

Ein **Tiefpunkt** bzw. **Minimum** ist derjenige Punkt $(x_{Min}|y_{Min})$, in dessen Umgebung nur größere Funktionswerte liegen. Anschaulich handelt es sich um ein Tal auf der Bergwanderung.



Ein **Hochpunkt** bzw. **Maximum** ist derjenige Punkt $(x_{Max}|y_{Max})$, in dessen Umgebung nur kleinere Funktionswerte liegen. Anschaulich handelt es sich um einen Berggipfel auf der Bergwanderung.

Ein **Sattelpunkt** ist derjenige Punkt $(x_S|y_S)$, in dessen Umgebung kleinere und größere Funktionswerte liegen (und trotzdem die Steigung im Punkt 0 ist). Anschaulich handelt es sich um ein Plateau auf der Bergwanderung.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Tiefpunkte und Hochpunkte werden unter dem Begriff der **Extrempunkte** bzw. **Extrema** zusammengefasst.

An allen Extrempunkten und Sattelpunkten beträgt die Steigung der Funktion immer 0. Diese Eigenschaft kann genutzt werden, um herauszufinden, wie viele dieser markanten Punkte es gibt und wo sie liegen. Dies wird als das **notwendige Kriterium** oder die **notwendige Bedingung** für Extrempunkte und Sattelpunkte bezeichnet:

$$f'(x) = 0$$

Löst man diese Gleichung, so erhält man alle x-Werte, an denen ein Tiefpunkt, Hochpunkt oder Sattelpunkt liegt.

Beispiel: Will man den Hochpunkt der Flugbahn der Wasserrakete berechnen (siehe Seite 14), so lässt sich dies direkt anwenden.

- Die Flugbahn der Rakete lässt sich durch die Funktion $s(t) = -10t^2 + 40t$ beschreiben.
- Die notwendige Bedingung zur Berechnung eines Hochpunktes lautet $s'(t) = 0$.
- Die Ableitung ist $s'(t) = -20t + 40$.
- Zu lösen ist die Gleichung $-20t + 40 = 0$.
- Somit liegt an der Stelle $t = 2$ ein Tiefpunkt, Hochpunkt oder Sattelpunkt der Funktion.

(9) Aufgabe: Notwendige Bedingung für Tief-, Hoch- und Sattelpunkte anwenden

Berechnen Sie mithilfe der notwendigen Bedingung die x-Werte der Tiefpunkte, Hochpunkte und Sattelpunkte der folgenden Funktionen.

Untersuchen Sie, ob es sich jeweils um einen Tiefpunkt, Hochpunkt oder Sattelpunkt handelt und **leiten** Sie eine allgemeine Regel **ab**.

a) $f(x) = x^3 - x$ b) $g(x) = -x^2 + 4$ c) $h(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$

Hinreichende Bedingung für Hoch-, Tief- und Sattelpunkte: Vorzeichen-Wechsel-Kriterium

Hat man eine Stelle gefunden, für die $f'(x) = 0$ gilt, so muss man noch herausfinden, ob es sich um einen Hochpunkt, einen Tiefpunkt oder einen Sattelpunkt handelt. Eine rein zeichnerische Lösung gilt mathematisch nicht als Nachweis eines Minimums, Maximums oder Sattelpunkts. Hierfür benötigen wir ein rechnerisches Kriterium.

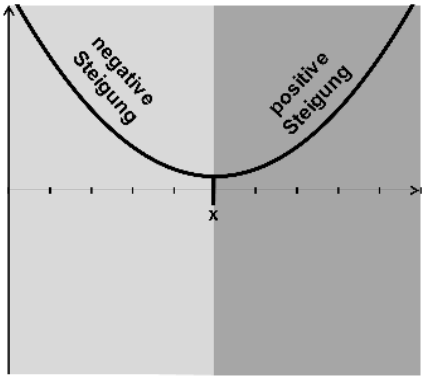
Ein mögliches Kriterium ist das sogenannte **Vorzeichen-Wechsel-Kriterium**. Hierbei betrachtet man die erste Ableitung der Funktion in der näheren Umgebung des möglichen Kandidaten für ein Maximum, Minimum und Sattelpunkt. Dabei wird das Vorzeichen des Wertes der ersten Ableitung an einer Stelle links des Kandidaten betrachtet, mathematisch beschrieben durch $x - h$. Zusätzlich wird das Vorzeichen des Wertes der ersten Ableitung an einer Stelle rechts des Kandidaten betrachtet, mathematisch beschrieben durch $x + h$.

Die daraus resultierenden Schlussfolgerungen sind in der folgenden Tabelle dargestellt.

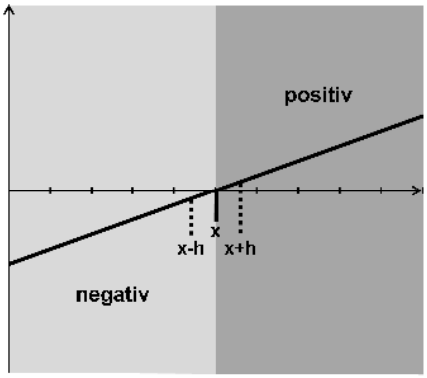
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Funktion mit Tiefpunkt / Minimum

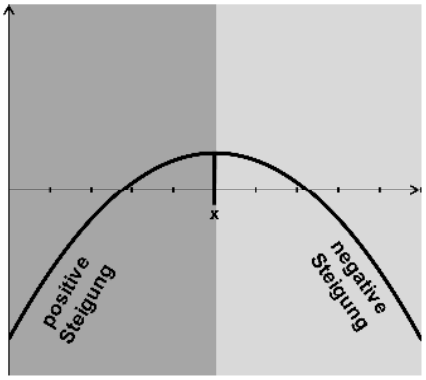


Ableitungsfunktion

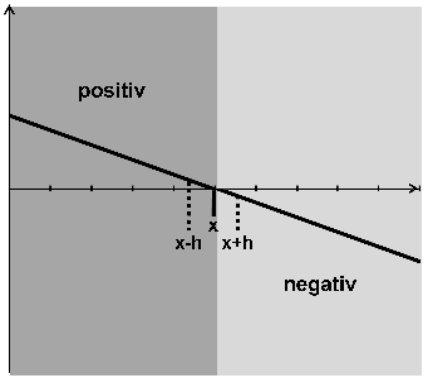


Hinreichende Bedingung
$f'(x-h) < 0$ und $f'(x+h) > 0$
→ Tiefpunkt / Minimum

Funktion mit Hochpunkt / Maximum

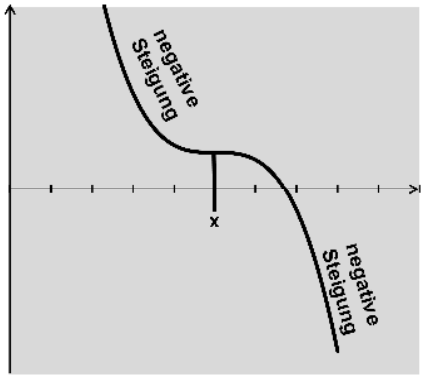


Ableitungsfunktion

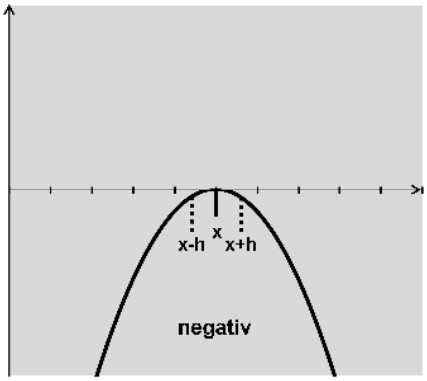


Hinreichende Bedingung
$f'(x-h) > 0$ und $f'(x+h) < 0$
→ Hochpunkt / Maximum

Funktion mit Sattelpunkt



Ableitungsfunktion



Hinreichende Bedingung
$f'(x-h) < 0$ und $f'(x+h) < 0$ oder
$f'(x-h) > 0$ und $f'(x+h) > 0$
→ Sattelpunkt

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel: Will man für den Kandidaten der Flugbahn der Wasserrakete (siehe Beispiel in der Information zur notwendigen Bedingung auf Seite 22) mathematisch nachweisen, ob es sich um ein Minimum, ein Maximum oder einen Sattelpunkt handelt, so wendet man das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium folgendermaßen an:

- $t = 2$ ist hier der bereits berechnete Kandidat für ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt.
- Betrachtet wird die Umgebung für $h = 0{,}1$.
- Daraus folgt $s'(2 - 0{,}1) = s'(1{,}9) = 2 > 0$ und $s'(2 + 0{,}1) = s'(2{,}1) = -2 < 0$.
- Am Wechsel des Vorzeichens (von positiv zu negativ) erkennt man, dass es sich um ein Maximum handelt.

(10) Übungsaufgabe: Anwendung des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums

Weisen Sie mithilfe des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums **nach**, ob es sich bei den in der Aufgabe 9 (auf Seite 22) berechneten Punkten um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt.

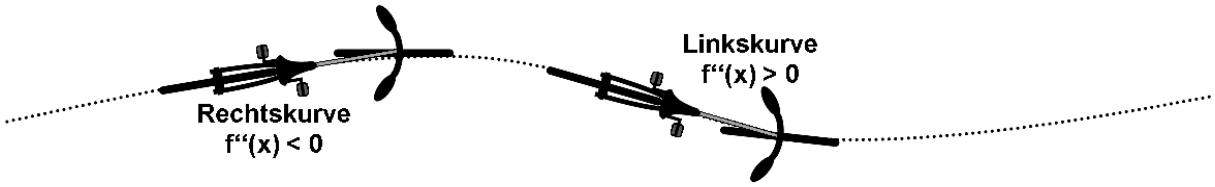
a) $f(x) = x^3 - x$
b) $g(x) = -x^2 + 4$
c) $h(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$

Bedeutung der zweiten Ableitung

Bei dem Nachweis von Maxima, Minima und Sattelpunkten hat die *zweite Ableitung* eine zentrale Bedeutung. Die zweite Ableitung ist die Ableitung der ersten Ableitung.

Die zweite Ableitung $f''(x)$ (gesprochen: „f zwei Strich von x“) einer Funktion $f(x)$ gibt Auskunft über das sogenannte *Krümmungsverhalten* der Funktion $f(x)$.

Anschaulich lässt sich das Krümmungsverhalten verstehen, indem man sich vorstellt, dass jemand den Graphen von links nach rechts auf einem Fahrrad entlangfährt. Macht der Radfahrer eine Rechtskurve so gilt $f''(x) < 0$, macht er eine Linkskurve so gilt $f''(x) > 0$.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(11) Aufgabe: Bestimmen der zweiten Ableitung

Bestimmen Sie die zweite Ableitung der folgenden Funktionen. *(Die erste Ableitung haben Sie in Aufgabe 9 auf Seite 22 bereits bestimmt.)*

Untersuchen Sie jeweils das Krümmungsverhalten der Graphen an den angegebenen Stellen *(diese haben Sie bereits in Aufgabe 9 als Nullstellen der 1. Ableitung berechnet)*.

a) $f(x) = x^3 - x$ $\quad x_1 = 0{,}577$ und $x_2 = -0{,}577$

b) $g(x) = -x^2 + 4$ $\quad x = 0$

c) $h(x) = x^5 + x^4 - 2x^3$ $\quad x_1 = 0$ und $x_2 = 0{,}766$ und $x_3 = -1{,}566$

Hinreichende Bedingung für Hoch-, Tief- und Sattelpunkte: Wert der zweiten Ableitung

Setzt man die möglichen Kandidaten für Hoch-, Tief- und Sattelpunkte in die zweite Ableitung ein, so lässt sich entscheiden, welche der drei Möglichkeiten (Hochpunkt, Tiefpunkt oder Sattelpunkt) zutrifft.

Dabei gilt:

$f''(x_{Max}) < 0$ → rechtsgekrümmt, also Hochpunkt / Maximum

$f''(x_{Min}) > 0$ → linksgekrümmt, also Tiefpunkt / Minimum

$f''(x_S) = 0$ → ungekrümmt, also Sattelpunkt

Beispiel: Will man für den Kandidaten der Flugbahn der Wasserrakete (auf Seite 22) mathematisch nachweisen, ob es sich um ein Minimum, Maximum oder einen Sattelpunkt handelt, so nutzt man die zweite Ableitung folgendermaßen:

- $t = 2$ ist hier der betrachtete Kandidat.
- Mit $s''(t) = -20$ ergibt sich $s''(2) = -20 < 0$.
- Da der Wert negativ ist, handelt es sich um ein Maximum.

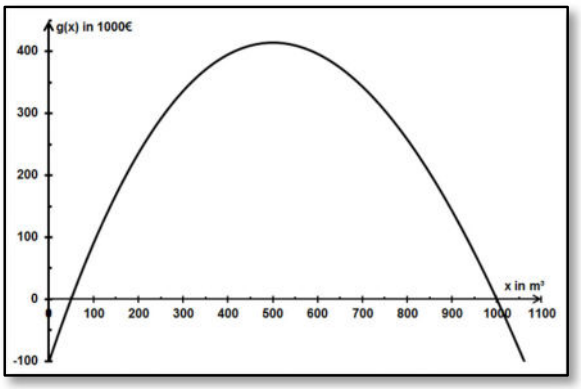
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(12) Aufgabe: Cosinus°Cola

Die Getränkefirma πψ-Cola stellt Cosinus°Cola her und füllt sie in einer firmeneigenen Flaschenabfüllanlage in 1-Liter-Flaschen ab.

Pro Monat wird nicht immer genau die gleiche Menge Cosinus°Cola hergestellt. Je nach produzierter Menge kann der Hersteller unterschiedlich viel Gewinn erzielen.



Der Gewinn pro Monat bei unterschiedlichen Produktionsmengen lässt sich durch die folgende Funktion modellieren:

$$g(x) = \frac{1}{2500000}x^3 - \frac{123}{50000}x^2 + \frac{1081}{500}x - 102$$

mit x in m^3 und $g(x)$ in 1000 €

a) **Berechnen** Sie die Fixkosten, also die Kosten, die dem Unternehmen auch dann entstehen, wenn keine Cola produziert wird.

b) **Berechnen** Sie die sogenannte Gewinnzone, also den Produktionsmengenbereich, in dem das Unternehmen πψ-Cola Gewinn macht.

c) **Berechnen** Sie die Produktionsmenge, bei welcher der Gewinn des Unternehmens maximal ist.

d) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil c) lautet:

Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$

$g'(x) = \frac{3}{2.500.000}x^2 - \frac{123}{25.000}x + \frac{1081}{500}$

$g'(x) = 0 \rightarrow x_1 = 500{,}538$ und $x_2 = 3599{,}462$

Die zweite Lösung entfällt, da der Wert nicht in der Gewinnzone liegt.

Das Unternehmen erwirtschaftet den maximalen Gewinn, wenn es 500,538 m^3 bzw. 500538 Liter Cosinus° Cola pro Monat produziert.

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie die mathematische Unzulänglichkeit des Lösungsweges.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(13) Aufgabe: Schwimmbadbesucher CAS

Um den Personaleinsatz besser planen zu können, werden in einem großen Schwimmbad die Besucherzahlen im Laufe eines Tages beobachtet und als Funktion modelliert.

Die folgende Funktion $b(t)$ beschreibt die Anzahl der Besucher im Verlauf des Tages:

$$b(t) = -17{,}385t^4 + 270{,}125t^3 - 1255{,}211t^2 + 2024{,}471t$$

mit t in h ($t = 0$ ist der Beobachtungsbeginn um 8 Uhr)
und $b(t)$ in Anzahl der Besucher

a) **Berechnen** Sie in welchem Zeitraum sich weniger als 800 Kunden im Schwimmbad befinden.

Am Vormittag wird das Schwimmbad von Schulklassen genutzt und nachmittags kommen viele Freizeit-Gäste. Mittags gibt es eine relativ ruhige Zeit im Schwimmbad.

b) **Berechnen** Sie diesen Zeitpunkt der geringsten Besucherzahl im Schwimmbad.

(14) Übungsaufgabe: Minima, Maxima und Sattelpunkte berechnen

Berechnen Sie die Koordinaten der Minima, Maxima und Sattelpunkte der folgenden Funktionen, indem Sie die notwendige Bedingung (Seite 21) und eine der beiden hinreichenden Bedingungen (Seite 22 oder 25) verwenden.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 5$
c) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$

(15) Aufgabe: Planung einer Parkhausauffahrt

Bei der Planung eines Parkhauses soll die erste Parkebene in 4 m Höhe mit dem Erdboden durch eine Auffahrt für die Fahrzeuge verbunden werden. Die horizontale Länge der Auffahrt soll 12 m betragen.

Es wird vorgeschlagen, die Auffahrt durch die folgende Funktion zu modellieren:

$$f(x) = -\frac{1}{216}x^3 + \frac{1}{12}x^2$$

mit $0 \leq x \leq 12$ in Metern [m] und $f(x)$ in Metern [m]

Nun muss überprüft werden, ob diese Auffahrt von einem normalen Auto befahrbar ist, das eine maximale Steigung von circa 35 % überwinden kann.

a) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Steigung der gesamten Auffahrt.
b) **Bestimmen** Sie die maximale Steigung der Auffahrt, also die Steigung an der steilsten Stelle.
c) **Beurteilen** Sie aufgrund Ihrer Ergebnisse, ob die Auffahrt zum Befahren durch Autos geeignet ist.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte

In der Aufgabe zur Planung einer Parkhausauffahrt wurde die *maximale Steigung* der Funktion gesucht. Die Punkte, an denen die Steigung bzw. das Gefälle einer Funktion maximal ist, werden als **Wendepunkte** bezeichnet. Die Wendestellen sind die Extremstellen der ersten Ableitung, da dort die Steigung am höchsten oder am niedrigsten ist.

Zur Berechnung von Wendepunkten müssen sowohl die notwendige als auch die hinreichende Bedingung überprüft werden. Die **notwendige Bedingung** für einen Wendepunkt lautet: $f''(x_W) = 0$.
Löst man diese Gleichung, so erhält man mögliche Kandidaten für Wendepunkte.

Anschaulich bedeutet das, dass ein Radfahrer, der den Graphen von links nach rechts entlangfährt im Wendepunkt von einer Linkskurve in eine Rechtskurve oder von einer Rechtskurve in eine Linkskurve wechselt. Das bedeutet, dass er für einen kurzen Moment den Lenker gerade hält.

Setzt man die möglichen Kandidaten für Wendepunkte in die dritte Ableitung ein, so lässt sich erkennen, ob es sich um einen Wechsel von einer Linkskurve in eine Rechtskurve oder von einer Rechtskurve in eine Linkskurve handelt.

Dabei gilt die **hinreichende Bedingung** (vorausgesetzt $f'(x_W) \neq 0$, denn bei $f'(x_W) = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor):

$f'''(x_W) < 0$ → Wechsel von einer Linkskurve in eine Rechtskurve, also maximale Steigung
$f'''(x_W) > 0$ → Wechsel von einer Rechtskurve in eine Linkskurve, also maximales Gefälle
$f'''(x_W) = 0$ → nicht eindeutig (Vorzeichen-Wechsel-Kriterium kann hier zur Überprüfung verwendet werden)

Alternativ kann als **hinreichende Bedingung** auch das Vorzeichen-Wechsel-Kriterium verwendet werden. Hierbei betrachtet man das Vorzeichen der zweiten Ableitung links und rechts des möglichen Wendepunkts.

Dabei gilt (vorausgesetzt $f'(x_W) \neq 0$, denn bei $f'(x_W) = 0$ liegt ein Sattelpunkt vor):

$f''(x-h) > 0$ und $f''(x+h) < 0$ → Wechsel von einer Linkskurve in eine Rechtskurve, also maximale Steigung
$f''(x-h) < 0$ und $f''(x+h) > 0$ → Wechsel von einer Rechtskurve in eine Linkskurve, also maximales Gefälle
$f''(x-h) < 0$ und $f''(x+h) < 0$ oder
$f''(x-h) > 0$ und $f''(x+h) > 0$ → kein Wendepunkt, sondern Extrempunkt

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel: Berechnung des Wendepunktes für die Aufgabe "Planung einer Parkhausauffahrt" auf Seite 27.

Funktionsgleichung:

$$f(x) = -\frac{1}{216}x^3 + \frac{1}{12}x^2$$

Notwendige Bedingung:

$$f''(x_W) = 0$$
$$f''(x) = -\frac{1}{36}x + \frac{1}{6} = 0$$
$$x_W = 6$$

Hinreichende Bedingung - Möglichkeit 1:

$$f'''(x_W) < 0$$
$$f'''(6) = -\frac{1}{36} < 0$$

Somit ist die Steigung der Funktion bei $x = 6$ maximal.

Hinreichende Bedingung - Möglichkeit 2:

$f''(x_W - h) > 0$ und $f''(x_W + h) < 0$ mit $h = 0{,}1$

$$f''(5{,}9) = \frac{1}{360} > 0$$
$$f''(6{,}1) = -\frac{1}{360} < 0$$

Somit ist die Steigung der Funktion bei $x = 6$ maximal.

Um den Wert der Steigung an der Wendestelle zu berechnen, muss nun noch $x = 6$ in die erste Ableitung eingesetzt werden:

$f'(6) = -\frac{1}{216}6^3 + \frac{1}{12}6^2 = 0{,}5$. Die maximale Steigung beträgt somit 0,5 $\frac{\text{m}}{\text{m}}$.

(16) Übungsaufgabe: Wendepunkte berechnen

Berechnen Sie die Koordinaten der Wendepunkte der folgenden Funktionen, indem Sie jeweils die notwendige und eine der beiden hinreichenden Bedingungen verwenden. **Berechnen** Sie zusätzlich die Steigung an den jeweiligen Wendepunkten.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 36x$
b) $g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 8x^2 + 5$
c) $h(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3$
d) **Berechnen** Sie die Wendepunkte der Funktion
$f(x) = \frac{1}{2400} \cdot (48x^4 - 352x^3 + 672x^2 + 197)$
aus der Aufgabe 6 "Höhenprofil einer Straße" auf Seite 19.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zusammenhang zwischen den markanten Punkten in f, f´ und f´´

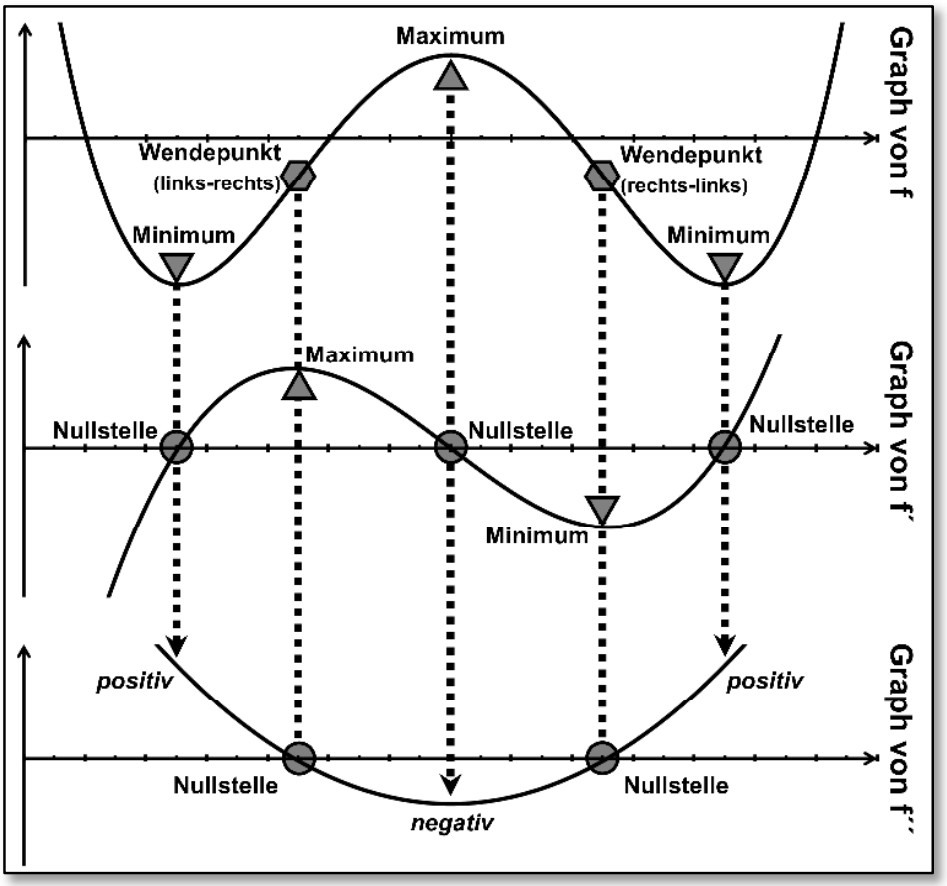
Zusammenfassend lässt sich sagen:

- Die **Extremstellen** der Ausgangsfunktion sind die **Nullstellen** der ersten Ableitung (außer sie sind auch die Nullstellen der zweiten Ableitung).
- Die **Wendestellen** der Ausgangsfunktion sind die **Extremstellen** der ersten Ableitung und damit die **Nullstellen** der zweiten Ableitung.

Bezeichnet man die Nullstellen mit N, die Extremstellen mit E und die Wendestellen mit W, ergibt sich die **NEW-Merkregel**:

	🡻	🡻	🡻		
Funktion	**N**	**E**	**W**		
1. Ableitung		**N**	**E**	W	
2. Ableitung			**N**	E	W

Auch grafisch kann man sich den Zusammenhang zwischen einer Funktion sowie deren 1. und 2. Ableitung noch einmal verdeutlichen:



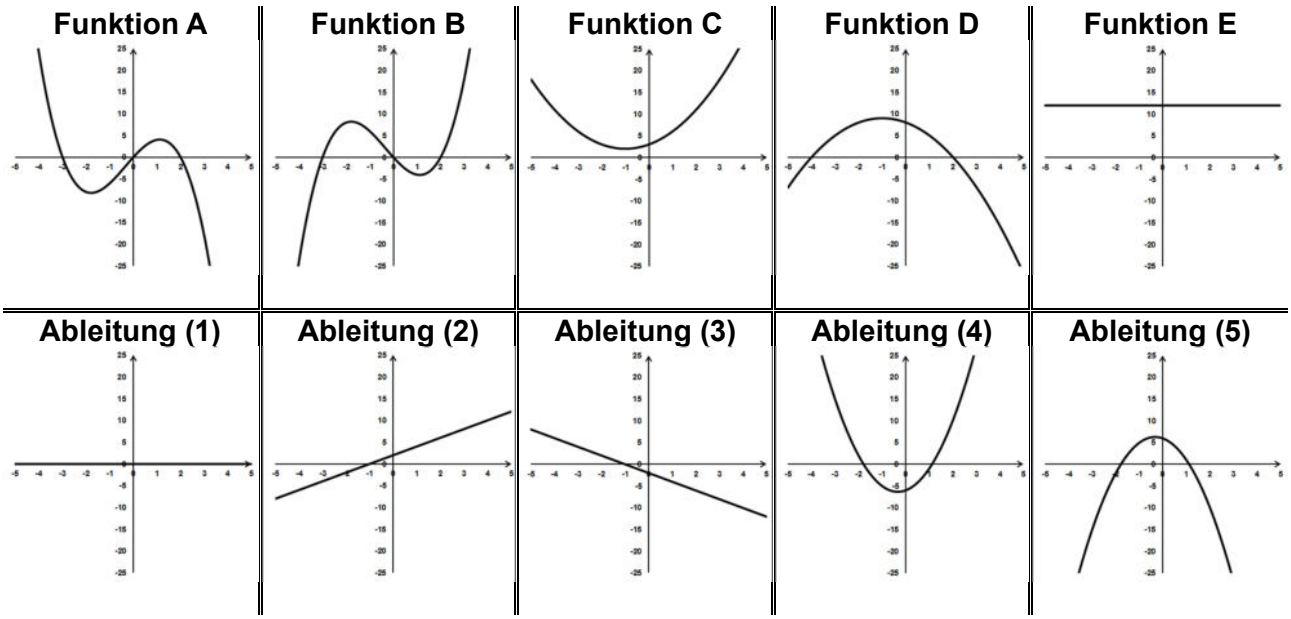
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(17) Übungsaufgabe: Ableitungen zuordnen

a) **Ordnen** Sie den folgenden Funktionsgraphen (A bis E) die Graphen ihrer Ableitungsfunktionen (1 bis 5) **zu**.

b) **Begründen** Sie für die Funktionen A und B die Wahl Ihrer Zuordnung.

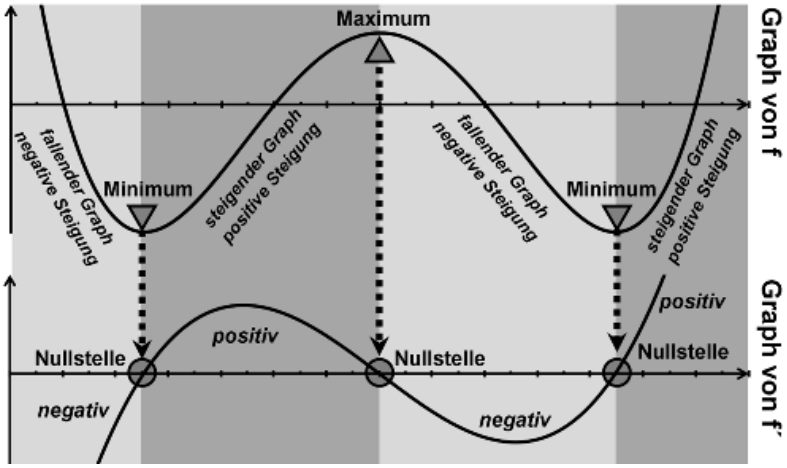


Zusammenhang zwischen Funktionsgraph und Graph der 1. Ableitung

Aus der Steigung der Ausgangsfunktion lässt sich erkennen, in welchen Abschnitten die Ableitungsfunktion oberhalb und unterhalb der x-Achse verläuft.

Ist die Funktion in einem Abschnitt steigend (positive Steigung), so verläuft die Ableitung oberhalb der x-Achse.

Ist die Funktion in einem Abschnitt fallend (negative Steigung), so verläuft die Ableitung unterhalb der x-Achse.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Genau hingeschaut: Monotonie

Eine Funktion wird auf einem *Intervall* (so bezeichnet man einen Zahlenbereich) zwischen dem Anfangswert a und dem Endwert b (mathematische Schreibweise: $[a;b]$) als *streng monoton steigend* bezeichnet, wenn der Wert der Ableitungsfunktion in diesem Abschnitt stets größer als 0 ist ($f'(x) > 0$ für alle $x \in [a;b]$).

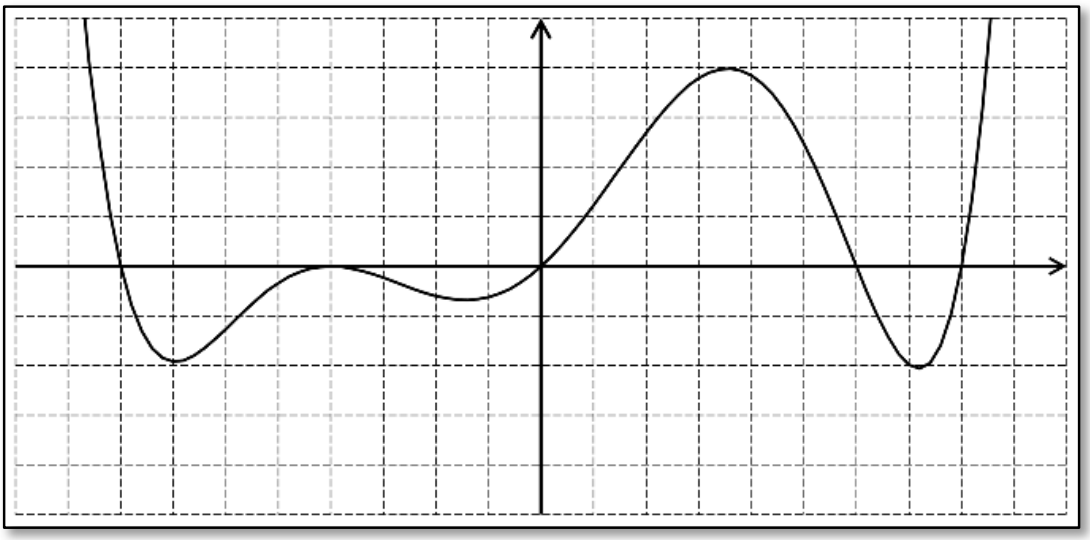
Wenn die Steigung an einer Stelle in diesem Intervall 0 beträgt, so bezeichnet man die Funktion als *monoton steigend* ($f'(x) \geq 0$ für alle $x \in [a;b]$).

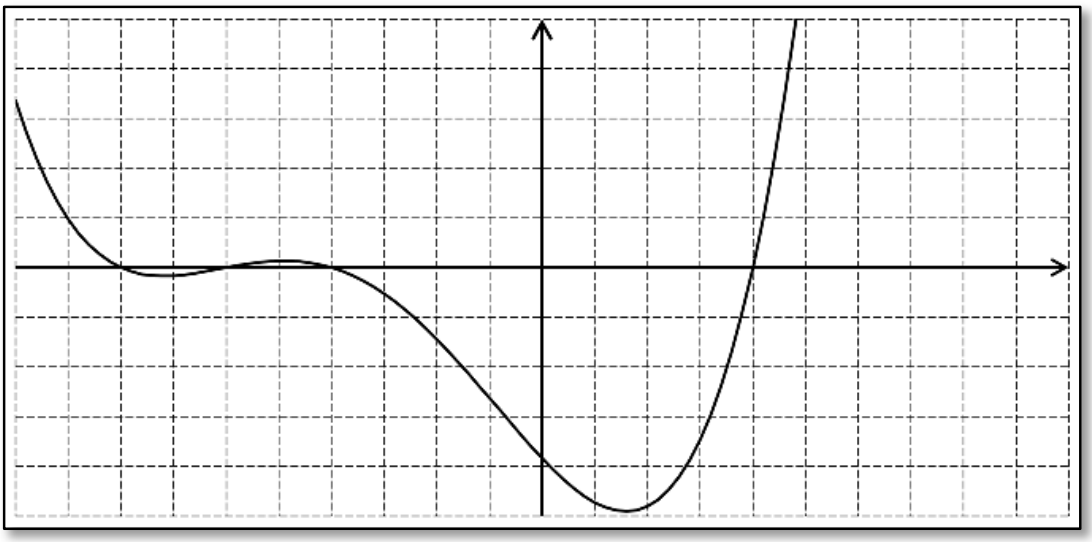
Eine Funktion wird auf einem Intervall $[a;b]$ als *streng monoton fallend* bezeichnet, wenn der Wert der Ableitungsfunktion in diesem Abschnitt stets kleiner als 0 ist ($f'(x) < 0$ für alle $x \in [a;b]$).

Wenn die Steigung an einer Stelle in diesem Intervall 0 beträgt, so bezeichnet man die Funktion als *monoton fallend* ($f'(x) \leq 0$ für alle $x \in [a;b]$).

(18) Übungsaufgabe: Ableitungen zeichnen

Skizzieren Sie die Graphen der 1. Ableitung der folgenden Funktionsgraphen.





Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(19) Aufgabe: Produktion von x-Phones

In einer Fabrik werden die neuen x-Phones produziert.

Die Produktionskosten können durch eine Funktion $k(x)$ beschrieben werden. Diese gibt für eine Produktionsmenge x die zugehörigen Kosten in € an.

$$k(x) = \frac{1}{1800000}x^3 - \frac{1}{75}x^2 + 160x + 600000$$

mit x in Stück und $k(x)$ in €

Der Gewinn des Unternehmens lässt sich durch die Gewinnfunktion $g(x)$ darstellen, die für eine Produktionsmenge x den zugehörigen Gewinn in € angibt.

$$g(x) = -\frac{1}{1800000}x^3 + \frac{1}{75}x^2 + 240x - 600000$$

mit x in Stück und $g(x)$ in €

Jeder Betrieb hat sogenannte Fixkosten, das heißt Kosten, die auch dann anfallen, wenn keine x-Phones produziert werden.

a) Betrachten Sie die Kostenfunktion und **geben** Sie die Fixkosten **an**.

Allgemein ergibt sich die Gewinnfunktion aus der Kostenfunktion und der sogenannten Erlösfunktion folgendermaßen:

$$g(x) = e(x) - k(x)$$

b) **Berechnen** Sie die Erlösfunktion in diesem Kontext und **geben** Sie den Preis pro x-Phone **an**.

c) **Berechnen** Sie mit welchem Gewinn das Unternehmen rechnen kann, wenn 12 000 x-Phones produziert werden.

Die Gewinnschwelle einer Gewinnfunktion ist die Produktionsmenge, ab der das Unternehmen Gewinn macht.

d) **Bestätigen** Sie, dass die Gewinnschwelle bei 2246 x-Phones liegt.

Selbstverständlich strebt jedes Unternehmen danach, den maximalen Gewinn zu erzielen.

e) **Berechnen** Sie den maximalen Gewinn.

f) **Bestimmen** Sie die Produktionsmenge der maximalen Gewinnrate, das heißt die Produktionsmenge, bei der die Gewinnsteigerung maximal ist. **Berechnen** Sie die zugehörige Gewinnrate.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(20) Aufgabe: Kundenzählung im Schnellrestaurant

In einem Burger-Restaurant wird im Rahmen einer Besucherzahlenstatistik eine Zählung der Kunden im Verlauf eines Tages vorgenommen.

Im Laufe des Tages lässt sich die Anzahl der Kunden, die zu einem Zeitpunkt im Burger-Restaurant ist, durch die folgende Funktion beschreiben:

$$b(t) = -\frac{2}{27}t^4 + \frac{136}{81}t^3 - \frac{116}{9}t^2 + 40t + 10$$

mit $0 \leq t \leq 11{,}5$ in h und $b(t)$ in Kunden

Dabei entspricht $t = 0$ der Restaurantöffnung um 10 Uhr.



a) **Berechnen** Sie die Anzahl der Kunden zum Zeitpunkt der Öffnung und der Schließung des Burger-Restaurants.

b) **Bestätigen** Sie, dass die Extremstellen der Funktion $b(t)$ bei $t = 3$, $t = 5$ und $t = 9$ liegen und **untersuchen** Sie, an welchen Stellen es sich um Minima beziehungsweise Maxima handelt.

c) **Bestimmen** Sie die maximale Besucheranzahl im Burger-Restaurant während der Öffnungszeiten.

d) **Bestimmen** Sie die minimale Besucheranzahl im Burger-Restaurant während der Öffnungszeiten.

Globale (absolute) und lokale (relative) Extrema

Die Funktion in der vorangegangenen Aufgabe weist zwei Hochpunkte auf. Dabei liegt das zweite Maximum über dem ersten, d.h. um 19 Uhr ($t = 9$) sind mehr Kunden im Burger-Restaurant als um 13 Uhr, obwohl die Funktion bei $t = 3$ ein Maximum besitzt.

Mathematisch bezeichnet man beide Maxima als *lokale* Maxima, da innerhalb der direkten Umgebung des t-Wertes kein $b(t)$-Wert höher liegt.

Liegt wie beim zweiten Maximum der höchste $b(t)$-Wert vor, so bezeichnet man dieses Maximum als *globales* Maximum.

Alternativ kann man lokale Maxima auch als *relative* Maxima bezeichnen und globale Maxima können auch als *absolute* Maxima bezeichnet werden.

Die analogen Bezeichnungen gelten für Minima.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Randextrema (Randminimum und Randmaximum)

In der vorangegangenen Aufgabe „Kundenzählung im Schnellrestaurant“ (Seite 34) sind für das angegebene Intervall die minimalen Besucherzahlen im Burger Restaurant gesucht.

Bei der Berechnung des Minimums ergibt sich ein lokales Minimum, welches aber auf dem betrachteten Intervall nicht den niedrigsten Funktionswert angibt, da beispielsweise zum Zeitpunkt der Restaurantöffnung und auch der -schließung noch weniger Kunden im Restaurant sind. Der absolut kleinste Funktionswert im Intervall [0;11,5] liegt am Rand des Intervalls an der Stelle $x = 0$. Man nennt dies ein *Randminimum*.

Betrachtet man eine Funktion nicht als Ganzes, sondern eingeschränkt auf ein Intervall, so muss man bei der Suche nach Extrema immer auch die Funktionswerte an den Intervallrändern betrachten. Liegt hier der absolut kleinste Funktionswert des Intervalls, so spricht man von einem Randminimum. Liegt hier der absolut größte Funktionswert des Intervalls, so spricht man von einem *Randmaximum*.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Durchschnittliche Steigung zwischen zwei Punkten / Sekantensteigung
- ❑ Näherungsweises Berechnen der Steigung an einer Stelle
- ❑ *Grenzwert des Differenzenquotienten*
- ❑ Ableitungsfunktion
- ❑ Ableitungsregeln für ganzrationale Funktionen
- ❑ Bedeutung der ersten und zweiten Ableitung
- ❑ *Tangente, Tangentengleichung*
- ❑ Extrempunkte (Hochpunkte, Tiefpunkte) und Sattelpunkte
- ❑ Notwendige Bedingung für Hochpunkte, Tiefpunkte und Sattelpunkte
- ❑ Hinreichende Bedingung für Hochpunkte, Tiefpunkte und Sattelpunkte (Vorzeichen-Wechsel-Kriterium, Wert der zweiten Ableitung)
- ❑ Notwendige und hinreichende Bedingung für Wendepunkte
- ❑ Zusammenhang zwischen den markanten Punkten in f, f' und f''
- ❑ *Monotonie*
- ❑ globale (absolute) und lokale (relative) Extrema
- ❑ Randextrema (Randminimum und Randmaximum)

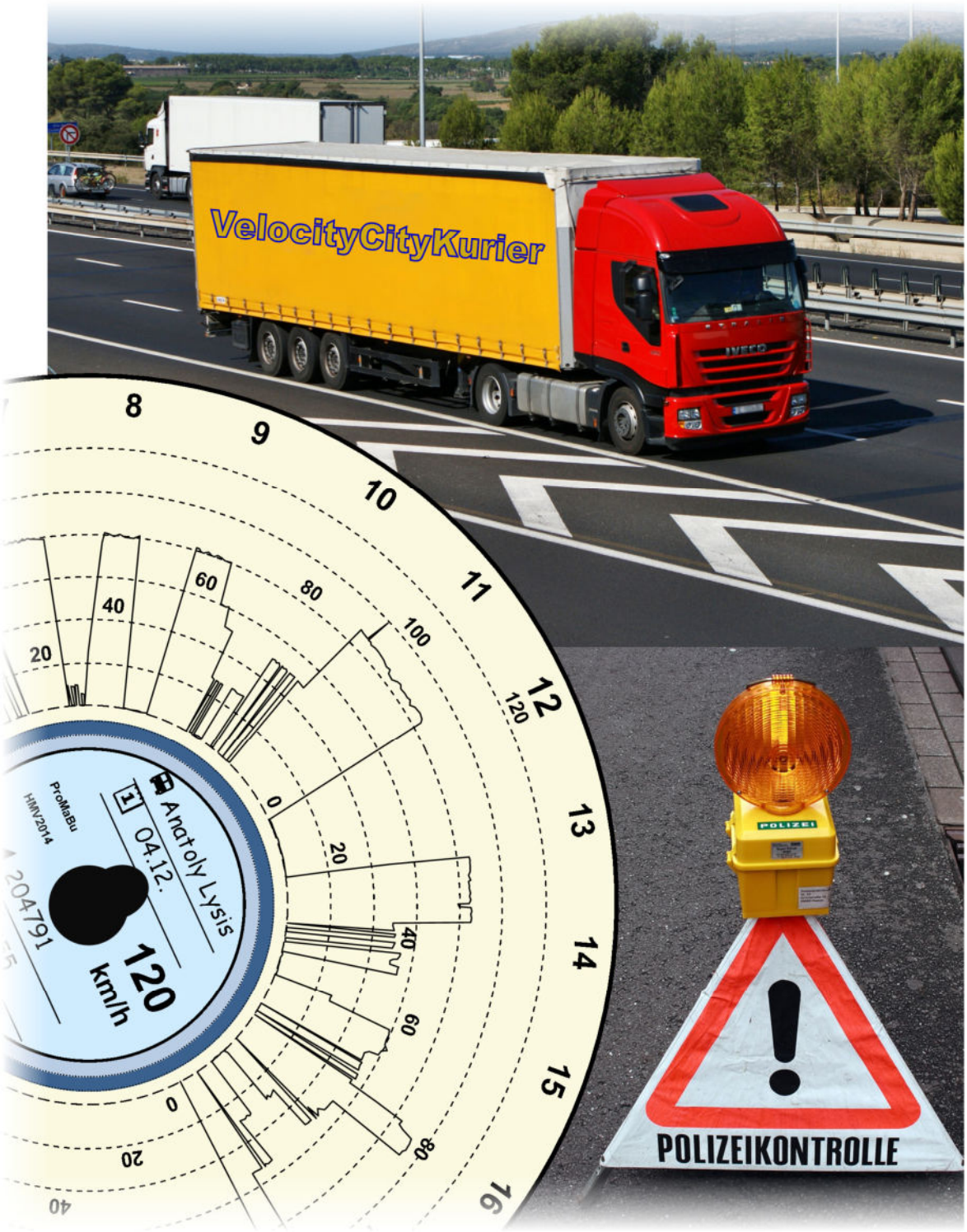
Einträge, die sich auf „Genau hingeschaut“ beziehen, sind kursiv gedruckt.

Eine Übersicht zu sprachlichen Formulierungen zum Beschreiben von markanten Punkten und der Steigung eines Graphen finden Sie auf Seite 217.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einstieg in das Thema Integralrechnung



Collage – Quellen: LKW - Foto von NotrucksNolife, 2013, verändert, creativecommons.org/licenses/by/2.0/ | Polizeikontrolle - Foto von Dirk Vorderstraße, 2013, verändert, creativecommons.org/licenses/by/2.0/

(1) Aufgabe zum Einstieg

Beschreiben Sie die Abbildung und **formulieren** Sie dazu Fragestellungen, welche sich mithilfe von Mathematik beantworten lassen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Integralrechnung - Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg

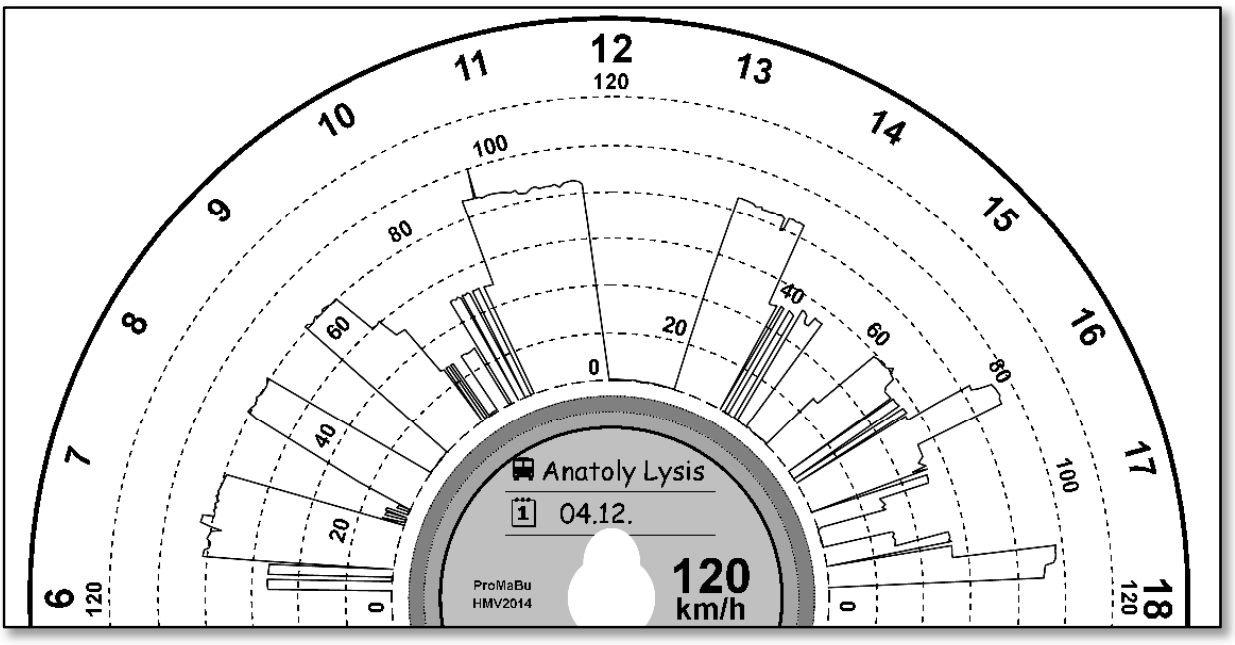
(2) Aufgabe: Auswertung eines Fahrtenschreibers 1

In Deutschland ist in allen Lastkraftwagen (LKW) über 3,5 t und in allen Kraftfahrzeugen zur Personenbeförderung mit über 9 Personen vorgeschrieben, einen Fahrtenschreiber (Tachographen, von griechisch τάχος *tachos* „Geschwindigkeit“ und γράφειν *grafein* „schreiben“) zu verwenden.

Dieser zeichnet entweder digital oder auf einer Papierscheibe den Fahrtverlauf für einen Tag als Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm auf. Der Fahrtenschreiber dient einerseits der Überprüfung der Lenk- und Ruhezeiten und andererseits der Unfallrekonstruktion.

Die Polizei ist täglich auf Autobahnen im Einsatz, um die Einhaltung der Vorschriften zu überprüfen, da übermüdete Fahrer ein erhöhtes Unfallrisiko haben.

Bei einer Polizeikontrolle auf der A1 legt der Fahrer eines LKWs der Spedition Velocity-CityKurier die folgende Fahrtenschreiberscheibe vor.



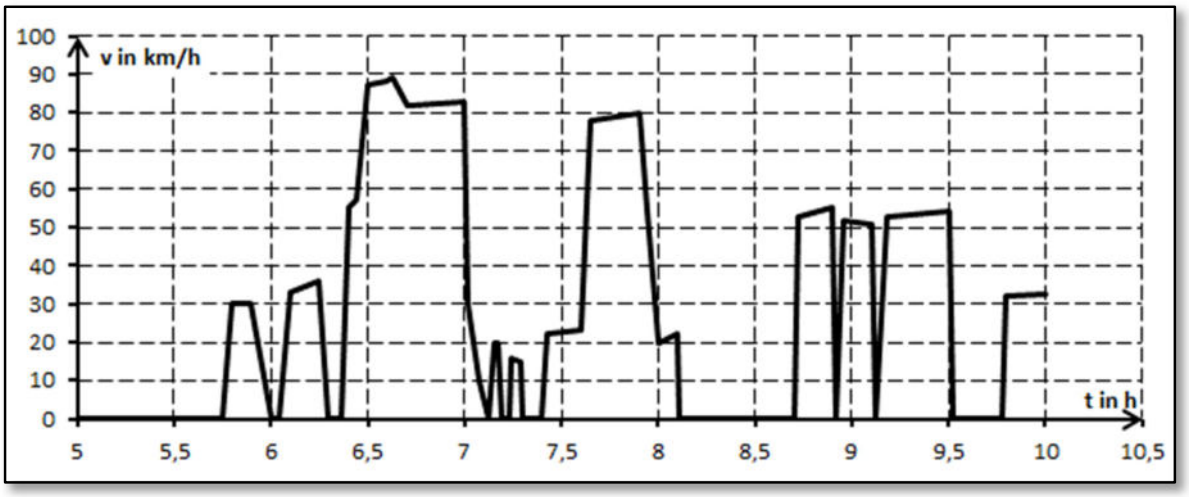
Beschreiben Sie den Fahrtverlauf des LKWs. **Geben** Sie dabei die Lenk- und Ruhezeiten an und gehen Sie auf mögliche Verkehrslagen während der unterschiedlichen Phasen der Fahrt ein.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Aufgabe: Auswertung eines Fahrtenschreibers 2

Im Folgenden wurden die Daten eines anderen Fahrtenschreibers in ein kartesisches Koordinatensystem übertragen.



Beantworten Sie die folgenden Fragen mithilfe des abgebildeten Tachographen.

a) **Geben** Sie die Höchstgeschwindigkeit an.

b) **Geben** Sie an, wann das Fahrzeug stand.

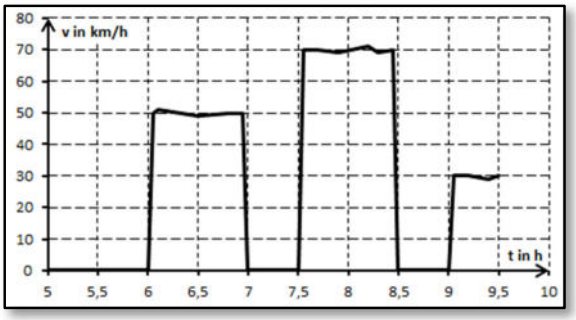
c) **Entscheiden** Sie, ob es vermutlich einen Stau auf der Strecke gab.

d) **Entscheiden** Sie, ob der Fahrer eine Pause gemacht hat.

e) **Beschreiben** Sie, auf welcher Art von Straßen der Fahrer auf seiner Route wahrscheinlich gefahren ist.

(4) Aufgabe: Kundenbeschwerde beim VelocityCityKurier

Ein Kunde der Spedition VelocityCityKurier hat sich darüber beschwert, dass seine Express-Lieferung um neun Uhr noch nicht eingetroffen war. Der Fahrer aber behauptet, bereits vor neun die Lieferung abgegeben zu haben.



Der Chef der Spedition möchte nun überprüfen, ob die Lieferung pünktlich gewesen sein kann. Dazu betrachtet er die Fahrtenschreiberscheibe, um herauszufinden, ob es möglich ist, dass der Fahrer die Strecke von circa 140 km vom Speditionshof bis zum Kunden vor neun Uhr gefahren ist.

Beschreiben Sie, wie der Spediteur vorgehen könnte.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Von der Geschwindigkeit zum Weg

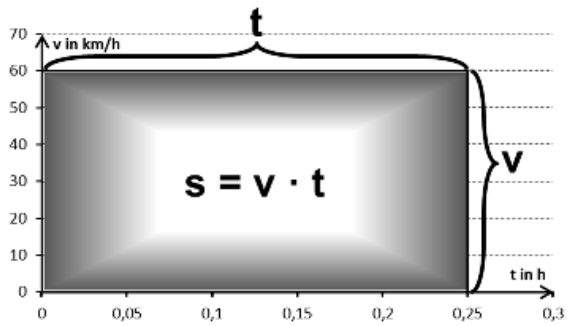
In einem Zeit-Geschwindigkeit-Diagramm entspricht die zurückgelegte Strecke der Fläche, die zwischen dem Graphen der Geschwindigkeitsfunktion und der Zeit-Achse entsteht.

Dies wird an einem einfacheren Beispiel verständlich:

Ein Auto fährt eine Viertelstunde $(t = 0{,}25\,\text{h})$ lang mit einer Geschwindigkeit von 60 Stundenkilometern $\left(v = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}}\right)$, dann ist der zurückgelegte Weg

$s = v \cdot t = 60\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 0{,}25\,\text{h} = 15\,\text{km}$ lang.

Im Graphen entsprechen die Zeit- und die Geschwindigkeitsangaben den Seiten des entstandenen Rechtecks. Die Fläche des Rechtecks ist hierbei also ein Maß für den zurückgelegten Weg.



Die **Einheit** der durch die Fläche repräsentierten Größe ergibt sich durch die Multiplikation der Einheiten der beiden Achsen.

Im Beispiel: $\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \text{h} = \text{km}$

(5) Übungsaufgaben: Bestimmen der Einheit

a) Eine Badewanne wird mit Wasser gefüllt. In dem zu diesem Vorgang zugehörigen Diagramm ist auf der t-Achse die Zeit in Minuten $[\text{min}]$ und auf der $v(t)$-Achse die Zulaufgeschwindigkeit in Litern pro Minute $\left[\frac{\text{l}}{\text{min}}\right]$ aufgetragen.

Geben Sie die Einheit der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $v(t)$ und der t-Achse **an**.

b) In einer Müllverwertungsanlage wird der momentane Schadstoffausstoß durch Sensoren gemessen. Im Messdiagramm ist auf der t-Achse die Zeit in Minuten $[\text{min}]$ und auf der $f(t)$ – Achse der momentane Schadstoffausstoß in Milligramm pro Minuten $\left[\frac{\text{mg}}{\text{min}}\right]$ aufgetragen.

Geben Sie die Einheit der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(t)$ und der t –Achse **an**.

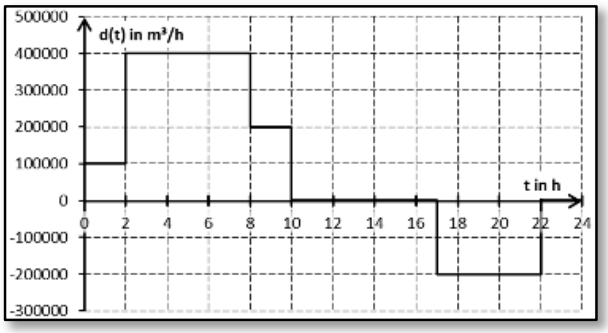
(6) Aufgabe: Pumpspeicherwerk Geesthacht

Bei erneuerbaren Energien ergibt sich häufig das Problem, dass beispielsweise an einem sonnigen Tag (Solarenergie) oder einem stürmischen Tag (Windkraftanlagen) ein Überschuss an elektrischer Energie ins Stromnetz eingespeist wird. Pumpspeicherkraftwerke dienen dazu, diese elektrische Energie zu speichern und bei Bedarf wieder ins Stromnetz einzuspeisen. Hierzu wird Wasser mit elektrischen Pumpen einen Berghang hinauf in ein Speicherbecken

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

gepumpt. Wenn Strom benötigt wird, strömt das Wasser durch Rohre aus dem Speicherbecken wieder den Berg hinab, wobei Turbinen Strom erzeugen.





Im Pumpspeicherwerk Geesthacht, in der Nähe von Hamburg, wird Wasser aus der Elbe in ein 80 Meter höher gelegenes Speicherbecken gepumpt, welches 3,6 Millionen Kubikmeter [m^3] Wasser fasst.

In einer stürmischen Nacht wird von den Windkraftanlagen in der Nordsee viel Energie ins Stromnetz eingespeist. Ein Teil des Überschusses wird im Pumpspeicherwerk gespeichert, um damit Verbrauchsspitzen im Tagesverlauf abzufangen. Das Diagramm zeigt die Durchflussrate bzw. die Durchflussgeschwindigkeit in Kubikmetern pro Stunde $\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{h}}\right]$ durch die Rohrleitungen im Verlauf dieses Tages.

a) **Beschreiben** Sie die Vorgänge im Pumpspeicherwerk während dieses Tages. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.
Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

b) **Berechnen** Sie die Wassermenge, die an diesem Tag von den Pumpen ins Speicherbecken hochgepumpt wurde.

c) **Berechnen** Sie die gesamte Wassermenge, die an diesem Tag zur Stromgewinnung durch die Turbinen den Berg hinunterfloss.

d) Um Mitternacht (Zeitpunkt $t = 0$) waren 560 000 m^3 Wasser im Speicherbecken. **Berechnen** Sie die 24 Stunden später im Speicherbecken vorhandene Wassermenge.

Orientierte Flächeninhalte

In der Aufgabe "Pumpspeicherwerk Geesthacht" wurde deutlich, dass man zwischen Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse (im Beispiel: t-Achse) unterscheiden muss.

Im Beispiel entspricht der Flächeninhalt oberhalb der t-Achse dem Wasservolumen, welches den Berg hinauf gepumpt wird. Die Fläche im negativen Bereich, unterhalb der t-Achse, entspricht dem Wasservolumen, welches den Berg hinabfließt.

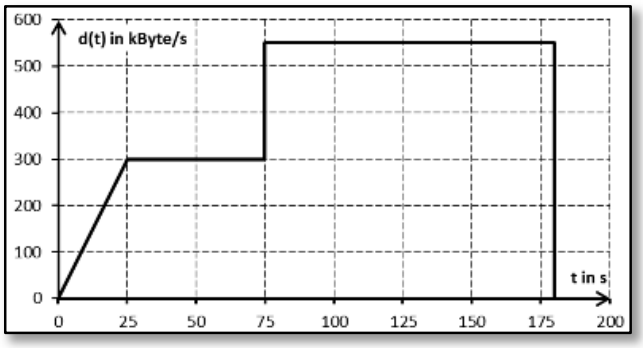
Man spricht hier auch von *orientierten Flächeninhalten* (oder auch von *gerichteten Flächeninhalten*).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Aufgabe: Download

Der dargestellte Graph beschreibt die Downloadgeschwindigkeit beim Download eines Videos aus dem Internet. Der gesamte Download dauerte genau drei Minuten. Die t-Achse gibt die Zeit in Sekunden $[s]$ und die $d(t)$-Achse die Downloadgeschwindigkeit in Kilobyte pro Sekunde $\left[\frac{\text{kByte}}{\text{s}}\right]$ an.



a) **Beschreiben** Sie den Graphen im Sachkontext. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

b) **Berechnen** Sie die Größe des heruntergeladenen Videos.

(8) Aufgabe: Die Gatún-Schleusen im Panamakanal

Der 1914 eröffnete Panamakanal verbindet den Atlantik mit dem Pazifik. Der 82 Kilometer lange Kanal kann mithilfe dreier Schleusenanlagen von Schiffen befahren werden. Die drei hintereinanderliegenden Gatún-Schleusen bringen Schiffe aus dem Atlantik zu dem knapp 26 Meter höher gelegenen Gatúnsee.

Jede Schleuse überwindet dabei etwa 9 Meter Höhenunterschied.

Jede Schleusenkammer ist 33,53 Meter breit, 23,16 Meter tief und die unterste Schleuse ist 327,66 Meter lang.



Panama Kanal – Quelle: CIA The World Factbook, Public Domain

Ein Schleusungsvorgang vom Atlantik aus könnte zum Beispiel so ablaufen:

Ein Schiff ist in die Kammer eingefahren, die Tore und die Wasserzuläufe und -abläufe sind geschlossen. Daraufhin steigt die Zuflussrate innerhalb von drei Minuten kontinuierlich auf 17 000 $\left[\frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right]$. Der Zufluss bleibt vier Minuten konstant und dann werden die Zuläufe innerhalb einer Minute wieder komplett geschlossen.

a) **Zeichnen** Sie das zu diesem Schleusungsvorgang zugehörige Zeit-Zuflussrate-Diagramm.

b) **Bestimmen** Sie mithilfe des Diagramms die gesamte zugeflossene Wassermenge.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zusammengesetzte Flächen

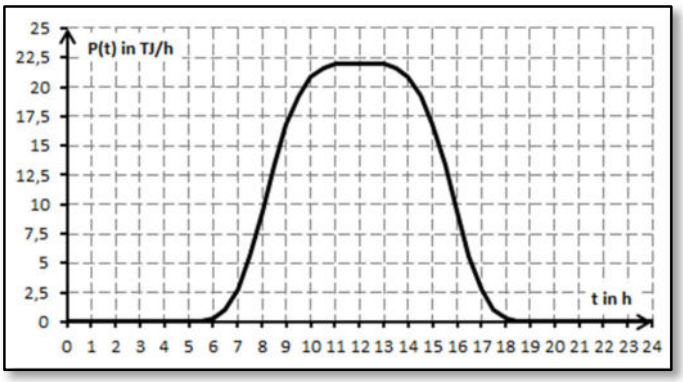
An den Beispielen "Download" (Seite 41) und "Gatún-Schleusen" (Seite 41) haben Sie gesehen, dass man die Fläche zwischen Graph und x-Achse (in den Beispielen: t-Achse) in mehrere Teile zerlegen kann. Diese Teilflächen lassen sich einfach berechnen und müssen im Anschluss addiert werden.

Sie müssen bei dieser Zerlegung nicht immer auf Rechtecke zurückgreifen: Im Beispiel Download ist die zu berechnende Fläche im Intervall von 0 bis 25 Sekunden exakt durch ein Dreieck zu berechnen. Es kann aber auch hilfreich sein, die zu berechnende Fläche in Trapeze oder ähnliches einzuteilen.

(9) Aufgabe: Solarenergie in Deutschland

Die im Verlaufe eines sonnigen Wintertages in Deutschland an der europäischen Energiebörse, European Energy Exchange (EEX), gehandelte Solarleistung ist im nebenstehenden Graphen dargestellt. Die Leistung wird normalerweise in Megawatt $\left[1\ \text{MW} = 1\ \frac{\text{MJ}}{\text{s}}\right]$ angegeben.

Für diese Aufgabe wurde die Solarleistung in Terajoule pro Stunde $\left[\frac{\text{TJ}}{\text{h}}\right]$ umgerechnet und auf der $P(t)$-Achse aufgetragen.



Bestimmen Sie näherungsweise die an diesem Tag insgesamt an der EEX gehandelte Energiemenge in Terajoule [TJ].

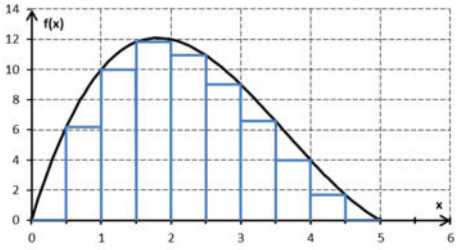
Näherungsweises Bestimmen von Flächeninhalten

Zum näherungsweisen Bestimmen eines Flächeninhaltes zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse versucht man diese Fläche möglichst gut mit einfach zu berechnenden Flächen auszulegen. Häufig wählt man hierfür Rechtecke gleicher Breite. Diese Rechtecke kann man zum Beispiel so wählen, dass sie alle knapp unterhalb des Graphen (Untersumme) oder alle knapp oberhalb des Graphen (Obersumme) liegen. Die Höhe eines Rechtecks kann ebenso dem Funktionswert in der Mitte des Rechtecks entsprechen (Mittelsumme) oder man nutzt Dreiecke, Trapeze oder (halbe) Rechenkästchen.

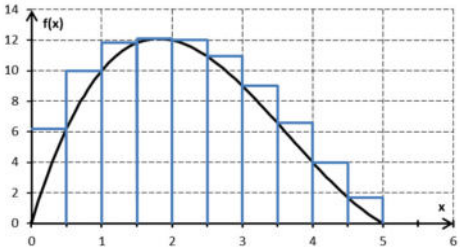
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiele für verschiedene Näherungen (angegeben ist jeweils die resultierende Fläche A)



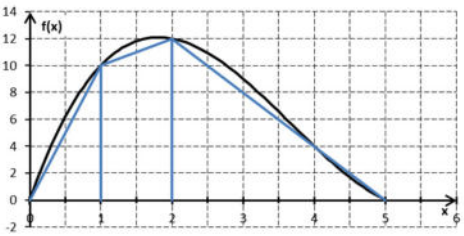
Untersumme ($A = 30{,}1$)



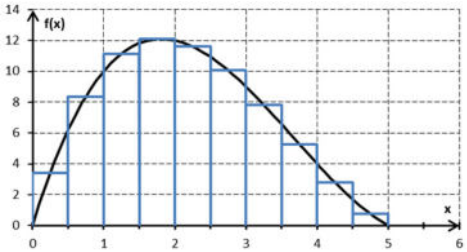
Obersumme ($A = 42{,}1$)



Kästchen zählen ($A = 33{,}5$)



Dreieck/Trapez ($A = 34$)

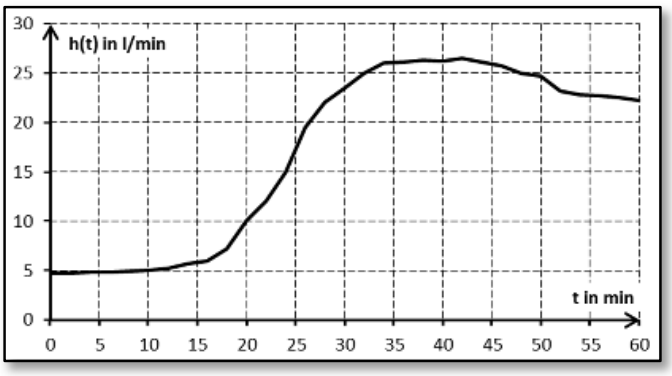


Mittelsumme ($A = 36{,}6$)

Realer Wert:
$A = 36{,}5$

(10) Übungsaufgabe: Herzminutenvolumen

In der Medizin gibt das Herzminutenvolumen das Volumen des Blutes in Litern an, welches in einer Minute vom Herz durch die Aorta in den Blutkreislauf gepumpt wird. Die Einheit des Herzminutenvolumens ist daher Liter pro Minute $\left[\frac{\text{l}}{\text{min}}\right]$. Das Herzminutenvolumen ist ein Maß für die Pumpfunktion des Herzens.



Während einer einstündigen ärztlichen Untersuchung mit körperlicher Belastung entstand das nebenstehende Diagramm.

Bestimmen Sie die gesamte vom Herzen im Untersuchungszeitraum gepumpte Blutmenge und **vergleichen** Sie die Menge mit dem Wasservolumen einer typischen Badewanne (220 Liter).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(11) Übungsaufgabe: Die Kirche São Francisco de Assisi

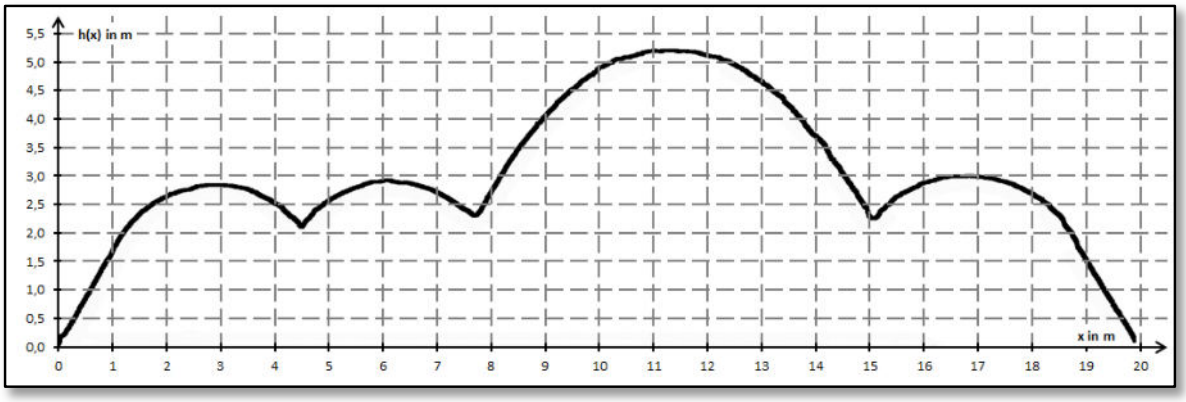
In der brasilianischen Stadt Belo Horizonte steht die Kirche des heiligen Franz von Assis, die nach einem Entwurf des Architekten Oscar Niemeyer gebaut und 1943 eingeweiht wurde. Besonders markant sind die geschwungene Dachform und die Außenfassade, die mit Kacheln des Malers Candido Portinari verkleidet ist.

Diese Kacheln sollen vor weiterer Verwitterung durch einen Schutzanstrich geschützt werden, welcher eine Ergiebigkeit von 0,3 Liter pro Quadratmeter $\left[\frac{\text{l}}{\text{m}^2}\right]$ aufweist.

Bestimmen Sie näherungsweise die erforderliche Menge des Schutzanstriches.



Kirche des heiligen Franz von Assisi in Belo Horizonte, Brasilien – Quelle: Prefeitura de Belo Horizonte (public domain)



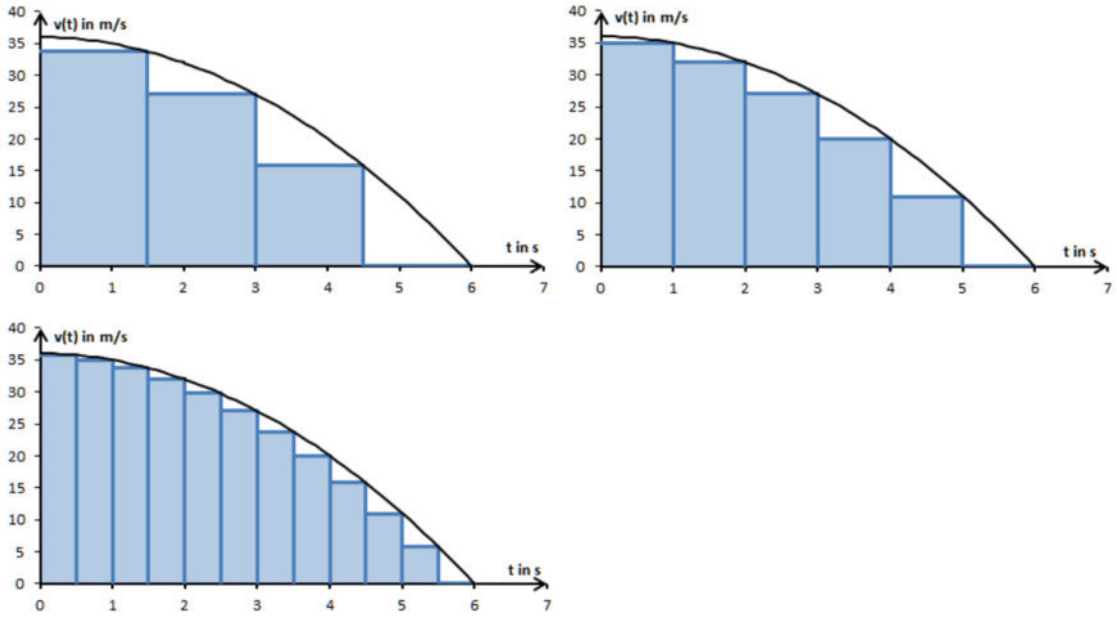
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Integralrechnung - Von der Näherung zur Berechnung

(1) Aufgabe: ABS - Bremsweg abschätzen

Ein Autohersteller testet bei einem neuen Fahrzeugmodell das Antiblockiersystem (ABS). Hierbei wird ein Auto von $130\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ $(\approx 36\,\frac{\text{m}}{\text{s}})$ bis zum Stillstand abgebremst. Aus dem resultierenden $v(t)$-Diagramm soll nun der benötigte Bremsweg bestimmt werden. Hierzu werden drei Verfahren angewandt:



Beschreiben Sie die drei vorgeschlagenen Verfahren zur Berechnung der zurückgelegten Strecke und **bewerten** Sie die Verfahren.

Feinheit der Zerlegung

Bei der näherungsweisen Berechnung einer Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion und der x-Achse werden häufig Rechtecke verwendet, die ebenfalls zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion liegen.

Das gesamte zu betrachtende Intervall, im Beispiel „ABS – Bremsweg abschätzen“ also $[0;6]$, wird dabei in kleinere Teilintervalle zerlegt (in der ersten Abbildung: $[0;1{,}5]$, $[1{,}5;3]$, $[3;4{,}5]$ und $[4{,}5;6]$), um eine bessere Näherung zu ermitteln. In jedem Teilintervall wird der Flächeninhalt genau eines Rechtecks berechnet.

Die *Feinheit der Zerlegung* entspricht dabei der Länge des größten Teilintervalls der angewendeten Zerlegung.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

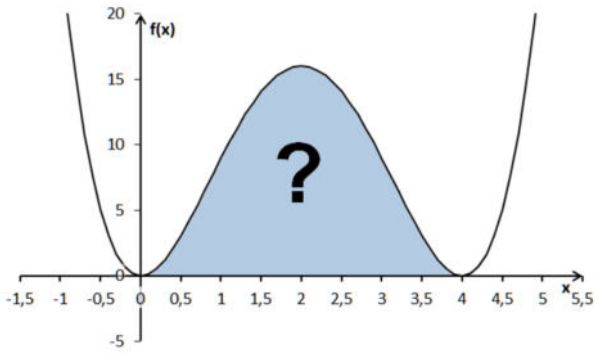
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Von der Näherung zur Berechnung mithilfe der Stammfunktion

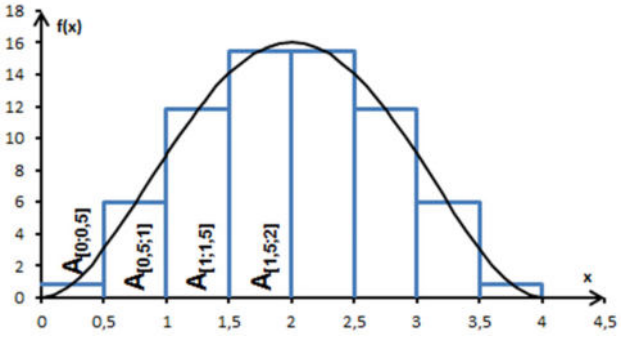
Das Diagramm rechts zeigt den Graphen der Funktion

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2.$$

Gesucht ist der Flächeninhalt, den der Graph mit der x-Achse im Intervall von 0 bis 4 einschließt.



Zur Abschätzung des Flächeninhaltes werden Rechtecke der Breite 0,5 (Längeneinheiten) eingezeichnet, deren Höhe dem Funktionswert in der Mitte des jeweiligen Intervalls entsprechen (Mittelsummen).



Zum Beispiel ist das erste Rechteck
$f(0{,}25) \approx 0{,}879$
und das zweite Rechteck
$f(0{,}75) \approx 5{,}941$ hoch.

Mit der jeweiligen Breite von 0,5 ergibt sich so für den Flächeninhalt des ersten Rechtecks
$A_{[0;0{,}5]} = 0{,}5 \cdot 0{,}879 = 0{,}43945$
und für den Flächeninhalt des zweiten Rechtecks
$A_{[0{,}5;1]} = 0{,}5 \cdot 5{,}9414 = 2{,}9707.$

Für das Intervall von 0 bis 1 ergibt sich der Flächeninhalt als Summe der beiden Rechteckflächen $A_{[0;0{,}5]}$ und $A_{[0{,}5;1]}$, also

$$A_{[0;1]} = A_{[0;0{,}5]} + A_{[0{,}5;1]} = 3{,}410.$$

Auf diese Weise erhalten wir die nebenstehende Tabelle.

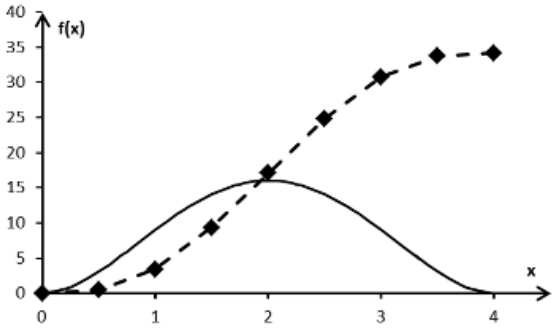
Intervall	Summe der Rechteckflächen
von 0 bis 0,5	0,439
von 0 bis 1	3,410
von 0 bis 1,5	9,318
von 0 bis 2	17,070
von 0 bis 2,5	24,822
von 0 bis 3	30,730
von 0 bis 3,5	33,701
von 0 bis 4	34,141

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

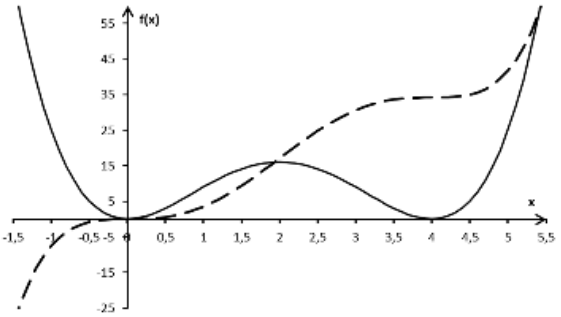
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Wenn wir die Summe der Rechteckflächen unserem Diagramm hinzufügen (◆), ergibt sich das nebenstehende Diagramm.

Die eingetragenen Punkte werden verbunden, da wir mit einer geringeren Breite unserer Rechtecke, also einer größeren Feinheit, beliebige Zwischenwerte erzeugen könnten.



Die zu diesem so erzeugten Graphen zugehörige Funktion, wir nennen sie $F(x)$, muss mindestens fünften Grades sein, da sie zwei Sattelpunkte an den Stellen 0 und 4 sowie einen weiteren Wendepunkt besitzt.



Die Wertepaare liegen auf dem Graphen der Funktion:

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{16}{3}x^3$$

Diese Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* zu $f(x)$.

Der Graph der Funktion $F(x)$ ist gestrichelt eingezeichnet.

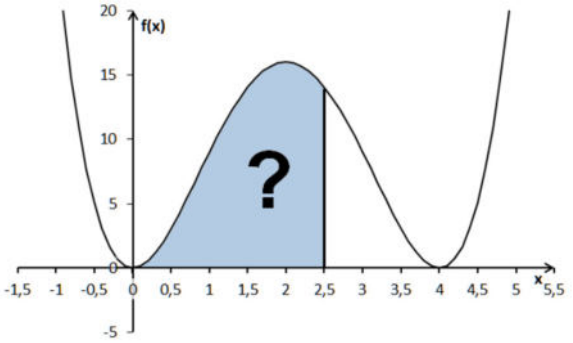
Das bedeutet, dass sich für den Graphen der Funktion $f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$ die Fläche unter dem Graphen mithilfe der Funktion $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{16}{3}x^3$ berechnen lässt.

Die Fläche im Intervall von 0 bis 4 berechnet sich mit: $F(4) = \frac{1}{5} \cdot 4^5 - \frac{8}{4} \cdot 4^4 + \frac{16}{3} \cdot 4^3 = 34{,}133.$

Die zuvor ermittelte Abschätzung mit dem Wert 34,141 liegt also nahe an dem realen Wert!

Mithilfe der Funktion $F(x)$ kann nun auch für andere Intervalle, zum Beispiel das Intervall von 0 bis 2,5, die Fläche zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ berechnet werden:

$F(2{,}5) = \frac{1}{5} \cdot 2{,}5^5 - \frac{8}{4} \cdot 2{,}5^4 + \frac{16}{3} \cdot 2{,}5^3 = 24{,}740$



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Stammfunktion

Zwischen der Funktion $f(x)$ und der Funktion $F(x)$ besteht ein Zusammenhang.

$$f(x) = x^4 - 8x^3 + 16x^2$$
$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{16}{3}x^3$$

Wie man sieht, ist $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$.

Allgemein gilt: Um zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ die Funktion $F(x)$, mit deren Hilfe man die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse berechnen kann, zu bestimmen, muss man das Gegenteil des Ableitens durchführen, man könnte es als "Aufleiten" ansehen.

$F(x)$ wird dabei als *Stammfunktion* von $f(x)$ bezeichnet.

Definition: Stammfunktion

Eine Funktion $F(x)$ heißt *Stammfunktion* zu einer gegebenen Funktion $f(x)$, wenn $f(x)$ die Ableitung von $F(x)$ ist:

$$F'(x) = f(x)$$

MathBox

Im Englischen wird der Zusammenhang zwischen der Ableitung und der Stammfunktion noch deutlicher:

Ableitung.....derivative

Stammfunktion.....antiderivative

(2) Aufgabe: Bestimmen einer Stammfunktion

Ergänzen Sie die folgende Tabelle, indem Sie die Funktionen $f(x)$ beziehungsweise die Stammfunktionen $F(x)$ bestimmen.

	Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)		Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
	$x^4 - 8x^3 + 16x^2$	$\frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{4}x^4 + \frac{16}{3}x^3$	g)		$x^3 + 4x^4$
a)		x^3	h)	42	
b)		x^6	i)	$9x^2 - 6x^5$	
c)	$4x^3$		j)	x^3	
d)		$3x^2$	k)	$10x^4 + x^2$	
e)		$7x$	l)	$x^5 + 17$	
f)	$10x^4$		m)	$a \cdot x^b$	

Formulieren Sie eine allgemeine Regel zur Bildung von Stammfunktionen von ganzrationalen Funktionen. *Hinweis:* Hilfreiche Fachbegriffe sind Exponent und Koeffizient.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Bilden der Stammfunktion

Um die Stammfunktion einer ganzrationalen Funktion zu bestimmen, werden die einzelnen Summanden getrennt betrachtet. Für jeden Summanden wird der Exponent um Eins erhöht und der zugehörige Koeffizient wird durch den neuen Exponenten dividiert.

Zu der Funktion $f(x) = a \cdot x^b$ ist $F(x) = \frac{a}{b+1} \cdot x^{b+1}$ eine Stammfunktion.

CASten

Stammfunktion bilden

Casio ClassPad II: Menüpunkt Aktion → Berechnungen → ∫ → Eingabe: ∫(*Term*,*Variable*)

Geogebra: Eingabe des aufzuleitenden Terms → Menüpunkt $\int$ wählen

TI-Nspire CAS: integral(*Term*,*Variable*) oder [menu] → Analysis → Integral

(3) Übungsaufgaben: Bilden von Stammfunktionen

Bestimmen Sie zu den folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion und überprüfen Sie Ihr Ergebnis nach Möglichkeit mit einem CAS.

a) $f(x) = 3x^3 + x^2$

b) $f(x) = \mathrm{x}^6 + 6x^5$

c) $f(x) = -5x^2 + x^3 + \frac{1}{2}x$

d) $f(x) = 2x^5 - 3x^2$

e) $f(x) = x + 3$

f) $f(x) = -x^4 + 2x^2 - 9$

g) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil d) lautet:
$F(x) = 10x^6 - 6x^3$.
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

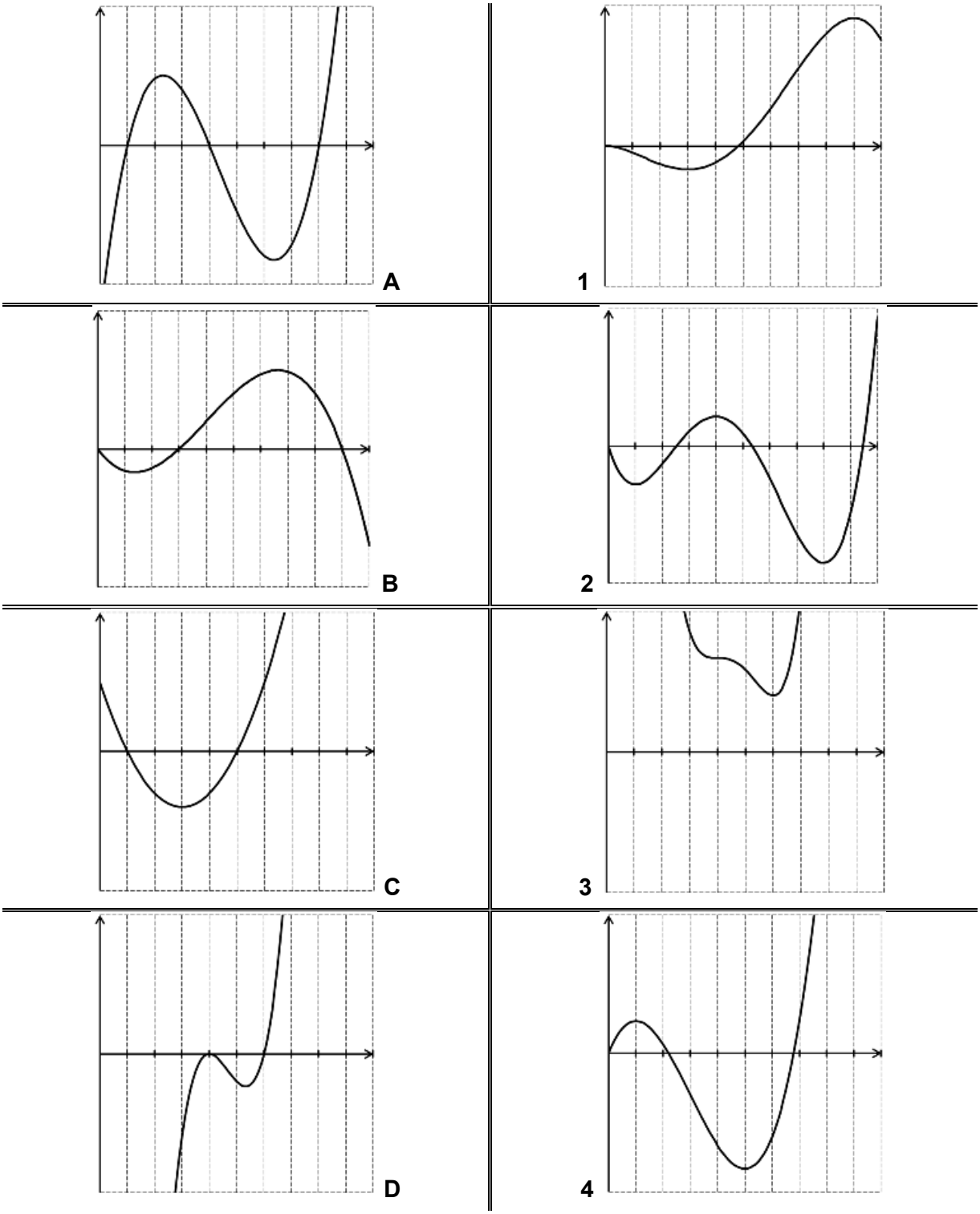
h) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil f) lautet:
$F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3$.
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Aufgabe: Stammfunktionen grafisch zuordnen

Ordnen Sie den Funktionsgraphen A bis D die zugehörigen Graphen der Stammfunktionen 1 bis 4 zu. **Begründen** Sie Ihre Entscheidungen.

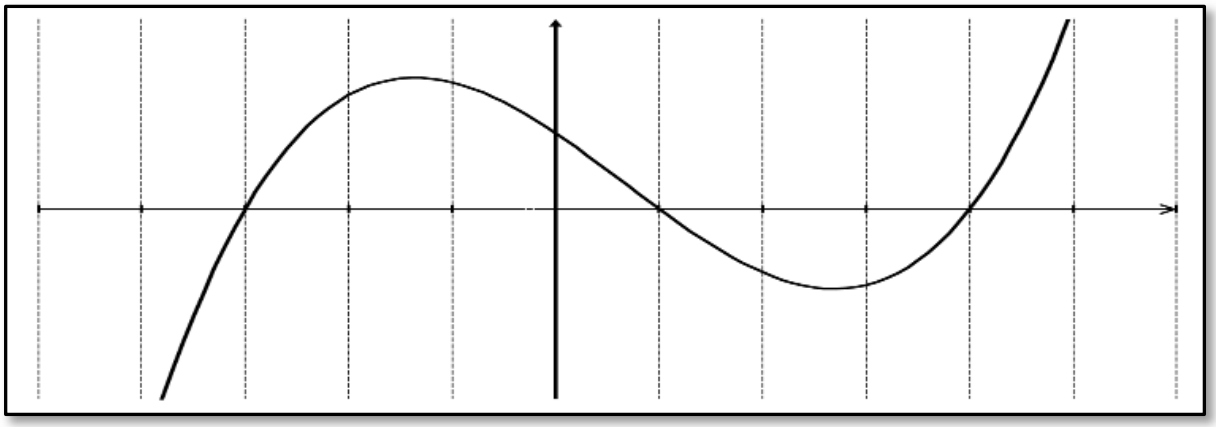


Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

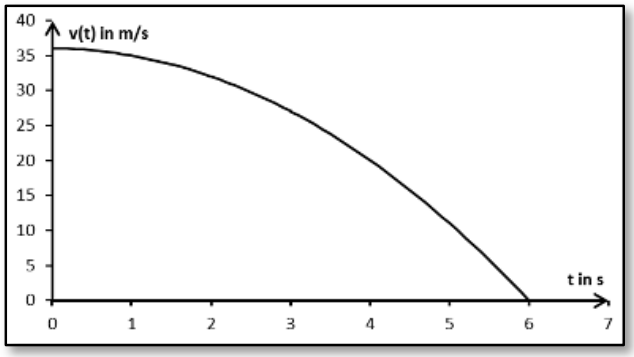
(5) Aufgabe: Stammfunktion skizzieren

Skizzieren Sie den Graphen einer zugehörigen Stammfunktion. *Hinweis:* Orientieren Sie sich an der Information zum Zusammenhang zwischen markanten Punkten einer Funktion und ihrer Ableitungen (Seite 30).



(6) Aufgabe: ABS - Bremsweg berechnen

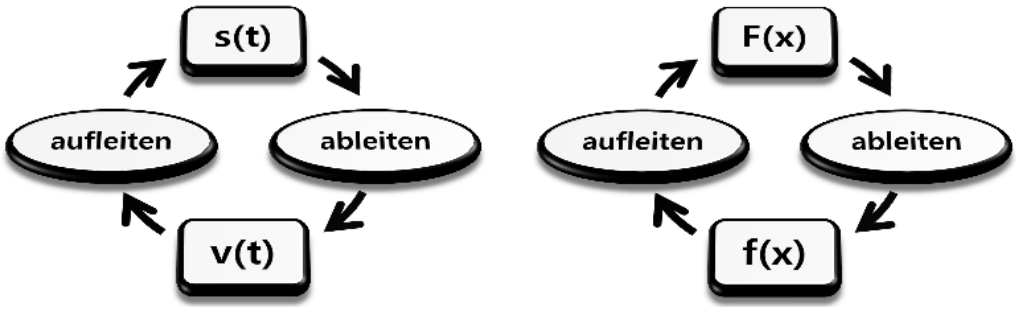
Wir betrachten noch einmal den Test eines Antiblockiersystems (ABS) vom Anfang dieses Abschnittes. Für den Bremsvorgang, zwischen Aktivierung des ABS bei $t_1 = 0s$ und dem Stillstand bei $t_2 = 6s$, kann die Geschwindigkeit mit der Funktion $v(t) = -t^2 + 36$ (mit t in Sekunden $[s]$, $v(t)$ in Metern pro Sekunde $\left[\frac{m}{s}\right]$) beschrieben werden.



Berechnen Sie den Bremsweg.

Von der Geschwindigkeit zum Weg

In der Differenzialrechnung haben Sie gelernt, dass die Zeit-Geschwindigkeit-Funktion $v(t)$ die Ableitung der Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ ist. Damit ist nun auch klar, dass die Zeit-Weg-Funktion $s(t)$ die Stammfunktion der Zeit-Geschwindigkeit-Funktion $v(t)$ ist.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Genau hingeschaut: Eindeutigkeit der Stammfunktion

Wenn $F(x)$ eine beliebige Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist, so sind alle Stammfunktionen von $f(x)$ gegeben durch $F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

$F(x) = x^4$ ist eine Stammfunktion zu $f(x) = 4 \cdot x^3$, da $F'(x) = f(x)$ ist.

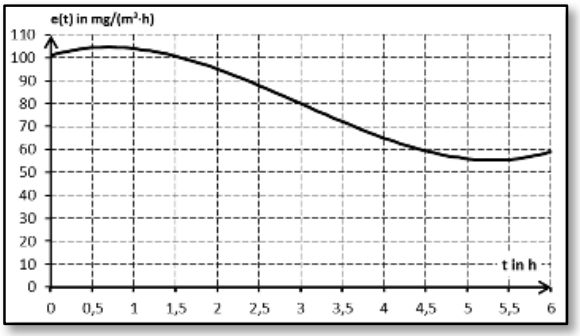
$G(x) = x^4 + 2$ ist aber auch eine Stammfunktion zu $f(x)$.

Der Term $F(x) = x^4 + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ beschreibt also alle Stammfunktionen zu $f(x)$.

Integralrechnung - Auf dem Weg zum Hauptsatz

(1) Aufgabe: Schadstoffausstoß

In einer Müllverwertungsanlage wird kontinuierlich der Schadstoffausstoß an den Schornsteinen gemessen. Einer der hier überwachten Schadstoffe ist Schwefeldioxid (SO_2), da dieses der Hauptgrund für die Bildung von saurem Regen und damit für das Waldsterben ist.



Für die Schadstoffemissionen (jeweils auf eine Stunde bezogen) gelten hier die folgenden Richtwerte:

- Der stündliche Emissionswert gibt für jede volle Stunde die emittierte Schadstoffmenge an und darf einen Wert von 100 Milligramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}\right]$ nicht überschreiten.
- Der 6-Stunden-Mittelwert darf einen Wert von 80 Milligramm pro Kubikmeter pro Stunde $\left[\frac{\text{mg}}{\text{m}^3 \cdot \text{h}}\right]$ nicht überschreiten.

Das Diagramm zeigt für sechs Stunden (t-Achse in Stunden) die Emission von Schwefeldioxid in der Einheit Milligramm pro Kubikmeter und Stunde $\left[\frac{\text{mg}}{\text{m}^3 \cdot \text{h}}\right]$.

Dieser Emissionsverlauf lässt sich in den ersten sechs Stunden mit der folgenden Funktion beschreiben:

$$e(t) = t^3 - 9t^2 + 11t + 101$$

mit t in h und $e(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{m}^3 \cdot \text{h}}$

a) **Überprüfen** Sie, ob der Grenzwert in der ersten Stunde überschritten wird.

b) **Berechnen** Sie den gesamten Schadstoffausstoß in den ersten zwei Stunden.

c) **Überprüfen** Sie mithilfe Ihrer vorherigen Ergebnisse, ob der Grenzwert in der zweiten Stunde überschritten wird.

d) **Berechnen** Sie analog auch für die folgenden ganzen Stunden die stündlichen Emissionswerte.

e) **Überprüfen** Sie mithilfe Ihrer Ergebnisse, ob der 6-Stunden-Mittelwert eingehalten wird.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

Ist die Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x-Achse in einem Intervall von a bis b gesucht, so schreibt man $\int_a^b f(x)dx$. Diesen Ausdruck liest man als "das Integral von a bis b der Funktion $f(x)\ dx$".

Das "dx" am Ende des Ausdrucks gehört zur formalen Schreibweise, dabei gibt x die betrachtete Variable an. Ist die Funktion $f(t)$, so ist t die betrachtete Variable und es muss dementsprechend "dt" heißen.

Das Integral einer Funktion $f(x)$ lässt sich mit Hilfe einer Stammfunktion $F(x)$ berechnen:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Der Hauptsatz stellt somit sozusagen die Rechenvorschrift zur Berechnung eines Integrals im Intervall von a bis b dar.

Wendet man den Hauptsatz beispielsweise auf die Aufgabe "Schadstoffausstoß" (Seite 52) an, so erhält man folgende Lösung:

a) $\int_0^1 t^3 - 9t^2 + 11t + 101\,dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 5{,}5t^2 + 101t\right]_0^1$

$= \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - 3\cdot 1^3 + 5{,}5\cdot 1^2 + 101\cdot 1\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^3 + 5{,}5\cdot 0^2 + 101\cdot 0\right)$

$= 103{,}75$

b) $\int_0^2 t^3 - 9t^2 + 11t + 101\,dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 5{,}5t^2 + 101t\right]_0^2$

$= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 3\cdot 2^3 + 5{,}5\cdot 2^2 + 101\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 0^4 - 3\cdot 0^3 + 5{,}5\cdot 0^2 + 101\cdot 0\right)$

$= 204$

c) $\int_1^2 t^3 - 9t^2 + 11t + 101\,dt$

$= \left[\frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 5{,}5t^2 + 101t\right]_1^2$

$= \left(\frac{1}{4}\cdot 2^4 - 3\cdot 2^3 + 5{,}5\cdot 2^2 + 101\cdot 2\right) - \left(\frac{1}{4}\cdot 1^4 - 3\cdot 1^3 + 5{,}5\cdot 1^2 + 101\cdot 1\right)$

$= 204 - 103{,}75 = 100{,}25$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Um den Mittelwert über sechs Stunden zu berechnen, muss der gesamte Ausstoß in den sechs Stunden durch die Anzahl der Stunden dividiert werden:

e) $\frac{1}{6} \cdot \int_0^6 t^3 - 9t^2 + 11t + 101\, dt$

$= \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 5{,}5t^2 + 101t\right]_0^6$

$= \frac{1}{6} \cdot \left(\left(\frac{1}{4} \cdot 6^4 - 3 \cdot 6^3 + 5{,}5 \cdot 6^2 + 101 \cdot 6\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot 0^4 - 3 \cdot 0^3 + 5{,}5 \cdot 0^2 + 101 \cdot 0\right)\right)$

$= \frac{1}{6} \cdot 480 = 80$



Genau hingeschaut: Integralzeichen ∫ und dx

Der Gebrauch des Integralzeichens ∫ geht auf den deutschen Mathematiker Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 - 1716) zurück. Es erinnert an ein langes s, was wiederum für Summe steht, da beim Integrieren unendlich viele (und unendlich schmale) Rechtecke summiert werden.

Das „dx“, das sogenannte *Differential*, am Ende des Integrals ist nur noch eine rein formale Darstellung, an der man ablesen kann, nach welcher Variable integriert wird.

Den mathematischen Ursprung hat das „dx“ im Δx (Δ griechisch: *Delta*). Mit Δ werden in der Mathematik häufig Differenzen bezeichnet ($x_2 - x_1 = \Delta x$).

In diesem Fall ist die Breite jedes der die Fläche unterteilenden Rechtecke die Differenz aus dem x-Wert des rechten und des linken Rechteckrandes.

Durchschnittliche Änderungsrate

Ist eine Funktion gegeben, die eine Änderungsrate angibt (beispielsweise Geschwindigkeiten, Durchflussraten etc.), so kann die mittlere/durchschnittliche Änderungsrate in einem Intervall $[a; b]$ mithilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

Integral berechnen

Casio ClassPad II: Keyboard → Math2 → CALC →  → Eingabe der Grenzen, der Funktion und der Variable (dx, dt etc.)

Geogebra: Integral[*Funktion*, *untere Grenze*,*obere Grenze*]
oder Funktion eingeben → 

TI-Nspire CAS: integral(*Term*,*Variable*,*untere Grenze*,*obere Grenze*)
oder [menu] → Analysis → Integral

(2) Übungsaufgaben: Wert von Integralen berechnen

Berechnen Sie die folgenden Integrale per Hand und überprüfen Sie die Ergebnisse mit einem CAS.

a) $\int_1^2 4x^3 + 6x\,dx$

b) $\int_{-2}^4 2x + 8\,dx$

c) $\int_{-4}^{-2} 3x^2 + x + 5\,dx$

d) $\int_2^5 -x^2 + 10\,dx$

e) VERDACH?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil d) lautet:

$$\int_2^5 -x^2 + 10\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + 10x\right]_5^2 = -\frac{1}{2}\cdot 5^3 + 10\cdot 5 - -\frac{1}{2}\cdot 2^3 + 10\cdot 2 = 11{,}5$$

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie die Fehler.

Begründen Sie, warum der Wert der folgenden Integrale Null ist (weisen Sie dies zur Übung auch rechnerisch nach).

f) $\int_{-1}^1 x^5\,dx$

g) $\int_{-2}^2 x^3 - 4x\,dx$

h) $\int_{-13}^{13} x^{13}\,dx$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Genau hingeschaut: Rechenregeln für Integrale

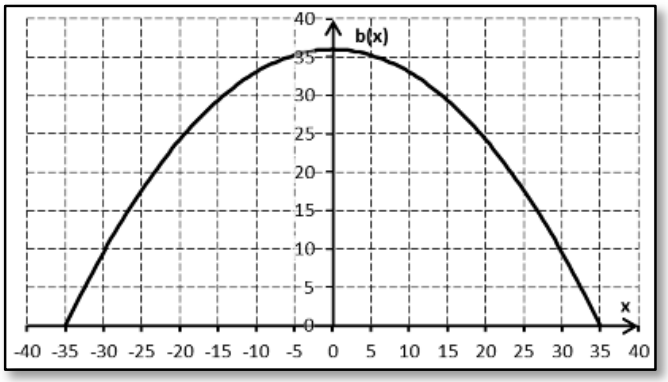
Rechenregel	Beispiel
Vertauschung der Integralgrenzen $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$	$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$ $\int_3^1 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_3^1 = \frac{1}{3}1^3 - \frac{1}{3}3^3 = \frac{1}{3} - 9 = -8\frac{2}{3}$
Summenregel für Intervalle $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$	$\int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 = \frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3 = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$
	$\int_1^2 x^2 dx + \int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^2 + \left[\frac{1}{3}x^3\right]_2^3 =$ $\left(\frac{1}{3}2^3 - \frac{1}{3}1^3\right) + \left(\frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}2^3\right) =$ $\left(2\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) + \left(9 - 2\frac{2}{3}\right) = 2\frac{1}{3} + 6\frac{1}{3} = 8\frac{2}{3}$
Faktorregel für Integrale $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$	$\int_1^3 2 \cdot (x^2 + 2x)dx = \int_1^3 2x^2 + 4x\,dx =$ $\left[\frac{2}{3}x^3 + 2x^2\right]_1^3 =$ $\left(\frac{2}{3} \cdot 3^3 + 2 \cdot 3^2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2\right) =$ $36 - 2\frac{2}{3} = 33\frac{1}{3}$
	$2 \cdot \int_1^3 x^2 + 2x\,dx = 2 \cdot \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^3 =$ $2 \cdot \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2\right)\right) =$ $2 \cdot \left(18 - 1\frac{1}{3}\right) = 2 \cdot 16\frac{2}{3} = 33\frac{1}{3}$
Summenregel für Integrale $\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx =$ $\int_a^b (f(x) + g(x))dx$	$\int_1^3 x^2 dx + \int_1^3 (x^2 + 2x)dx =$ $\left[\frac{1}{3}x^3\right]_1^3 + \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2\right]_1^3 =$ $\left(\frac{1}{3}3^3 - \frac{1}{3}1^3\right) + \left(\left(\frac{1}{3} \cdot 3^3 + 3^2\right) - \left(\frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2\right)\right) =$ $\left(9 - \frac{1}{3}\right) + \left(18 - 1\frac{1}{3}\right) = 8\frac{2}{3} + 16\frac{2}{3} = 25\frac{1}{3}$
	$\int_1^3 (x^2) + (x^2 + 2x)\,dx = \int_1^3 2x^2 + 2x\,dx =$ $\left[\frac{2}{3}x^3 + x^2\right]_1^3 = \left(\frac{2}{3}3^3 + 3^2\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot 1 + 1^2\right) =$ $27 - 1\frac{2}{3} = 25\frac{1}{3}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Aufgabe: Berliner Bogen





Am U- und S-Bahnhof Berliner Tor in Hamburg befindet sich das von den Architekten Bothe, Richter und Teherani entworfene Bürogebäude Berliner Bogen. Besonders auffällig ist das bogenförmige Glasdach, das durch eine nach unten geöffnete Parabel gebildet wird. Dieses hat eine Höhe von 36 Metern und ist am Boden 70 Meter breit. Die räumliche Tiefe des Gebäudes beträgt 140 Meter.

a) **Zeigen** Sie durch eine Rechnung, dass sich die Parabel mit der Funktion $b(x) = -\frac{36}{1225}x^2 + 36$ (mit x in Metern [m] und $b(x)$ in Metern [m]) beschreiben lässt.

b) **Berechnen** Sie den gesamten umbauten Rauminhalt.

c) CAS **Berechnen** Sie die Größe der Dachfläche des Berliner Bogens.
Hinweis: Beachten Sie hierzu die folgende Information zur Bogenlänge.

Bogenlänge

Bei dem zuvor betrachteten Berliner Bogen interessiert uns die Dachfläche des Gebäudes. Um diese zu berechnen, muss zunächst die Länge des durch $b(x)$ beschriebenen Bogens ermittelt werden.

Allgemein berechnet man die Bogenlänge l einer Funktion $f(x)$ auf dem Intervall [a;b] mit der folgenden Formel:

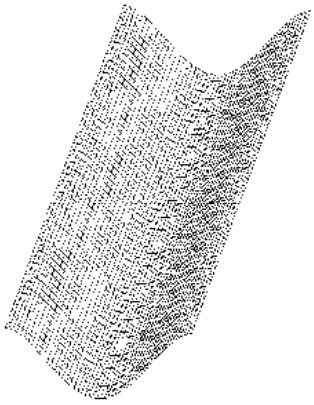
$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx$$

CAS Dieses Integral kann nur numerisch mit einem Computer-Algebra-System bestimmt werden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Aufgabe: Wasserrutschbahn



Ein Freizeitanlagenhersteller konstruiert für Freibäder neue Elemente für Wasserrutschbahnen, die in einem Baukastensystem miteinander kombiniert werden können.

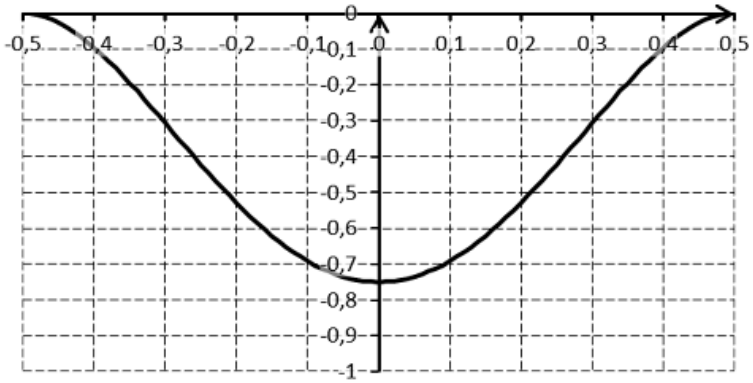
Die geraden Elemente haben jeweils eine Länge von 2 Metern [m] und ihr Querschnitt lässt sich mit der folgenden Funktion beschreiben:

$$q(x) = -12x^4 + 6x^2 - 0{,}75$$

mit $-0{,}5 \leq x \leq 0{,}5$ in m und $q(x)$ in m

Dabei haben die Randpunkte der Rutsche im Querschnitt die Koordinaten $(-0{,}5 \mid 0)$ und $(0{,}5 \mid 0)$.

Die maximal mögliche Belastung soll durch ein randvolles Befüllen des Elementes simuliert werden.



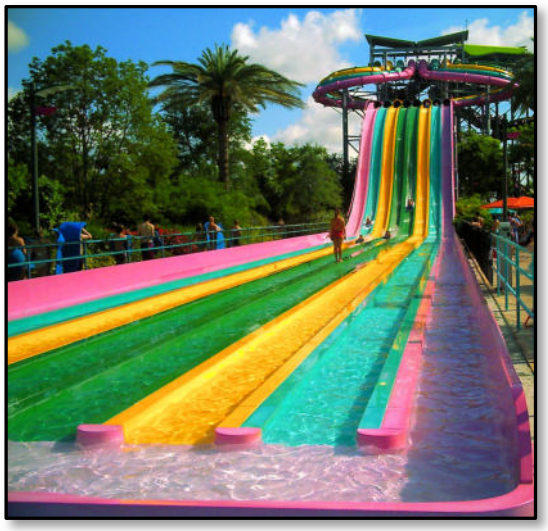
Alle Angaben in Metern

a) **Berechnen** Sie die maximal mögliche Masse des Wassers in dem geraden Streckenelement und vergleichen Sie diese mit der Masse eines typischen Badegastes (80 kg).

b) **Begründen** Sie, warum das Ergebnis Ihrer Rechnung (eigentlich) negativ ist.

CAS Die Oberfläche der Innenseite jedes Elements der Rutsche soll mit einer Kunststofffolie überzogen werden.

c) **Berechnen** Sie die dazu benötigte Foliengröße.



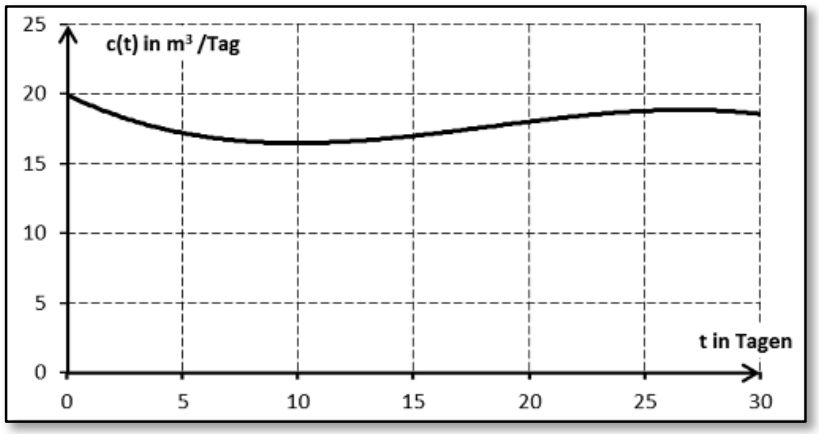
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Cosinus°Cola

Die Getränkefirma πψ-Cola stellt Cosinus°Cola her und füllt sie in einer firmeneigenen Flaschenabfüllanlage in 1-Liter-Flaschen ab.

An der Abfüllanlage wird kontinuierlich die Abfüllrate, also die Cosinus°Cola-Menge in Kubikmetern pro Tag $\left[\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Tag}}\right]$, protokolliert.



Durch produktionsbedingte Schwankungen verändert sich die Abfüllmenge ständig ein wenig. Die folgende Funktionsgleichung beschreibt modellhaft die Abfüllrate $c(t)$ im April:

$$c(t) = -0{,}001 \cdot t^3 + 0{,}055 \cdot t^2 - 0{,}796 \cdot t + 19{,}92$$

mit t in Tagen, $c(t)$ in $\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{Tag}}$

a) **Geben** Sie anhand des Graphen eine Abschätzung für die Menge an Cosinus°Cola **an**, die im April abgefüllt wurde. **Erklären** Sie kurz Ihr Vorgehen.

b) **Berechnen** Sie die Menge an Cosinus°Cola, die im April (30 Tage) abgefüllt wurde.

Geben Sie auch die Anzahl der befüllten Flaschen an.

Hinweis: Der erste Tag des Monates beginnt bei $t = 0$.

c) VERDACH?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil b) lautet.

Einsetzen von 30 in $c(t)$ ergibt $c(30) = 18{,}54\ \mathrm{m}^3$ Cosinus°Cola, die im April abgefüllt wurden. Das entspricht 18 540 Flaschen.

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

d) **Bestimmen** Sie die Menge an Cosinus°Cola, die in der zweiten April-Woche abgefüllt wurde.

e) **Bestimmen** Sie die durchschnittliche Menge an Cosinus°Cola, die in der ersten April-Woche pro Tag abgefüllt wurde.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

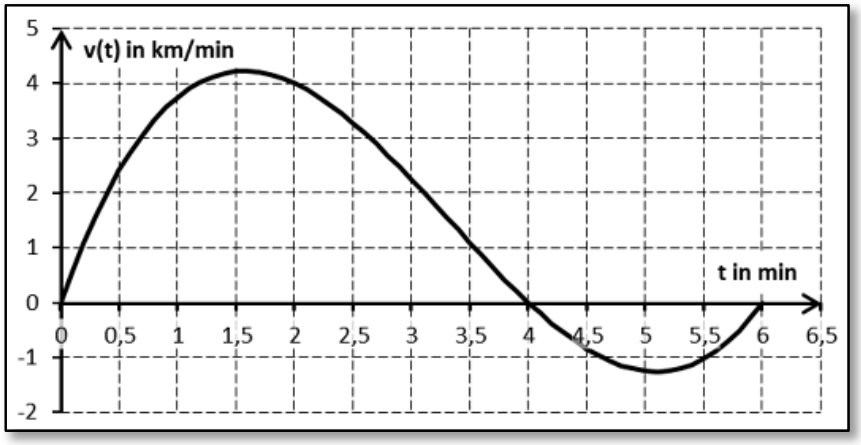
Anwendungen der Integralrechnung

(1) Aufgabe: Magnetschwebebahn

Für den fiktiven Nachfolger der Magnetschwebebahn Transrapid wurde eine 12 Kilometer lange, geradlinig verlaufende Teststrecke gebaut. An einem Ende der Strecke befinden sich ein Forschungszentrum und die Werkshallen.

In einem Belastungstest soll ein experimentelles, unbemanntes Fahrzeug seine Fähigkeit zum schnellen Richtungswechsel unter Beweis stellen.

Die Messinstrumente an Bord zeichnen ein $v(t)$-Diagramm der Fahrt auf (t in Minuten $[\text{min}]$, $v(t)$ in Kilometern pro Minute $[\frac{\text{km}}{\text{min}}]$).



a) **Beschreiben** Sie die Fahrt der Bahn. **Geben** Sie dabei auch **an**, wann die Bahn die Fahrtrichtung wechselt sowie die ungefähren Höchstgeschwindigkeiten auf dem Hin- und dem Rückweg. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind. *Hinweis:* Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

Der Graph lässt sich durch die folgende Funktion beschreiben.

$$v(t) = 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t$$

mit t in min und $v(t)$ in $\frac{\text{km}}{\text{min}}$

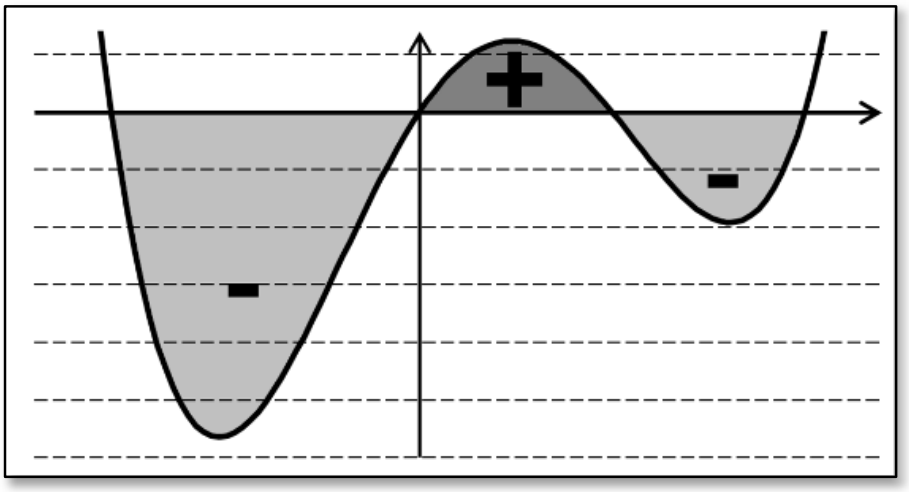
b) **Berechnen** Sie die Entfernung zwischen dem Startpunkt und dem Umkehrpunkt.
c) **Berechnen** Sie die von der Bahn insgesamt zurückgelegte Strecke.
d) **Berechnen** Sie, wie weit die Bahn nach 3 Minuten und nach 5 Minuten von dem Startpunkt entfernt ist.
e) **Berechnen** Sie, wie viele Kilometer die Bahn nach 5 Minuten insgesamt gefahren ist.
f) **Berechnen** Sie das Integral $\int_0^5 v(t)\,dt$ und **interpretieren** Sie das Ergebnis im Sachkontext.
g) *Wiederholung:* **Bestimmen** Sie rechnerisch die Höchstgeschwindigkeiten auf dem Hin- und Rückweg der Fahrt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Orientierte Flächeninhalte - positive und negative Flächen

In der Mathematik spricht man von *orientierten Flächeninhalten.*
In der untenstehenden Abbildung ist dieser Sachverhalt dargestellt:



Es ergeben sich mehrere Flächen, die zwischen der x-Achse und dem Graphen der Funktion $f(x)$ eingeschlossen werden.

In den Bereichen, in denen $f(x)$ unterhalb der x-Achse verläuft, ergeben sich negative Flächeninhalte.

In den Bereichen, in denen $f(x)$ oberhalb der x-Achse verläuft, ergeben sich positive Flächeninhalte.

An der Aufgabe „Magnetschwebebahn“ kann man sehen, dass die positiven und negativen Flächeninhalte im Sachkontext unterschiedliche Bedeutungen haben. Die positive Fläche stellt den Hinweg und die negative Fläche den Rückweg dar.

Je nach Fragestellung muss nun mit den orientierten Flächeninhalten verschieden verfahren werden:

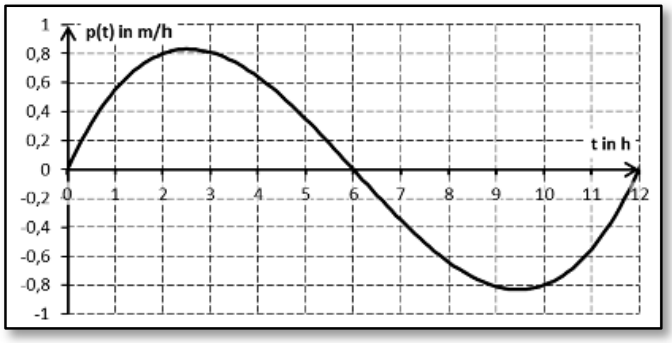
- Wenn danach gefragt wird, wie weit die Bahn nach 6 Minuten vom Startpunkt entfernt ist, muss vom Hinweg der Rückweg subtrahiert werden.
  Das Integral $\int_0^6 v(t)\,dt$ berücksichtigt den negativen Flächeninhalt und subtrahiert diese von dem positiven Flächeninhalt.
- Wenn danach gefragt wird, wie lang der insgesamt zurückgelegte Weg ist, dann müssen die Strecke des Hinweges und die des Rückweges addiert werden.
  Das Integral der Betragsfunktion $\int_0^6 |v(t)|\,dt$ sieht alle Flächeninhalte als positiv an und addiert diese.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Die Pegelstände der Elbe in Cuxhaven (vereinfachtes Modell)

In Cuxhaven wird zu Forschungszwecken die Veränderung des Pegelstands der Elbe beobachtet. Dazu wird über einen Zeitraum von 12 Stunden die Veränderung des Pegelstands gemessen, indem stündlich notiert wird, um wie viele Meter der Wasserstand zu- oder abgenommen hat.



Zu Beginn der Beobachtung betrug der Pegelstand des Niedrigwassers 3,50 m. Die folgende Funktion $p(t)$ beschreibt das Ansteigen und Abfallen des Wasserpegels im Zeitraum von 0:00 bis 12:00 Uhr in Höhenmeter pro Stunde $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}\right]$:

$$p(t) = \frac{1}{100}t^3 - \frac{9}{50}t^2 + \frac{18}{25}t$$

mit t in h und $p(t)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}$

a) **Beschreiben** Sie die Veränderung des Pegelstandes. Benutzen Sie dazu die im Infotext unten angegebenen Fachbegriffe. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.
Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

b) **Berechnen** Sie den Pegelstand zum Zeitpunkt des Hochwassers sowie nach 8 Stunden.

c) **Bestimmen** Sie, zu welchen Zeitpunkten mit einem Pegelstand von 4,50 Metern zu rechnen ist.

d) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil a) lautet:
„Um 0 Uhr beginnt das Wasser zu steigen. Um ca. halb drei ist der Pegelstand dann am höchsten, da ist also Hochwasser, dann beginnt er zu sinken. Um sechs Uhr ist der Pegelstand dann bei 0 Metern im Vergleich zum Anfang und dann sinkt der Pegelstand aber noch weiter, bis er um circa halb zehn am geringsten ist und dann wieder steigt.“
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Informationen zu den Gezeiten

Den Zeitpunkt des höchsten Wasserstandes bezeichnet man mit **Hochwasser**, den des tiefsten Wasserstandes mit **Niedrigwasser**. Der Wasserstand zu diesen Zeiten wird **Hochwasserhöhe** bzw. **Niedrigwasserhöhe** genannt. Diese beziehen sich immer auf den normalen Meereswasserspiegel, sie sagen also nicht aus, wie tief die Elbe ist. Die **Flut** ist der Zeitraum und der Vorgang ansteigenden Wassers (die Zeit zwischen Niedrigwasser und Hochwasser). Die **Ebbe** ist der Zeitraum und der Vorgang sinkenden Wassers (die Zeit zwischen Hochwasser und Niedrigwasser).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Lösen von Integralgleichungen

Ist der Wert eines Integrals gegeben und eine der Grenzen des Integrals gesucht, so kann eine Integralgleichung aufgestellt werden, die wie jede andere Gleichung auch gelöst werden kann.

Dies wird beispielsweise in Aufgabe c) zu den Pegelständen der Elbe (Seite 62) gefragt.

An einem einfacheren Beispiel wird die Rechnung hier gezeigt:

$$\int_0^x 3t^2\,dt = 27$$

Zunächst wird das Integral vereinfacht:

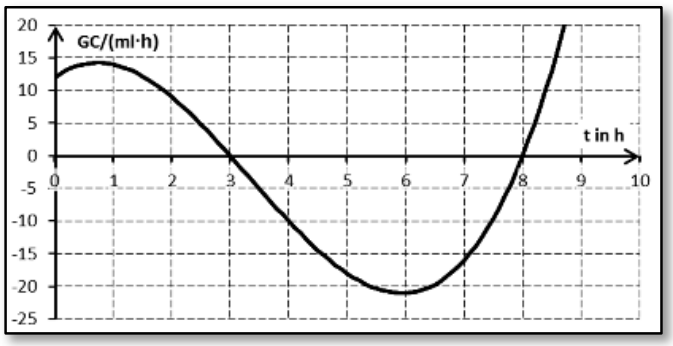
$$\int_0^x 3t^2\,dt = [t^3]_0^x = (x^3) - (0^3) = x^3$$

Die vereinfachte Gleichung lautet nun:

$$x^3 = 27$$
$$x = 3$$

(3) Aufgabe: Schwimmbad

Im Sommer haben viele Schwimmbäder Probleme mit Bakterien im Badewasser, die sich sehr schnell vermehren. Die Bakterienbelastung wird in Schwimmbädern durch die Angabe der Anzahl der Gesamtcoliformen Bakterien [GC] in einem Milliliter angegeben. In der Badegewässerverordnung wird ein Grenzwert von 100 Gesamtcoliforme Bakterien pro Milliliter $\left[\frac{\text{GC}}{\text{ml}}\right]$ festgelegt,



der nicht überschritten werden sollte. Ein Messgerät hält kontinuierlich die Bakterienzunahme und -abnahme graphisch fest.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird im Wasser eine Konzentration von 85 $\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ festgestellt und der Bademeister beauftragt einen Angestellten, Gegenmaßnahmen zu ergreifen und ein Reinigungsmittel zur Reduzierung der Bakterienanzahl aus dem Lager zu holen und einzusetzen.

Die Bakterienzunahme und -abnahme wird in den folgenden acht Stunden durch die folgende Funktion näherungsweise beschrieben:

$$f(t) = 0{,}5t^3 - 5t^2 + 6{,}5t + 12$$

mit t in h und $f(t)$ in $\frac{\text{GC}}{\text{ml·h}}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Begründen** Sie anhand des Graphen, dass nach circa 45 Minuten die Bakterienbehandlung begonnen wurde.

b) **Beschreiben** Sie die Bakterienentwicklung nach der Zugabe des Reinigungsmittels. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.
Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

c) **Bestätigen** Sie rechnerisch, dass der Grenzwert vor der Zugabe des Reinigungsmittels nicht erreicht wurde.

d) Ein Mitglied der Geschäftsleitung behauptet später, dass der Grenzwert nie überschritten worden sei. **Nehmen** Sie zu dieser Aussage Stellung.

e) Nach 8 Stunden hat der Graph eine weitere Nullstelle. **Beschreiben** Sie die Bedeutung dieser Nullstelle im Sachkontext. **Berechnen** Sie die Bakterienkonzentration zu diesem Zeitpunkt.

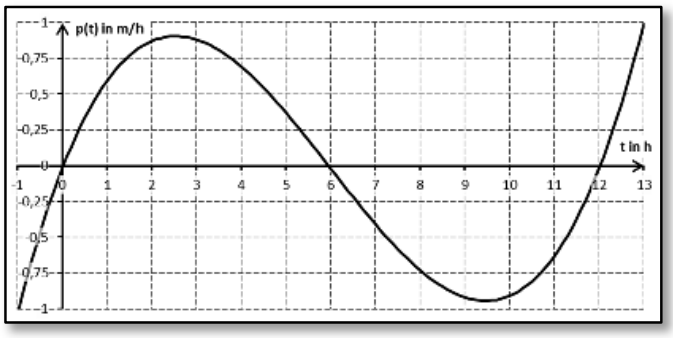
f) **Begründen** Sie, warum diese Funktion das Bakterienwachstum über die achte Stunde hinaus nicht sinnvoll beschreibt.

g) **Berechnen** Sie, wie viele Bakterien in den ersten acht Stunden *insgesamt abgebaut* wurden.

h) **Berechnen** Sie, zu welchem Zeitpunkt 30 Bakterien pro Milliliter weniger vorhanden sind als zu Beginn der Messung.

(4) Aufgabe: Wasserpegelstände an den Hamburger Landungsbrücken (Modell 2) CAS

Die Hamburger Landungsbrücken sind zum einen Touristenziel, zum anderen jedoch auch wichtiger Verkehrsknotenpunkt der Schifffahrt. Eine große Rolle spielt dabei auch der Frachtverkehr.



Zurzeit können Schiffe mit Tiefgängen bis 12,5 Metern [m] die Elbe tideunabhängig befahren. Schiffe mit Tiefgängen von maximal 13,5 Metern [m] sind auch zulässig, jedoch können diese lediglich tideabhängig die Elbe befahren und müssen sich somit nach Ebbe und Flut richten.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die folgende Funktion $p(t)$ beschreibt das Ansteigen und Abfallen des Wasserpegels im Zeitraum von 0:00 bis circa 12:00 Uhr in Höhenmeter pro Stunde $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}\right]$. Hierbei wurde beachtet, dass zwischen Hoch- und Niedrigwasser nicht genau 6 Stunden liegen und die Pegelstände bei Niedrigwasser nicht immer gleich hoch sind.

$$p(t) = \frac{1}{90} \cdot t^3 - \frac{1}{5} \cdot t^2 + \frac{4}{5} \cdot t - \frac{1}{50}$$

mit t in h und $p(t)$ in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}$

Der Wasserpegelstand zu Beginn der Beobachtung bei Niedrigwasser beträgt 0,5 m (über Seekartennull).

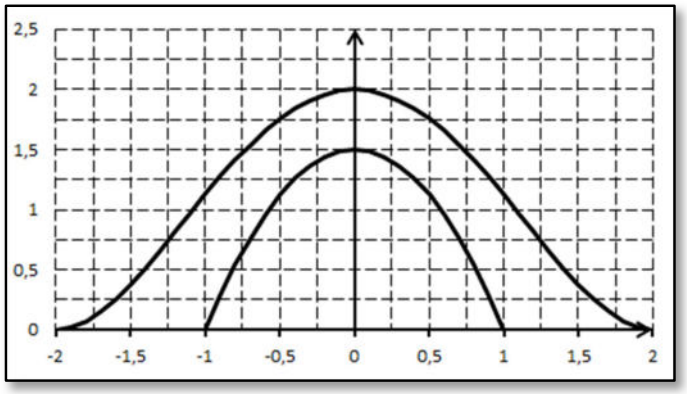
a) **Berechnen** Sie den Pegelstand um 3 Uhr und um 8 Uhr morgens.
b) **Berechnen** Sie die Höhe des nächsten Hochwasserpegels und des nächsten Niedrigwasserpegels.

Schiffe mit einem Tiefgang von 13,5 m brauchen zum Befahren der Elbe mindestens einen Pegelstand von 1,20 m.
c) **Berechnen** Sie das Zeitfenster, in dem diese Schiffe in den betrachteten 12 Stunden die Elbe befahren können.

Integralrechnung - Flächen zwischen zwei Graphen

(1) Aufgabe: Kletterberg auf dem Spielplatz

Auf einem Kinderspielplatz befindet sich ein 2 Meter [m] hoher Kletterberg mit einem Tunnel. Die Zeichnung zeigt die Seitenansicht. Der Umriss des Spielgerätes kann durch zwei Funktionen beschrieben werden:



Oberer Bogen:

$$o(x) = \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2$$

Unterer Bogen:

$$u(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$$

mit x in m und $o(x)$, $u(x)$ in m

Berechnen Sie den Flächeninhalt der abgebildeten Fläche des Berges.

Zusatzaufgabe: Der Kletterberg hat eine Länge von vier Metern [m] und wird aus einem styroporähnlichen Material mit einer Dichte von 1,5 Kilogramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}\right]$ gefertigt. **Berechnen** Sie die Gesamtmasse.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Sandkiste auf dem Spielplatz

Die Sandkiste des Spielplatzes soll aus ästhetischen Gründen nicht die übliche rechteckige, sondern eine geschwungene Form haben. Die Zeichnung zeigt die Draufsicht auf die Sandkiste.

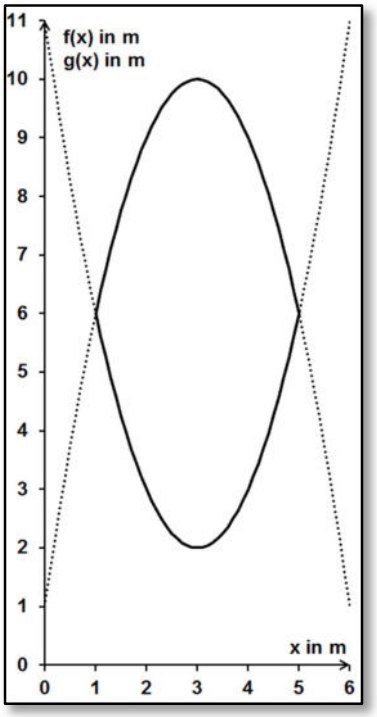
Die neue Form lässt sich durch zwei Funktionen beschreiben:

$$f(x) = -x^2 + 6x + 1$$
$$g(x) = x^2 - 6x + 11$$

mit x in m und $f(x)$, $g(x)$ in m

Die in den Boden eingelassene Form wird 50 cm hoch mit Sand gefüllt.

Berechnen Sie das notwendige Sandvolumen zum Befüllen der Sandkiste.



Flächeninhalt zwischen zwei Graphen

Zur Berechnung des Flächeninhalts zwischen zwei Funktionen auf dem Intervall $[a; b]$ (wie zum Beispiel in der Aufgabe „Sandkiste auf dem Spielplatz“), kann die folgende Formel verwendet werden:

$$\int_a^b f(x) - g(x)dx$$

Dabei ist $f(x)$ die obere Funktion und $g(x)$ die untere Funktion auf dem entsprechenden Intervall. Gegebenenfalls ist das Intervall an den Schnittpunkten der beiden Funktionen in Teilintervalle zu zerlegen.

CAS Mithilfe eines Computer-Algebra-Systems lässt sich dieses Verfahren vereinfachen, indem das folgende Integral berechnet wird:

$$\int_a^b |f(x) - g(x)|dx$$

Hinweis: Dieses Verfahren lässt sich nur anwenden, wenn für beide Funktionen die gleichen Integralgrenzen gelten. Wenn die Integralgrenzen nicht übereinstimmen, müssen die Integrale für beide Funktionen separat berechnet und sinnvoll voneinander subtrahiert werden (wie in der Aufgabe „Kletterberg auf dem Spielplatz“ auf Seite 65).

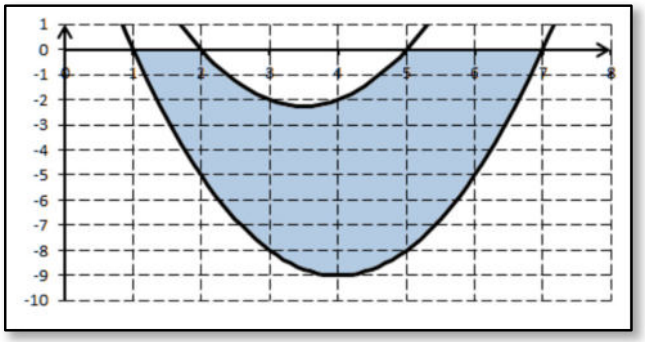
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Übungsaufgaben: Flächen zwischen zwei Funktionen

a) **Berechnen** Sie die eingefärbte Fläche für die beiden Funktionen

$f(x) = x^2 - 8x + 7$ und
$g(x) = x^2 - 7x + 10$.

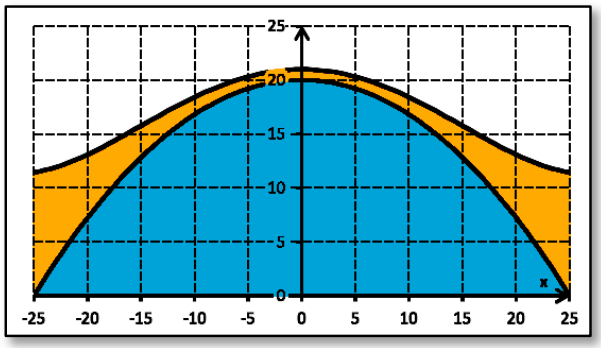


b) **Berechnen** Sie die von den Graphen $f(x) = x^3 - 2x^2 - 8x + 18$ und $g(x) = -1{,}5x^3 + 3x^2 + 12x + 18$ eingeschlossene Fläche.

Skizzieren Sie zunächst den Verlauf der beiden Graphen (eine mögliche Skalierung des Koordinatensystems wäre: $-5 \leq x \leq 5$ und $-10 \leq y \leq 50$).

(4) Aufgabe: Ein Musical in den Hamburger Großmarkthallen





Ein neuer Musical-Standort bereichert nach dem neuen Innenausbau der Hamburger Großmarkthallen das kulturelle Leben in Hamburg. In einer der drei Großmarkthallen wurde eine Bühne installiert, auf der ein Musical mit etwa 2000 Zuschauern pro Aufführung aufgeführt werden kann. Zur Premiere eines neuen Musicals soll die Fassade zweifarbig gestrichen werden (siehe Zeichnung). Das anzustreichende Fassadenstück ist insgesamt 50 Meter [m] breit.

Die Fassade kann vereinfacht durch die folgenden beiden Funktionen modelliert werden:

Oberer Bogen: $f(x) = \frac{1}{50000} \cdot x^4 - \frac{1}{36} \cdot x^2 + 21$

Unterer Bogen: $g(x) = -\frac{4}{125} \cdot x^2 + 20$

mit x in m und $f(x)$, $g(x)$ in m

Berechnen Sie die Flächeninhalte der anzustreichenden Flächen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

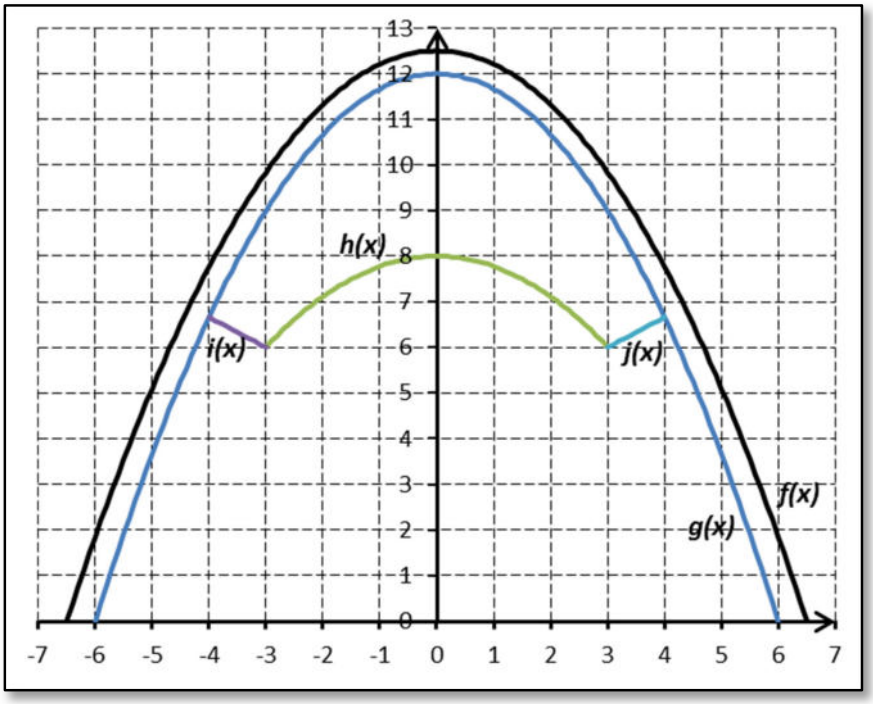
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Erlöserkirche in Hamburg-Farmsen

Die Erlöserkirche in Hamburg-Farmsen wurde vom Architekten Kurt Schwarze entworfen und 1960 fertiggestellt.

Besonders markant ist der parabelförmige Querschnitt des Gebäudes.





Die Vorderansicht der Kirche lässt sich durch die Funktionen $f(x)$ bis $j(x)$ beschreiben:

$$f(x) = -\frac{1250}{4225}x^2 + 12{,}5 \qquad g(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 12 \qquad h(x) = -\frac{2}{9}x^2 + 8$$

$$i(x) = -\frac{2}{3}x + 4 \qquad j(x) = \frac{2}{3}x + 4$$

mit x in m und $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $i(x)$, $j(x)$ in m

Berechnen Sie alle drei abgebildeten Flächeninhalte.

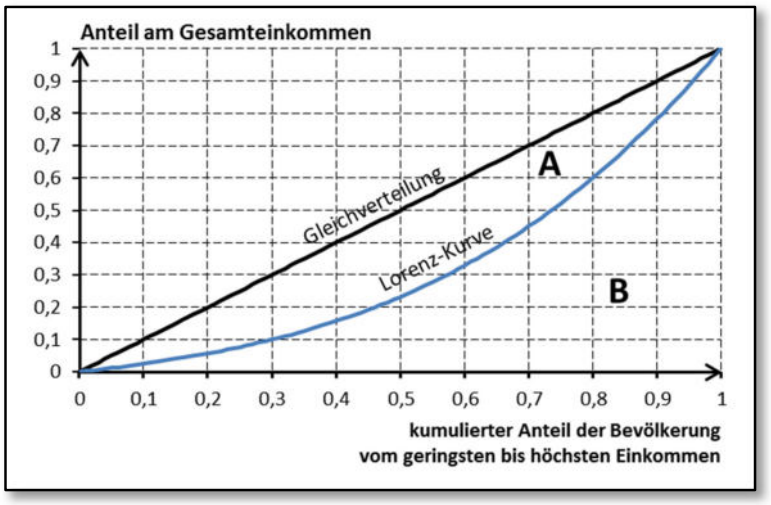
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Gini-Koeffizient

Der Gini-Koeffizient ist ein Maß zur Berechnung der Ungleichverteilung von Einkommen in unterschiedlichen Ländern.

Zur Berechnung des Gini-Koeffizienten braucht man die Lorenz-Kurve eines Landes. Aus der Lorenz-Kurve kann man ablesen, wie sich das Einkommen auf die Einwohner eines Landes verteilt. Auf der x-Achse sind die prozentualen Anteile der Bevölkerung nach Reichtum abgetragen. Das bedeutet, dass der Wert 10% auf der x-Achse sich auf die ärmsten 10% des Landes bezieht. In der Beispielkurve gilt damit, dass die ärmsten 30% des Landes nur ca. 10% des Einkommens aller verdienen. Die lineare Funktion $(g(x) = x)$ steht für die perfekte Gleichverteilung in einem Land. Der Gini-Koeffizient ergibt sich nun durch die folgende Formel:



$$G = \frac{A}{A + B}$$

Die Lorenz-Kurve in Deutschland lässt sich annähernd durch folgende Funktion beschreiben:

$$f(x) = \frac{5}{48}x^3 + \frac{11}{16}x^2 + \frac{5}{24}x$$

a) **Berechnen** Sie die Fläche A für die gegebene Funktion $f(x)$.
b) **Begründen** Sie, warum die Fläche $A + B$ immer $0{,}5$ ergibt.
c) **Berechnen** Sie den Gini-Koeffizienten für Deutschland.

Zwei weitere Länder haben die folgenden Lorenz-Kurven:

$$h(x) = \frac{83}{48}x^3 - \frac{67}{80}x^2 + \frac{13}{120}x$$
$$g(x) = -\frac{5}{12}x^3 + \frac{11}{8}x^2 + \frac{1}{24}x$$

d) **Skizzieren** Sie die beiden Lorenz-Kurven.
e) **Berechnen** Sie die Gini-Koeffizienten dieser Länder.
f) **Diskutieren** Sie, um welche Länder es sich dabei handeln könnte.
Als Orientierung sind in der folgenden Tabelle die Gini-Koeffizienten einiger Länder dargestellt (*Quelle: CIA World Factbook*):

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Land	Schweden	Österreich	USA	Brasilien	Südafrika
Gini-Koeffizient	0,29	0,30	0,41	0,49	0,63

Im Extremfall kann der Gini-Koeffizient die Werte 0 oder 1 annehmen.

g) **Beschreiben** Sie, wie die Lorenz-Kurve eines Landes aussieht, in dem eine absolute Gleichverteilung des Einkommens besteht und wie die Lorenz-Kurve eines Landes mit völliger Ungleichverteilung aussieht. **Ordnen** Sie diesen beiden Ländern die Gini-Koeffizienten 0 und 1 zu.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

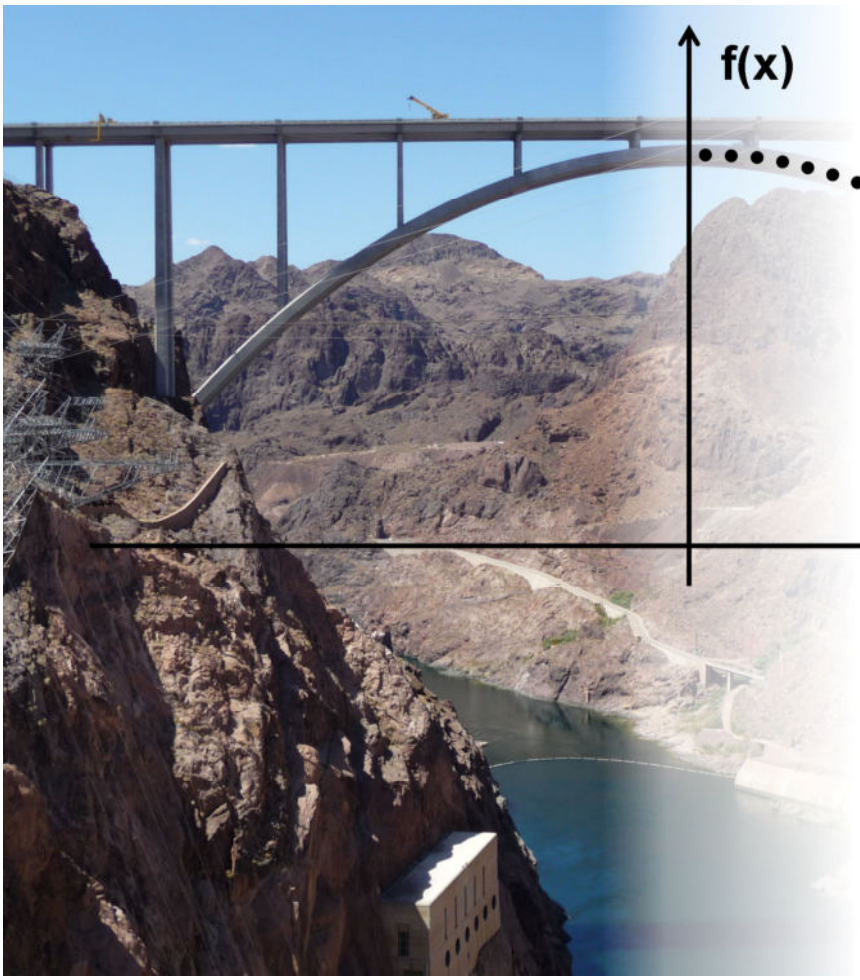
- ❑ näherungsweises Bestimmen des Flächeninhalts zwischen Graph und x-Achse
- ❑ Bestimmen der Einheit der Fläche zwischen Graph und x-Achse
- ❑ Berechnen einer Stammfunktion
- ❑ Interpretieren der Stammfunktion im Kontext
- ❑ Skizzieren einer Stammfunktion
- ❑ Zusammenhang zwischen Integral- und Differentialrechnung
- ❑ Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- ❑ Berechnen des Integrals einer Funktion auf einem gegebenen Intervall
- ❑ Interpretieren des Integrals einer Funktion auf einem gegebenen Intervall
- ❑ Bestimmen der durchschnittlichen Änderungsrate
- ❑ *Rechenregeln für Integrale*
- ❑ Berechnen der Bogenlänge
- ❑ Orientierte Flächeninhalte - positive und negative Flächen
- ❑ Bestimmen von Integralgrenzen durch Lösen von Integralgleichungen
- ❑ Berechnen des Flächeninhalts zwischen zwei Funktionen

Einträge, die sich auf „Genau hingeschaut“ beziehen, sind kursiv gedruckt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Interpolation - Von der Realität zur mathematischen Beschreibung





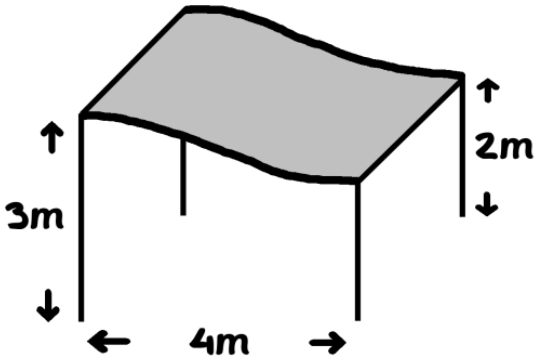
Kartenausschnitt Buxtehude – Quelle: OpenStreetMap.org, © OpenStreetMap-Mitwirkende, creativecommons.org/licenses/by/2.0/

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Interpolation - Von der Realität zur mathematischen Beschreibung

Ein Hersteller von Vordächern und Terrassenüberdachungen bekommt von einem Kunden den Auftrag das skizzierte Terrassendach zu fertigen. Die Pfosten und Träger sollen aus Metall gebaut werden. Eine besondere Herausforderung sind die beiden geschwungenen Dachträger.



Betrachtet werden soll der vordere Träger. Zur Herstellung eines solchen Dachträgers benötigt die Fertigungsabteilung eine mathematische Beschreibung des Dachträgerverlaufes. Gesucht ist also eine Funktion, die diesen Verlauf beschreibt.

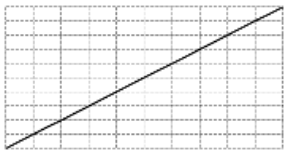
Im Folgenden wird in vier Schritten beschrieben, wie sich eine geeignete ganzrationale Funktion zu den Konstruktionsvorgaben ermitteln lässt.

Interpolation - vom Entwurf zur Funktion

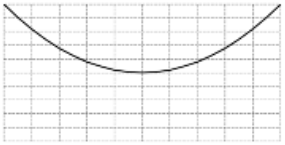
1. Grad der Funktion bestimmen

Zunächst stellt sich die Frage, welchen Grad eine Funktion haben muss, die den Verlauf des Metallträgers am besten beschreibt. Unten abgebildet sind typische Graphen ganzrationaler Funktionen ersten bis vierten Grades.

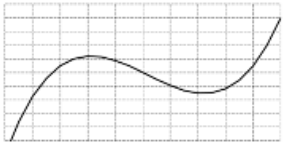
Entscheiden Sie, welcher Funktionsgrad sich am besten eignet, um den gesuchten Verlauf zu beschreiben.



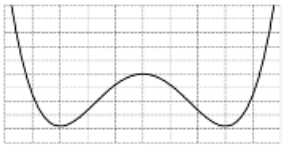
lineare Funktion
ganzrationale Funktion
1. Grades



quadratische Funktion
ganzrationale Funktion
2. Grades



kubische Funktion
ganzrationale Funktion
3. Grades



quartische Funktion
ganzrationale Funktion
4. Grades

2. Allgemeine Funktionsgleichung aufstellen

Das einfachste Modell zur Beschreibung des Daches ist eine Funktion dritten Grades. Da wir noch nicht wissen, wie der Term dieser Funktion lautet, wird zunächst die *allgemeine Funktionsgleichung* benötigt.

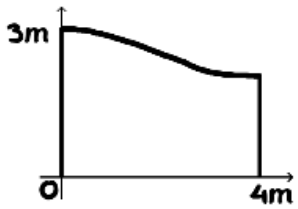
Für eine Funktion dritten Grades lautet diese:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

3. Aufstellen der Bedingungen



Gesucht sind nun die vier unbekannten Parameter der Gleichung: a, b, c und d. Um diese vier Parameter zu bestimmen, werden vier Gleichungen benötigt. Diese können auch als vier Bedingungen bezeichnet werden.

Überlegungen zu den Bedingungen:

Der Graph der Funktion soll durch die beiden Randpunkte des Daches verlaufen, also durch die Punkte $P(0 \mid 3)$ und $Q(4 \mid 2)$. Das bedeutet, dass für die gesuchte Funktion gelten muss: $f(0) = 3$ und $f(4) = 2$. Damit erhält man die ersten zwei Bedingungen.

Zusätzlich soll das Dach an den beiden Randpunkten waagerecht sein, das bedeutet, dass die Funktion an den Randpunkten eine Steigung von 0 besitzen soll. Damit folgen zwei weitere Bedingungen für unsere Funktion: $f'(0) = 0$ und $f'(4) = 0$.

Die vier Bedingungen lauten also:

I	Der Graph der Funktion verläuft durch Punkt $P(0 \mid 3)$.	$f(0) = 3$
II	Der Graph der Funktion verläuft durch Punkt $Q(4 \mid 2)$.	$f(4) = 2$
III	An der Stelle $x = 0$ hat die Steigung des Graphen den Wert 0.	$f'(0) = 0$
IV	An der Stelle $x = 4$ hat die Steigung des Graphen den Wert 0.	$f'(4) = 0$

4. Gleichungssystem aufstellen und lösen

Die ersten beiden Bedingungen können direkt in die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ eingesetzt werden:

I $\quad f(0) = a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c \cdot 0 + d = 3 \Rightarrow 0a + 0b + 0c + d = 3 \quad \Rightarrow d = 3$

II $\quad f(4) = a \cdot 4^3 + b \cdot 4^2 + c \cdot 4 + d = 2 \Rightarrow 64a + 16b + 4c + d = 2$

Um die dritte und vierte Bedingung einsetzen zu können, wird noch die erste Ableitung der allgemeinen Funktionsgleichung benötigt: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Einsetzen ergibt:

III $\quad f'(0) = 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 0 \Rightarrow 0a + 0b + c = 0 \quad \Rightarrow c = 0$

IV $\quad f'(4) = 3a \cdot 4^2 + 2b \cdot 4 + c = 0 \Rightarrow 48a + 8b + c = 0$

Löst man das sich ergebene Gleichungssystem, zum Beispiel mit einem CAS, so ergibt sich die Lösung:

$$a = \frac{1}{32};\ b = -\frac{3}{16};\ c = 0;\ d = 3$$

Damit lautet die gesuchte Funktionsgleichung: $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{16}x^2 + 3$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

Lösen eines Gleichungssystems

Casio ClassPad: Keyboard → Math1 → 

Geogebra: Lösungen[{Gleichung 1, Gleichung 2, …},{Variable 1, Variable 2,…}]

TI-Nspire CAS: solve(*Gleichung1* and *Gleichung2* and …,{*Variable1*, *Variable2*,…})



Genau hingeschaut: Händisches Lösen eines Gleichungssystems

Zum Lösen eines Gleichungssystems bieten sich mehrere Verfahren an. Exemplarisch sind hier zwei Verfahren dargestellt, das *Additionsverfahren* und das Lösen einer erweiterten Koeffizientenmatrix mit dem *Gauß-Jordan-Verfahren*.

Additionsverfahren

$$0a + 0b + 0c + d = 3$$
$$64a + 16b + 4c + d = 2$$
$$0a + 0b + c = 0$$
$$48a + 8b + c = 0$$

Gauß-Jordan-Verfahren

Die Koeffizienten und Ergebnisse des nebenstehenden Gleichungssystems werden in eine Matrix eingetragen.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 64 & 16 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Umsortieren der Gleichungen

$$64a + 16b + 4c + 1d = 2$$
$$48a + 8b + 1c + 0d = 0$$
$$0a + 0b + 1c + 0d = 0$$
$$0a + 0b + 0c + 1d = 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 1 & 2 \\ 48 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Subtrahieren des Vierfachen der zweiten von dem Dreifachen der ersten Gleichung / Zeile. Das Ergebnis wird in der zweiten Zeile notiert.

$$64a + 16b + 4c + 1d = 2$$
$$0a + 16b + 8c + 3d = 6$$
$$0a + 0b + 1c + 0d = 0$$
$$0a + 0b + 0c + 1d = 3$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 16 & 8 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Zeilenstufenform

Auflösen der Gleichungen nach den Variablen a, b, c und d

Vierte Zeile: $\boldsymbol{d = 3}$

Dritte Zeile: $\boldsymbol{c = 0}$

Umformen und ablesen von a, b, c und d

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 8 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zweite Zeile: $16b + 8c + 3d = 6$, d und c einsetzen ergibt:

$$16b + 8 \cdot 0 + 3 \cdot 3 = 6 \Leftrightarrow$$
$$16b + 9 = 6 \Leftrightarrow$$
$$16b = -3 \Leftrightarrow \boldsymbol{b = -\frac{3}{16}}$$

Erste Zeile: $64a + 16b + 4c + 1d = 2$, b, c und d einsetzen ergibt:

$$64a + 16 \cdot \left(-\tfrac{3}{16}\right) + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 3 = 2 \Leftrightarrow$$
$$64a - 3 + 3 = 2 \Leftrightarrow 64a = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{a = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 64 & 16 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 64 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 16 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2/64 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3/16 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

Das Ziel ist erreicht: Im linken Teil der Matrix stehen auf der Hauptdiagonalen nur Einsen und der Rest sind Nullen.

(1) Übungsaufgaben: Lösen eines Gleichungssystems

Lösen Sie die folgenden Gleichungssysteme per Hand und **kontrollieren** Sie Ihr Ergebnis gegebenenfalls mit einem CAS.

a) $4a + 2b + 5c = 28$
$8a + 3b - 7c = -10$
$-2a + 6b + c = -14$

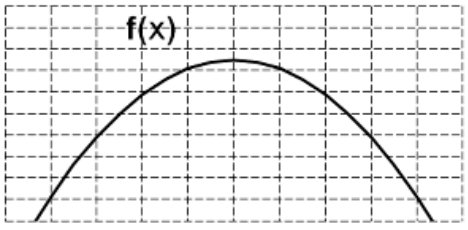
b) $3y + 5z = 6$
$-6x + 3y - z = 42$
$-4x - 2y = 42$

c) $9x_1 - 3x_2 + x_3 = 28$
$-3x_1 + x_2 = -7$
$6x_1 - 6x_2 + 4x_3 = 58$

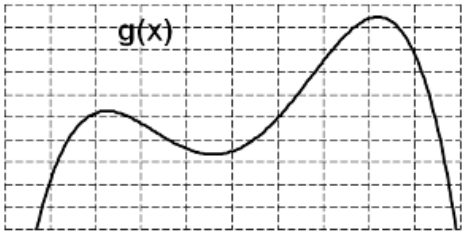
(2) Aufgabe: Funktionsgrad bestimmen

Im Folgenden sind einige Funktionsgraphen abgebildet. **Geben** Sie den Funktionsgrad einer Funktion **an**, die diesen Graphen gut beschreiben würde und **stellen** Sie die allgemeine Funktionsgleichung dieser Funktion **auf**.

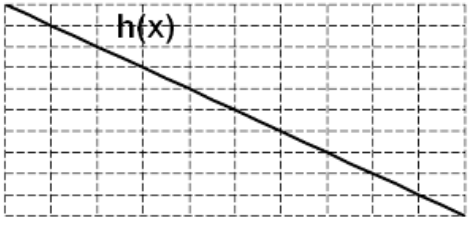
a)



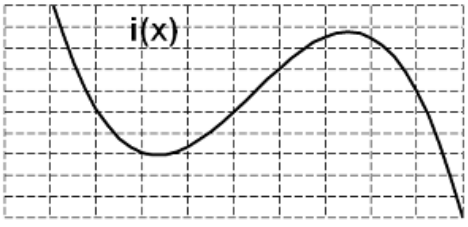
b)



c)



d)



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Übungsaufgaben: Funktionsgleichung bestimmen

Bestimmen Sie jeweils den Term einer ganzrationalen Funktion, welche die in den Teilaufgaben genannten Bedingungen erfüllt.

a) Eine Parabel verläuft durch die Punkte $A(2 \mid 2)$, $B(5 \mid 2)$ und $C(6 \mid 6)$.

b) Der Graph einer ganzrationalen Funktion dritten Grades verläuft durch die Punkte $P(-2 \mid -12)$, $Q(0 \mid 2)$, $R(3 \mid 8)$ und $S(4 \mid 30)$.

c) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades hat den Hochpunkt $H(2 \mid 10)$ und den Tiefpunkt $T(4 \mid -10)$.

d) Eine ganzrationale Funktion vierten Grades verläuft durch den Punkt $P(-2 \mid -4)$ und besitzt im Ursprung des Koordinatensystems ein Minimum. An der Nullstelle $x_N = -1$ hat die Steigung der Tangente den Wert 3.

e) Eine ganzrationale Funktion dritten Grades besitzt im Punkt $W(-2 \mid 0)$ eine Wendetangente mit der Steigung -5 und eine weitere Nullstelle bei $x_N = -3$.

(4) Aufgabe: Glaserarbeiten

Auf dem Schulgelände der Heinrich-Wolgast-Schule in Hamburg, St. Georg, steht eine Mehrzweckhalle mit einer gläsernen Front. Diese besteht aus 80 cm breiten Glasscheiben, wobei die oberen Scheiben dem Verlauf der Dachform folgend geschnitten sind.



Heinrich-Wolgast-Schule – Mit freundlicher Genehmigung von Stefan Mathey, lup-architekten

Eine der oberen Scheiben muss ersetzt werden. Zur passgenauen Fertigung dieser Scheibe benötigt der Glaser den Kurvenverlauf der oberen Glaskante.

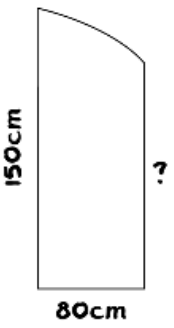
Die höchste Stelle des Daches ist 3 m vom linken Gebäuderand entfernt und der horizontale Abstand zwischen der höchsten und tiefsten Stelle beträgt 6 m. An der höchsten Stelle ist das Dach 8 m hoch, an der tiefsten Stelle 5 m hoch.

a) **Skizzieren** Sie den zuvor beschriebenen Sachverhalt in einem Koordinatensystem.

b) **Bestimmen** Sie eine Funktion, die sich zur mathematischen Beschreibung dieses Kurvenverlaufs nutzen lässt.

c) Bei der zu ersetzenden Scheibe handelt es sich um die achte Scheibe von links in der Reihe direkt unter dem Dach. **Bestimmen** Sie die in der Skizze fehlende Höhe.

d) *Wiederholung:* **Bestimmen** Sie den Flächeninhalt der Glasscheibe.

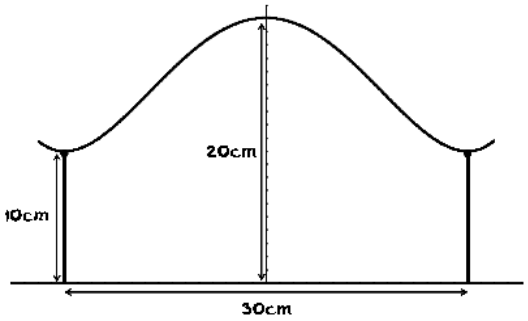


Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Schornsteinhaube





Am Ende von Schornsteinen ist oft eine Abdeckung, auch Schornsteinhaube genannt, angebracht. Sie dient dazu, den Schornstein vor Regen und Fallwinden zu schützen.

Anstelle von einfachen, runden Abdeckungen ist vor allem die sogenannte Napoleonhaube beliebt. Diese besteht aus einem geschwungenen Metallstück, dessen Form an den Hut von Napoleon erinnert.

Die zu fertigende Abdeckung hat eine Gesamtbreite von 34 cm. Die beiden tiefsten Stellen, an denen sich auch die 10 cm hohen Befestigungen befinden, haben einen Abstand von 30 cm (siehe Skizze). Die höchste Stelle der Abdeckung befindet sich in der Mitte mit einer Höhe von 20 cm über dem Schornsteinrand.

a) Zur Bestimmung der die Haube beschreibenden Funktion $h(x)$ sollen folgende fünf Bedingungen verwendet werden:

$h(-15) = 10$ $\quad h'(-15) = 0$ $\quad h'(0) = 0$

$h(15) = 10$ $\quad h'(15) = 0$

Begründen Sie im Rahmen des Sachkontextes, dass diese Bedingungen sinnvoll sind.

b) **Bestimmen** Sie mit den angegebenen Bedingungen die Funktion $h(x)$ und **interpretieren** Sie das Ergebnis.

c) Variieren Sie die verwendeten Bedingungen so, dass Ihre Funktion $h(x)$ den Sachkontext eindeutig beschreibt und **bestimmen** Sie diese Funktion.

d) CAS *Wiederholung:* **Berechnen** Sie den Flächeninhalt des benötigten Kupferbleches. Die Tiefe der Abdeckung soll dabei 40 cm betragen.



Genau hingeschaut: Funktionenschar

Wie man in der Aufgabe Schornsteinhaube gesehen hat, kann man bei ungünstiger Wahl der Bedingungen keine eindeutige Lösung erhalten. Obwohl die für eine Funktion vierten Grades nötigen fünf Bedingungen gefunden wurden, liefern diese nicht genügend Informationen, um die Funktion eindeutig zu bestimmen.

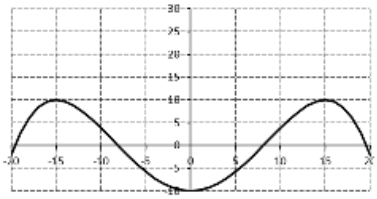
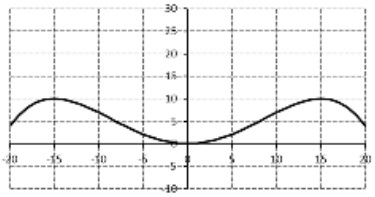
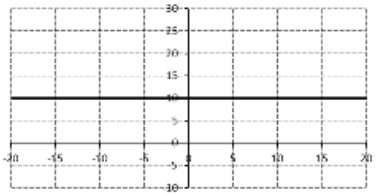
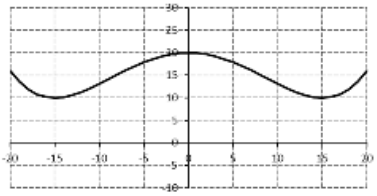
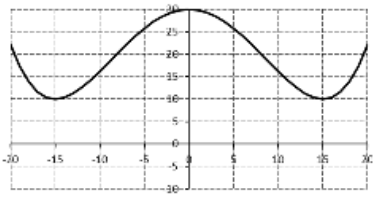
Es ergibt sich eine Lösung, die immer noch abhängig ist von einem Parameter, wie dies in der Lösung von b) deutlich wird:

$$h_e(x) = \frac{e-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(2e-20)}{225} \cdot x^2 + e$$

Eine Funktion dieser Art nennt man *Parameterfunktion*, *Kurvenschar* oder *Funktionenschar*.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

e	$h(x)$	Graph
-10	$h_{-10}(x) = \frac{-10-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(-20-20)}{225} \cdot x^2 - 10 = \frac{-20}{50625} \cdot x^4 + \frac{40}{225} \cdot x^2 - 10$	
0	$h_0(x) = \frac{0-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(0-20)}{225} \cdot x^2 + 0 = \frac{-10}{50625} \cdot x^4 + \frac{20}{225} \cdot x^2$	
10	$h_{10}(x) = \frac{10-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(20-20)}{225} \cdot x^2 + 10 = 10$	
20	$h_{20}(x) = \frac{20-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(40-20)}{225} \cdot x^2 + 20 = \frac{10}{50625} \cdot x^4 - \frac{20}{225} \cdot x^2 + 20$	
30	$h_{30}(x) = \frac{30-10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(60-20)}{225} \cdot x^2 + 30 = \frac{20}{50625} \cdot x^4 - \frac{40}{225} \cdot x^2 + 30$	

Durch das Einsetzen von Werten für den Parameter e ergeben sich unterschiedliche Funktionen, die sich graphisch darstellen lassen.

Um die Funktion $h(x)$ zu bestimmen, die am Hochpunkt bei $x = 0$ eine Höhe von 20 cm hat, lässt sich der Parameter e durch das Lösen der Gleichung $h(0) = 20$ nach dem gesuchten Parameter e berechnen.

Durch die Auswahl anderer Bedingungen zu Beginn hätte man eine eindeutige Lösung erhalten können. Beispielsweise hätte man die Bedingung $h'(15) = 0$ ersetzen können durch $h(0) = 20$, da die Symmetrie der Funktion ohnehin bereits durch die beiden Bedingungen $h(-15) = 10$ und $h(15) = 10$ berücksichtigt wurde.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Skatepark



Ein Skatepark soll durch eine neue Halfpipe attraktiver gemacht werden. Zur Fertigung dieser Halfpipe wurde eine Skizze angefertigt.

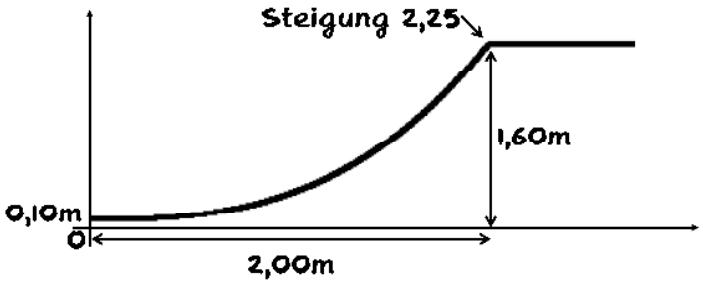
Für die Produktion der Halfpipe-Elemente wird eine den Fahrbahnverlauf beschreibende Funktion benötigt. Die Halfpipe besteht aus drei Elementen:

In der Mitte befindet sich ein waagerechtes Stück (*Flat*) mit einer Höhe von 10 cm über dem Boden. Rechts und links von diesem waagerechten Mittelstück befinden sich die Abfahrten der Halfpipe (*Transitions*). Die beiden Abfahrten sind je 2 m breit. Die rechte Abfahrt trifft auf das 1,60 m hohe Podest (*Table*) mit einer Steigung von 2,25 (das sind $\tan^{-1}(2{,}25) \approx 66°$).

Im Folgenden wird nur die rechte Abfahrt betrachtet.

a) **Begründen** Sie, warum eine quadratische Funktion ungeeignet ist, um die Abfahrt nach den obigen Vorgaben (Bedingungen) zu fertigen.

b) **Bestimmen** Sie die zur Produktion der rechten Abfahrt benötigte Funktionsgleichung.



c) *Wiederholung:* Die Abfahrt wird aus Beton mit einer Dichte (ρ) von $2{,}4$ Tonnen pro Kubikmeter $\left[\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3}\right]$ gefertigt. **Bestimmen** Sie die Masse des gesamten Bauelements der Abfahrt, wenn die Breite der Halfpipe-Fahrbahn 5 m beträgt.

Von den Bedingungen zum Funktionsgrad

In der Aufgabe zum Skatepark wurden vier Bedingungen an die Funktion gestellt. Zur Modellierung wird in diesem Fall eine Funktion mit vier Parametern benötigt, was auf eine Funktion dritten Grades mit der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ zutrifft.

Allgemein muss die Anzahl der Bedingungen mit der Anzahl der Parameter der allgemeinen Funktionsgleichung übereinstimmen. Dies ist der Fall, wenn der Grad der Funktion um eins geringer ist als die Anzahl der angegebenen Bedingungen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Übungsaufgaben: Funktionen bestimmen

Bestimmen Sie die zu den genannten Bedingungen gehörigen ganzrationalen Funktionen möglichst geringen Grades.

a) Der Graph der Funktion verläuft durch die Punkte $P(2 \mid 4032)$, $Q(-3 \mid -4368)$ und $R(6 \mid -4224)$ und hat bei $x = -5$ und bei $x = 10$ jeweils eine Nullstelle.

b) Der Graph der Funktion hat bei $H(4 \mid 256)$ einen Hochpunkt und bei $T(12 \mid 0)$ einen Tiefpunkt.

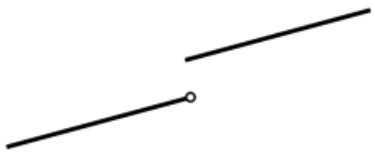
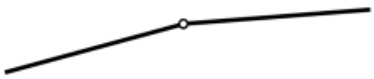
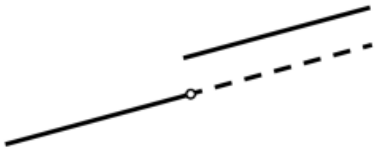
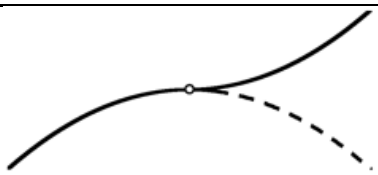
c) Eine Funktion hat bei $S(4 \mid 5)$ einen Sattelpunkt und schneidet die y-Achse bei $-\frac{49}{3}$.

Bedingungen an Verbindungsstellen

Im Folgenden geht es darum, den Graphen einer Funktion $f(x)$ in einem bestimmten Punkt $P(x_A \mid y_A)$ an den Graphen einer anderen Funktion $g(x)$ anzuschließen.

Dazu sind drei Begriffe von Bedeutung:

sprungfrei	Der Graph der Funktion $f(x)$ schließt *sprungfrei* an den Graphen der Funktion $g(x)$ an, wenn gilt: $f(x_A) = g(x_A)$. Anschaulich bedeutet dies, dass sich die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ sich im Punkt $P(x_A \mid y_A)$ treffen.
knickfrei	Der Graph der Funktion $f(x)$ schließt *knickfrei* an den Graphen der Funktion $g(x)$ an, wenn gilt: $f'(x_A) = g'(x_A)$. Dies bedeutet, dass die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt $P(x_A \mid y_A)$ die gleiche Steigung haben.
krümmungssprungfrei	Der Graph der Funktion $f(x)$ schließt *krümmungssprungfrei* an den Graphen der Funktion $g(x)$ an, wenn gilt: $f''(x_A) = g''(x_A)$. Dies bedeutet, dass die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ im Punkt $P(x_A \mid y_A)$ die gleiche Krümmung haben. Anstelle von krümmungssprungfrei ist der Begriff *ruckfrei* auch häufig zu finden.

mit Sprung	**mit Knick**	**mit Krümmungssprung**
		
sprungfrei	**knickfrei**	**krümmungssprungfrei**
		

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Genau hingeschaut: Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Im Zusammenhang mit Sprung- und Knickfreiheit gibt es zwei weitere wichtige Begriffe der Mathematik: Die Stetigkeit und die Differenzierbarkeit einer Funktion. Wichtig ist, dass es nun nicht mehr um die Verbindung zweier Funktionen geht, sondern dass nur eine Funktion $f(x)$ auf einem Intervall $[a, b]$ betrachtet wird.

Stetigkeit	Eine Funktion $f(x)$ wird als *stetig* auf einem Intervall $[a, b]$ bezeichnet, wenn der Graph der Funktion auf diesem Intervall sprungfrei verläuft. Anschaulich ist dies dann der Fall, wenn man den Graphen auf dem Intervall $[a, b]$ ohne Absetzen des Stiftes zeichnen kann.
Differenzierbarkeit	Eine Funktion $f(x)$ wird als *differenzierbar* auf einem Intervall $[a, b]$ bezeichnet, wenn sich an jedem Punkt des Graphen der Funktion auf diesem Intervall genau eine Tangente anlegen lässt. Anschaulich ist dies dann der Fall, wenn der Graph der Funktion auf dem Intervall knickfrei ist, da sich bei einem Knick zwei Tangentensteigungen ergäben.

(8) Übungsaufgaben: Sprung-, knick-, und krümmungssprungfreie Fortsetzung

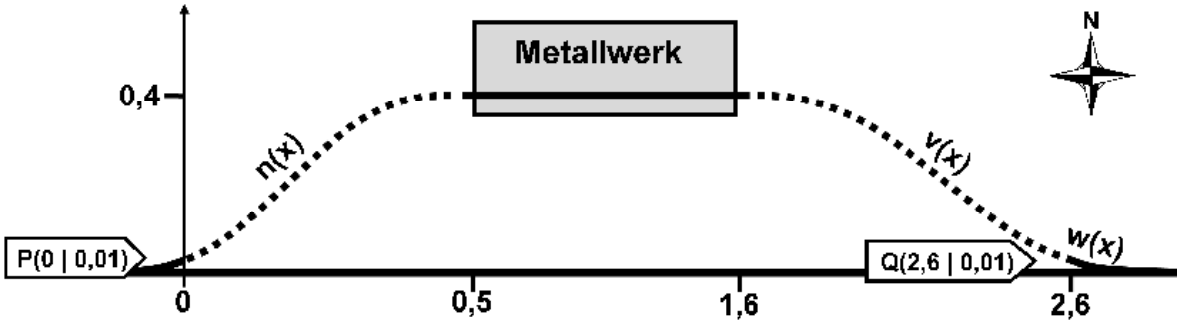
a) Gegeben ist die Funktion $f(x) = 2x^2 + 11x$. **Bestimmen** Sie eine lineare Funktion, die an der Stelle $x = 2$ knickfrei an $f(x)$ anschließt.

b) Gegeben ist die Funktion $g(x) = -x^2 + 4x - 7$. **Bestimmen** Sie eine lineare Funktion, die an der Stelle $x = 1$ knickfrei an $g(x)$ anschließt.

c) Gegeben ist die Funktion $h(x) = x^3 - 7x^2 + 14x - 8$. **Bestimmen** Sie eine quadratische Funktion, die an der Stelle $x = 2$ krümmungssprungfrei an $h(x)$ anschließt.

(9) Aufgabe: Neubau einer Bahntrasse

In einem Gewerbegebiet soll ein neugebautes Metallwerk an eine bestehende Bahntrasse angeschlossen werden. Beim Verlegen der ursprünglichen Bahntrasse wurde bereits eine Weiche eingebaut. Diese Weiche soll nun mit der im Werk vorhandenen Verladestelle verbunden werden. Die folgende (nicht maßstäbliche) Skizze zeigt eine Draufsicht. Alle Angaben sind in Kilometern [km].



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zunächst soll nur der Schienenverlauf des <u>westlichen Anschlussstücks</u> geplant werden. Für die Planung dieses Schienenverlaufes soll das Verbindungsstück mathematisch durch die Funktionsgleichung $n(x)$ beschrieben werden.

An der Anschlussstelle $P(0 \mid 0{,}01)$ hat die Weiche eine Steigung von 0,36.

a) Offensichtlich muss die neue Schiene an die vorhandenen Schienen *sprungfrei* anschließen. **Geben** Sie die sich daraus ergebenden mathematischen Bedingungen an die gesuchte Funktionsgleichung $n(x)$ **an**.

b) Damit ein Zug das Verbindungsstück problemlos befahren kann, müssen die Verbindungsstellen zusätzlich knickfrei sein.
Geben Sie die entsprechenden mathematischen Bedingungen **an**.
Begründen Sie im Kontext, warum es nicht ausreichend ist, wenn die Übergänge nur sprungfrei sind.

c) **Geben** Sie die allgemeine Funktionsgleichung einer Funktion $n(x)$ möglichst niedrigen Grades **an**.
Bestimmen Sie im Anschluss die Funktionsgleichung $n(x)$.

Auch an der <u>östlichen Seite</u> soll das Schienenstück des Metallwerks wieder an die Bahnlinie angeschlossen werden. Hier wurde bereits beim Verlegen der ursprünglichen Trasse eine Weiche eingebaut. Diese kann modellhaft durch die folgende Funktionsgleichung beschrieben werden.

$$w(x) = 4x^2 - 21{,}2x + 28{,}09$$

mit $2{,}6 \leq x \leq 2{,}65$ in km und $w(x)$ in km

d) Im ersten Entwurf soll das Schienenstück im Metallwerk mit der östlichen Weiche im Punkt $Q(2{,}6 \mid 0{,}01)$ knickfrei verbunden werden.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion $v_1(x)$.

e) Im zweiten Entwurf soll das Schienenstück im Metallwerk mit der östlichen Weiche im Punkt $Q(2{,}6 \mid 0{,}01)$ an beiden Anschlussstellen krümmungssprungfrei verbunden werden.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung dieser Funktion $v_2(x)$.

(10) Übungsaufgaben: Sprung-, knick-, und krümmungssprungfreie Verbindung

a) Gegeben sind die Funktionen $g(x) = -x^2 + 4x - 7$ mit $x \leq 2$ und $h(x) = x^2 - 10x + 30$ mit $x \geq 5$.

Bestimmen Sie eine Funktion, die die beiden Funktionen an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$ knickfrei verbindet.

b) Gegeben sind die Funktionen $g(x) = -x^2 + 4x - 7$ mit $x \leq 2$ und $h(x) = x^2 - 10x + 30$ mit $x \geq 5$.

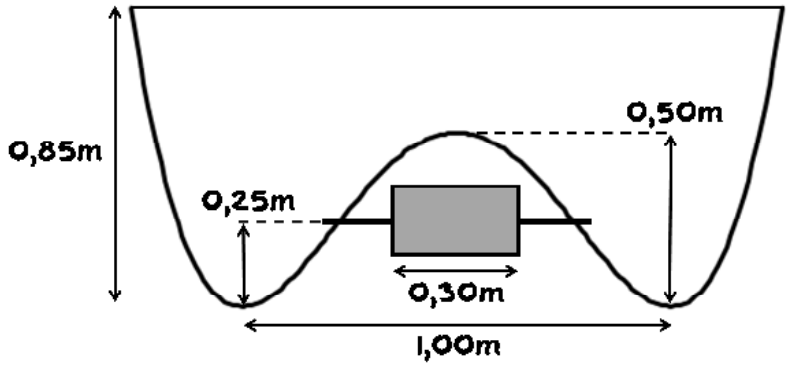
Bestimmen Sie eine Funktion, die die beiden Funktionen an den Stellen $x = 2$ und $x = 5$ krümmungssprungfrei verbindet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(11) Aufgabe: Tretboot

Ein Bootshersteller gibt den Entwurf eines neuen Tretbootmodells in Auftrag. Die folgende Skizze zeigt den Querschnitt des Tretboots nach den Vorstellungen des Herstellers.



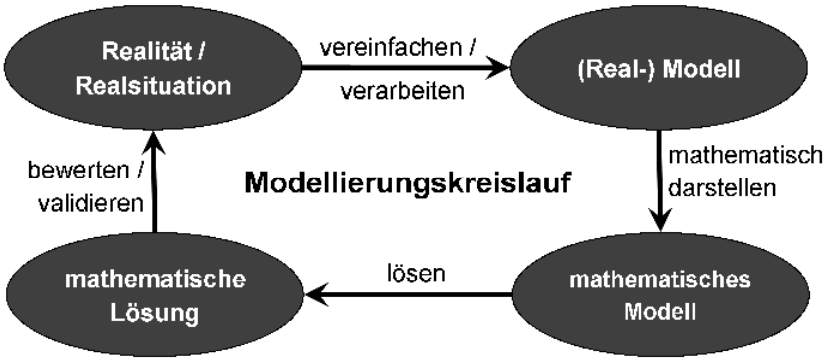
Wie in der Skizze zu sehen ist, soll in der Mitte des Schiffsrumpfs ein Schaufelrad montiert werden. Dieses Schaufelrad soll eine Breite von 0,30 m haben und nach oben einen Mindestabstand von 5 cm zum Schiffsrumpf haben.

Berechnen Sie die maximale Höhe des Schaufelrads.



Genau hingeschaut: Modellierungskreislauf

Wenn die Realität durch mathematische Methoden beschrieben wird, spricht man von Modellen. Der Prozess der Modellierung wird häufig durch den sogenannten Modellierungskreislauf dargestellt, der vereinfacht hier dargestellt ist:



Der Kreislauf beginnt mit einem Problem in der Realität. Zunächst müssen Annahmen über den Sachverhalt in der Realität getroffen werden, da nicht alle Aspekte, die in der Realität eine Rolle spielen, in dem mathematischen Modell berücksichtigt werden können.

Das so entstandene Realmodell wird in ein mathematisches Modell überführt, indem das Problem mathematisch dargestellt wird. Mithilfe von mathematischen Methoden kann dieses mathematische Problem nun gelöst werden.

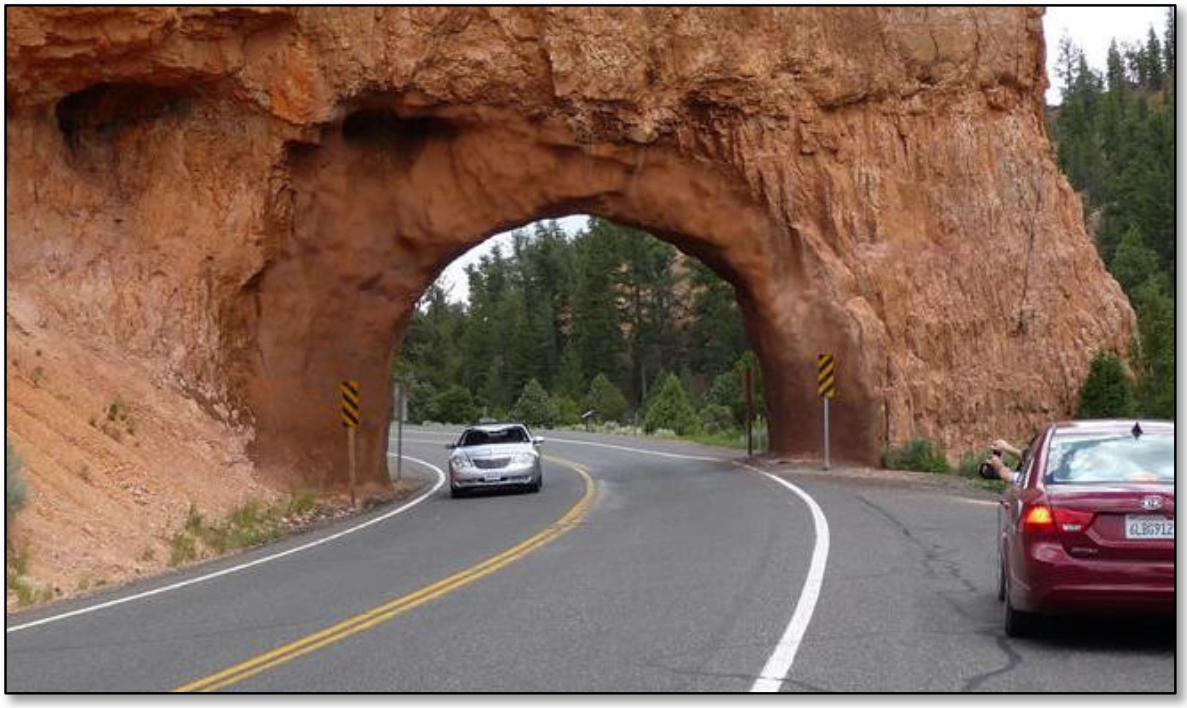
Im Anschluss muss überprüft werden, ob die mathematische Lösung zu dem ursprünglichen Problem in der Realität passt. Wird bei dieser Bewertung der mathematischen Lösung festgestellt, dass die Lösung nicht sinnvoll ist zur Bearbeitung des ursprünglichen Problems, so wird der Prozess von vorne begonnen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(12) Aufgabe: Tunnel

Das Bild zeigt einen kurzen Tunnel in der Nähe des Arches Nationalpark in den USA.



Formulieren Sie eine sinnvolle mathematische Fragestellung zum vorliegenden Sachkontext und **ermitteln** Sie eine Lösung.

Schätzen Sie die dazu benötigten Größen anhand der Abbildung.

(13) Aufgabe: Enercon Gebäude



ENERCON Gebäude in Magdeburg – Mit freundlicher Genehmigung der ENERCON GmbH

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Enercon ist einer der größten Hersteller von Windkraftanlagen in Deutschland. In Magdeburg wurde im Jahre 2006 das neue Verwaltungsgebäude eingeweiht, das dem Firmenlogo nachempfunden wurde und mit dem Magdeburger Architekten- und Ingenieurpreis „Bauwerk des Jahres 2006“ ausgezeichnet wurde.
Das Gebäude hat eine Höhe von 21,50 m, eine Länge von 70 m und eine Tiefe von 20 m.

Formulieren Sie eine sinnvolle mathematische Fragestellung zum vorliegenden Sachkontext und **ermitteln** Sie eine Lösung. **Schätzen** Sie die dazu benötigten Größen anhand der Abbildung.

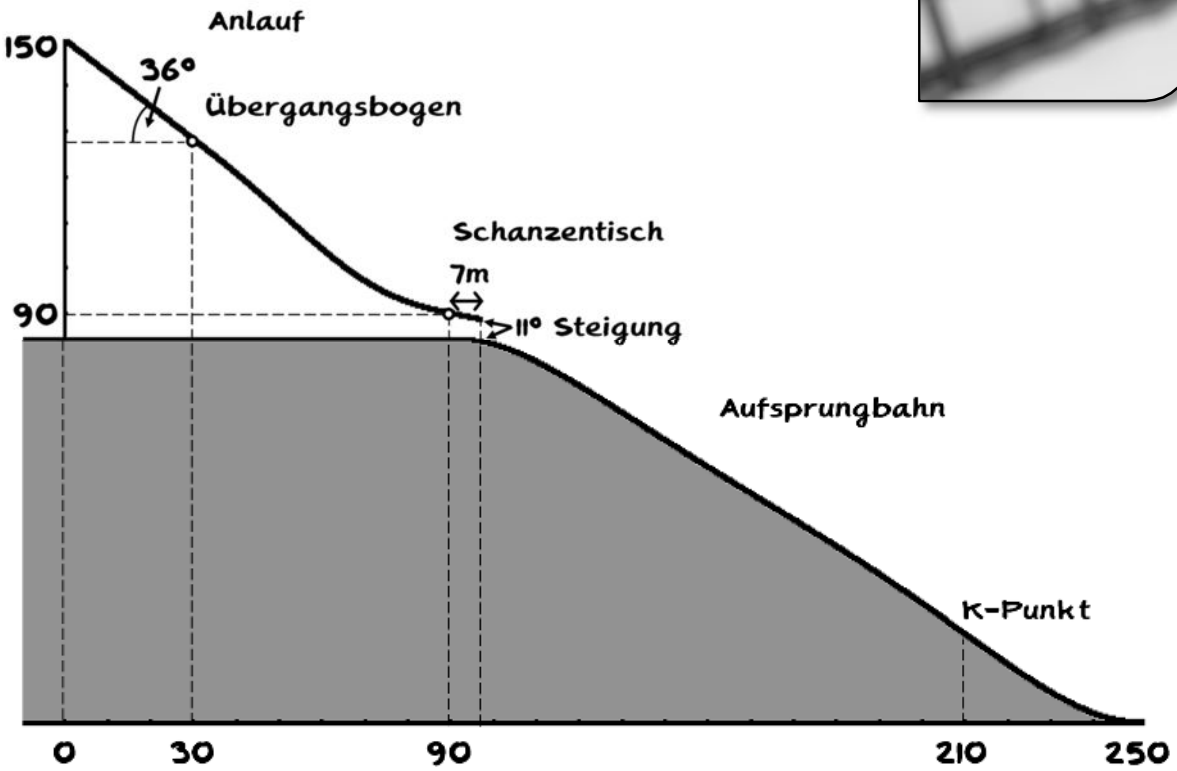
(14) CAS Aufgabe: Sprungschanze



Für ein Ski-Resort soll eine neue Skisprungschanze geplant werden. Es gibt einen Design-Wettbewerb zur Gestaltung dieser Schanze. Dabei müssen einige Konstruktionsanforderungen beachtet werden.

Eine Skisprungschanze besteht aus zwei Teilen: Am Anfang befindet sich der Anlauf bestehend aus einem geradlinigen oberen Abschnitt und dem Übergangsbogen. Daran schließt der ebenfalls geradlinig verlaufende Schanzentisch an, von dem aus der Skispringer abspringt. Darunter befindet sich die Aufsprungbahn.

Zunächst wird die Modellierung des Anlaufes vorgenommen. Für die Konstruktion des Anlaufes gibt es feste Vorgaben, die in die Skizze (alle Längenangaben in Metern) eingetragen sind.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung $u(x)$ zur Modellierung des Übergangsbogens, welcher den Anlauf und den Schanzentisch krümmungssprungfrei verbindet.

Je nach Windbedingungen (z.B. starker Rückenwind) wird der Startpunkt auf unterschiedlichen Höhen des Anlaufes gewählt. Dabei soll die Länge des Anlaufes vor dem Schanzentisch zwischen 80 Metern [m] bei Rückenwind und 95 Metern [m] bei Gegenwind liegen.

b) **Berechnen** Sie die zugehörigen Höhen des Startpunktes.

Auch die Aufsprungbahn wird künstlich angelegt. Ein wichtiger Punkt der Aufsprungbahn ist der sogenannte K-Punkt. Dieser Punkt wird als Bezugspunkt zum Messen der Sprungweiten genutzt. Der K-Punkt wird definiert als der Punkt der Aufsprungbahn, an dem das Gefälle maximal ist. Auch für die Konstruktion der Aufsprungbahn gibt es feste Vorgaben, die in der Skizze eingezeichnet sind. Der vertikale Abstand zwischen dem Schanzentischende und der Aufsprungbahn beträgt $5\ \mathrm{m}$. Dort soll die Aufsprungbahn die gleiche Steigung wie der Schanzentisch besitzen. Zudem soll die Aufsprungbahn im K-Punkt ($x_K = 210$) einen Neigungswinkel von 34° besitzen. Die Aufsprungbahn endet waagerecht bei $x = 250\ \mathrm{m}$.

c) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung $b(x)$ zur Modellierung der Aufsprungbahn.

Ein weiterer wichtiger Punkt auf der Aufsprungbahn ist der Hillsizepunkt. Dieser befindet sich unterhalb des K-Punktes an der Stelle, an der die Aufsprungbahn einen Neigungswinkel von 32° besitzt. Der Hillsizepunkt wird genutzt, um die Hillsize anzugeben, welche Schanzen nach Größen klassifiziert: Mittlere Schanze 50 bis 84 Meter, Normalschanze 85 bis 109 Meter und Großschanze 110 bis 185 Meter. Gemessen wird dabei die kürzeste Verbindung zwischen dem Ende des Schanzentisches und dem Hillsizepunkt.

d) **Bestätigen** Sie, dass es sich bei der vorliegenden Schanze um eine Großschanze handelt.

Die Flugkurve eines Springers lässt sich durch die folgende Funktionsgleichung beschreiben:

$$s(x) = -0{,}0036x^2 + 0{,}5x + 74$$

mit $x \geq 97$ in m und $s(x)$ in m

e) **Berechnen** Sie die Sprungweite des Springers relativ zum K-Punkt.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Aufstellen und interpretieren der Bedingungen an eine Funktion zur Durchführung einer Interpolation
- ❑ Bestimmen einer ganzrationalen Funktion mittels Interpolation
- ❑ Funktionenschar
- ❑ sprungfreie, knickfreie und krümmungssprungfreie Fortsetzungen und Verbindungen
- ❑ Modellierungskreislauf

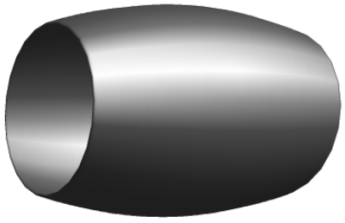
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Rotationskörper - Von der zweiten zur dritten Dimension

Volumen gesucht!

In der Getränkeindustrie werden die Produkte häufig in Metallfässern an Gastronomiebetriebe geliefert. Im Gegensatz zu einem Zylinder hat ein Fass eine bauchige Form, die sich nicht mit der bekannten Volumen-Formel berechnen lässt. Das hier betrachtete Fass soll eine Länge von 100 cm haben und die Boden- und Deckelplatte haben einen Durchmesser von 56 cm. In der Mitte des Fasses beträgt der Durchmesser 70 cm.

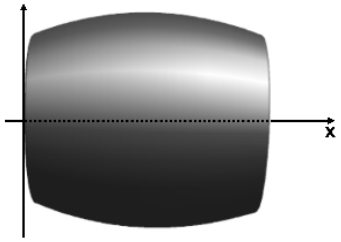


Gesucht ist das Fassungsvermögen des Metallfasses. Dafür wird zunächst eine Funktionsgleichung zur Beschreibung der Außenwand des Fasses benötigt. Diese lässt sich mithilfe der Interpolation berechnen.

Rotationskörper - Volumen gesucht!

1. Festlegung des Koordinatensystems

Das Koordinatensystem wird so festgelegt, dass die x-Achse die Symmetrieachse ist.



2. Bestimmen der Funktionsgleichung

Gegeben sind die folgenden drei Bedingungen an die Funktion, die die obere Außenwand des Fasses beschreiben soll:

I. $f(0) = 28$
II. $f(100) = 28$
III. $f(50) = 35$

Somit handelt es sich um eine Funktion zweiten Grades mit der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx + c$.
Mithilfe einer Interpolation ergibt sich die Funktion $f(x) = -\frac{7}{2500} \cdot x^2 + \frac{7}{25} \cdot x + 28$.

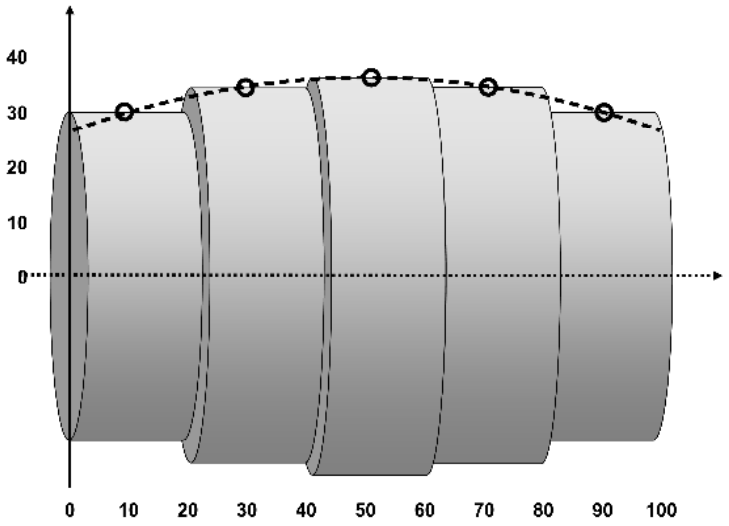
3. Bestimmen des Rotationsvolumens

Die errechnete Funktion beschreibt die obenliegende Außenwand des Fasses. Lässt man diese Funktion um die x-Achse rotieren, so ergibt sich ein dreidimensionaler Körper, der die Form des Fasses hat.

Um das Volumen dieses Körpers näherungsweise zu berechnen, zerlegen wir ihn in fünf gleichgroße Teilkörper. Diese können wir näherungsweise als Zylinder betrachten und mit der bekannten Volumenformel berechnen. Der Radius der jeweiligen Zylinder ergibt sich aus dem Funktionswert in der Mitte des Zylinders.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Alle Angaben in Zentimetern [cm]

Zylinder	Radius	Höhe	$V = h \cdot \pi \cdot r^2 = h \cdot \pi \cdot f(x)^2$
1	$r = f(10) = 30{,}52$ cm	$h = 20$ cm	$V = 58526{,}01$ cm^3
2	$r = f(30) = 33{,}88$ cm	$h = 20$ cm	$V = 72121{,}82$ cm^3
3	$r = f(50) = 35$ cm	$h = 20$ cm	$V = 76969{,}02$ cm^3
4	$r = f(70) = 33{,}88$ cm	$h = 20$ cm	$V = 72121{,}82$ cm^3
5	$r = f(90) = 30{,}52$ cm	$h = 20$ cm	$V = 58526{,}01$ cm^3
		Summe	$V_{Gesamt} = 338264{,}68$ cm^3 $= 338{,}26$ l

Erhöht man die Anzahl der Unterteilungen, so nähert sich der Näherungswert immer stärker dem realen Wert für das Volumen des Rotationskörpers an.

Analog zur Integralrechnung, bei der immer feiner werdende Rechtecke aufsummiert werden, werden hier die Volumen der immer schmaler werdenden Zylinder aufsummiert.

Daraus ergibt sich die folgende Formel zur Berechnung des Rotationsvolumens:

$$\int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, dx$$

Für das vorliegende Fass ergibt sich damit das folgende Volumen:

$$\int_0^{100} \pi \cdot \left(-\frac{7}{2500} \cdot x^2 + \frac{7}{25} \cdot x + 28\right)^2 dx = 336611{,}18 \text{ cm}^3 = 336{,}61 \text{ l}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Rotationsvolumen

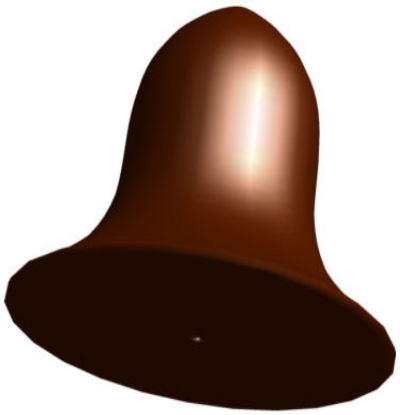
Lässt man eine Funktion $f(x)$ um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper.

Das Rotationsvolumen V dieses Körpers auf dem Intervall $[a, b]$ lässt sich mithilfe der folgenden Formel berechnen:

$$V = \int_a^b \pi \cdot f(x)^2 \, dx$$

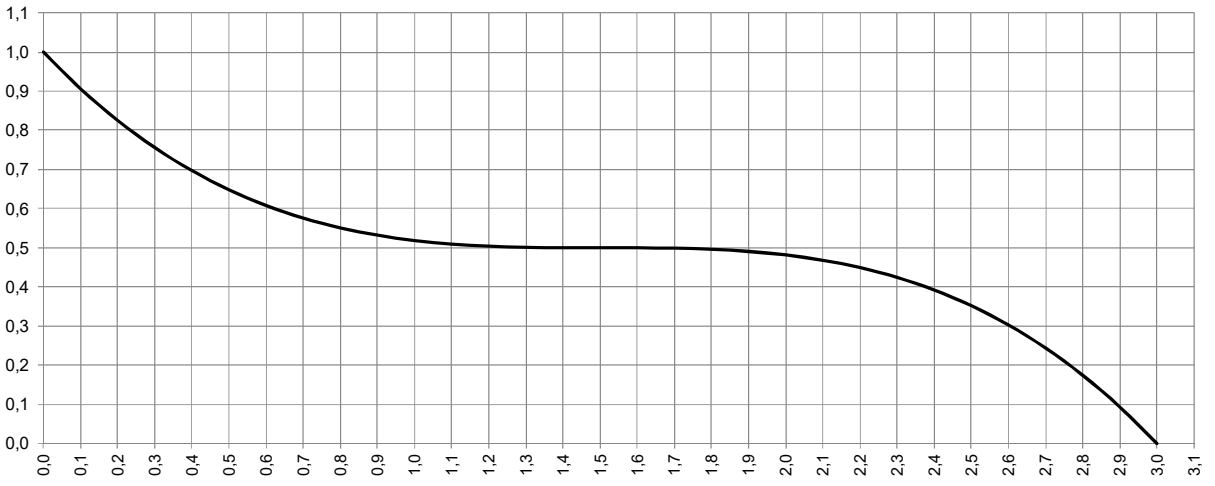
(1) Aufgabe: Schokopraline

Eine Schokoladenfirma stellt zu Weihnachten glockenförmige Schokopralinen her. Die Pralinen sollen nach den in der Skizze abgebildeten Maßen in Zentimetern [cm] gefertigt werden.



a) **Bestimmen** Sie eine Funktionsgleichung zur Beschreibung der Glockensilhouette.

b) **Berechnen** Sie das Volumen der Schokopraline und **berechnen** Sie das Gewicht einer Praline, wenn Vollmilch-Schokolade eine Dichte von 1300 Kilogramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ hat.



Alle Angaben in Zentimetern [cm]

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

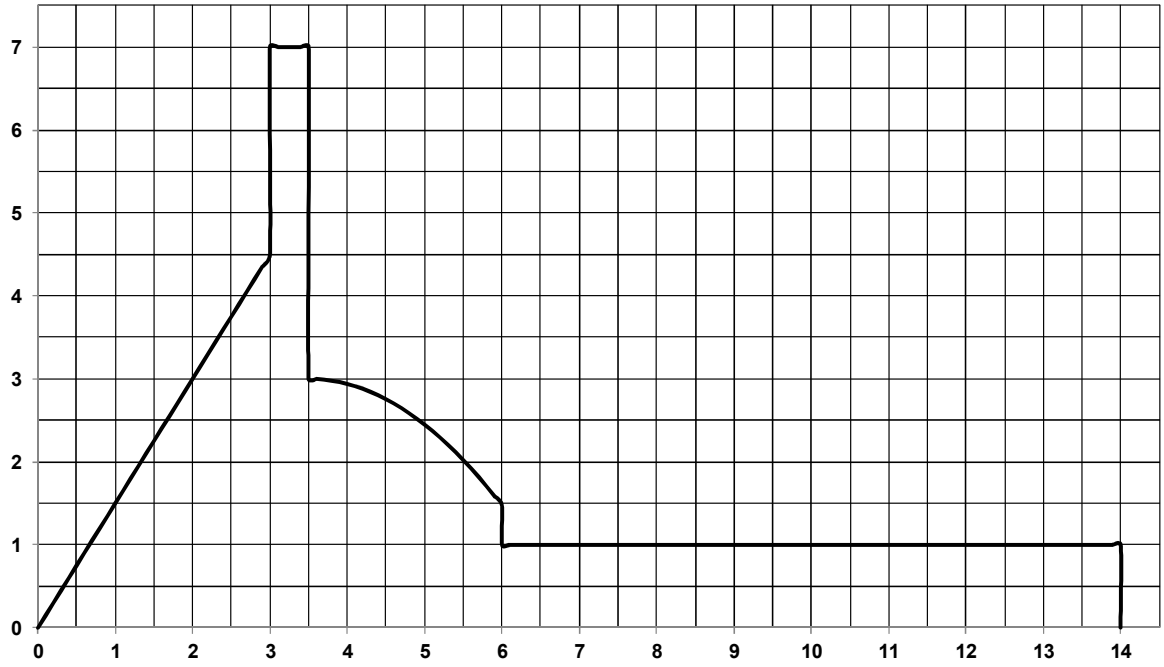
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Kreisel

Ein Hersteller von Kinderspielzeug möchte einen neuen Kreisel auf den Markt bringen, der von einem Designer entworfen wurde und in der Abbildung dargestellt ist.



Berechnen Sie das Gewicht des Kreisels, wenn dieser aus Buchenholz mit einer Dichte von 690 Kilogramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$ gefertigt wird.



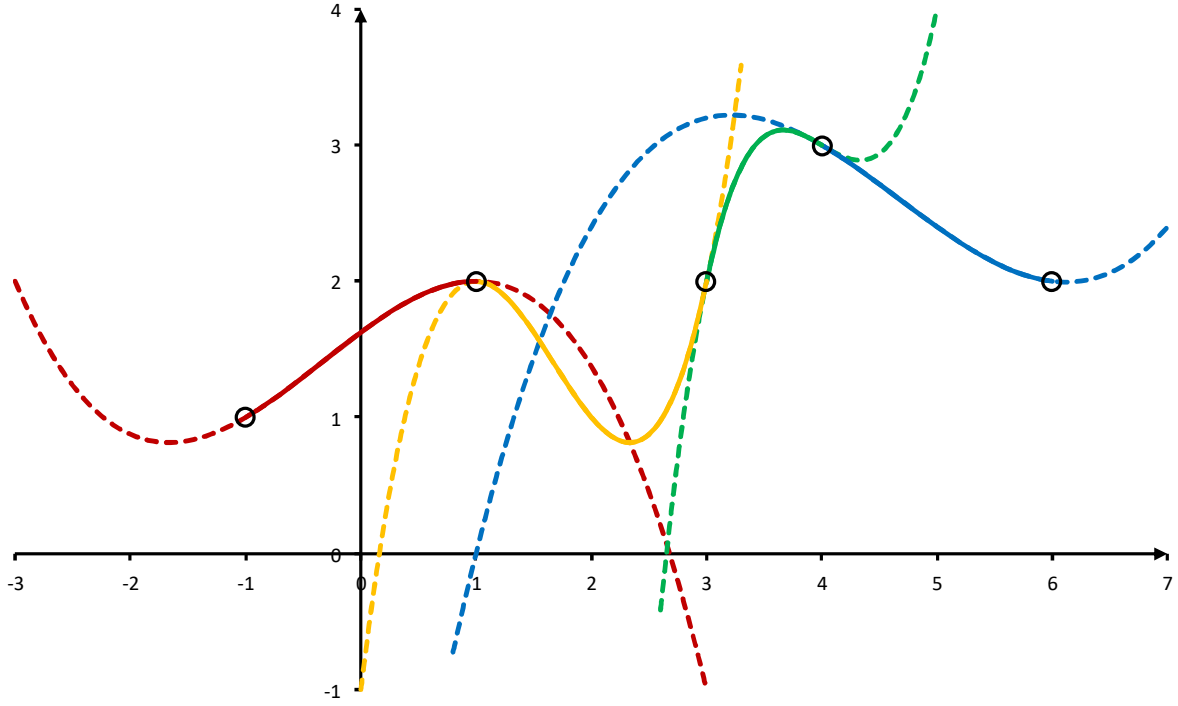
Alle Angaben in Zentimetern [cm]

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Splines

Bei komplexeren Formen, die sich nicht hinreichend gut durch nur eine Funktion darstellen lassen, muss der zu beschreibende Graph durch Zerlegung in unterschiedliche Abschnitte modelliert werden. Dabei wird bei der Spline-Interpolation für jeden Abschnitt eine Funktion dritten Grades zur Modellierung des Graphen auf dem Abschnitt ermittelt. An den Anschlussstellen werden die Funktionen knickfrei verbunden.



(3) Aufgabe: Weinkaraffe



Eine Glaserin hat verschiedene Weinkaraffen in ihrer Glaserei gefertigt. Weinkaraffen dieser Form werden häufig in der Gastronomie verwendet, um offene Weine, das heißt Weine, die nicht in Flaschen, sondern in Fässern oder Tanks gelagert werden, den Gästen zu servieren.

a) **Modellieren** Sie zunächst den Sachverhalt (siehe Skizze auf Seite 92) mit nur einer Funktion.

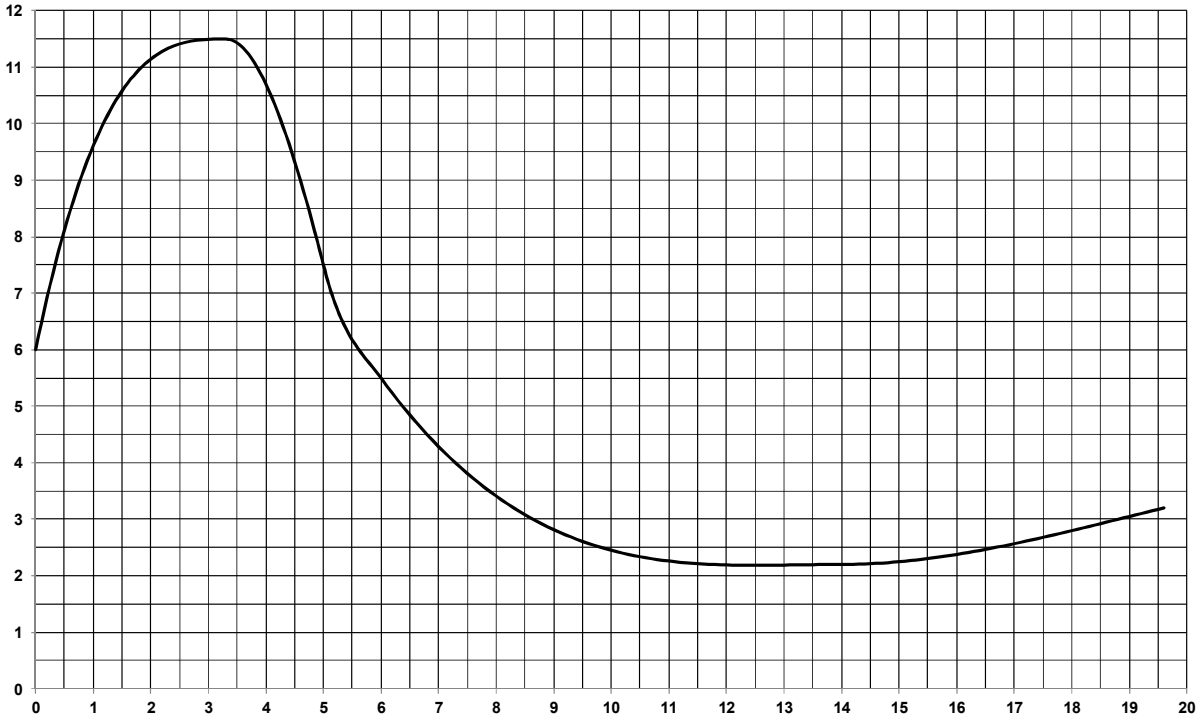
Bewerten Sie Ihr Modell.

b) Teilen Sie die Karaffe in unterschiedliche Abschnitte ein und **modellieren** Sie im Anschluss mithilfe mehrerer Funktionen dritten Grades (Spline-Interpolation) den Sachverhalt.

c) **Berechnen** Sie das Fassungsvermögen der Karaffe. Vernachlässigen Sie dabei die Dicke des Glases.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Alle Angaben in Zentimetern [cm]



(4) Aufgabe: Heißluftballon

Im Folgenden soll die Tragfähigkeit eines neu konstruierten Heißluftballons überprüft werden.

Der Heißluftballon hat die folgenden Maße: Der Ballon hat eine Höhe von 25 m und an der breitesten Stelle, welche sich 7 m unterhalb des höchsten Punktes befindet, hat der Ballon einen Durchmesser von 20 m. Am unteren Ende hat der Ballon einen Durchmesser von 4 m.

Bestimmen Sie die mögliche Anzahl der Passagiere bei einer Außentemperatur von 0 °C. Berücksichtigen Sie dazu die im Folgenden angegeben Daten und die Erläuterung zu Heißluftballons (*Hinweis:* Sie finden Tipps zu dieser Aufgabe im Lösungsteil).

Information: Warum fliegt ein Heißluftballon?

Ein Heißluftballon fliegt aus dem gleichen Grund, aus dem auch ein Schiff schwimmt: Durch (statischen) Auftrieb. Der Grund für diesen Auftrieb ist die unterschiedliche Dichte der warmen Luft im Ballon und der kälteren Luft in der Umgebung. Luft hat bei 0 °C eine Dichte von 1,29 Kilogramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$. Erwärmt man sie auf 100 °C, was eine realistische Innentemperatur eines Heißluftballons ist, so bewirkt die Bewegung der Luftmoleküle eine Verringerung der Dichte auf den Wert 0,95 Kilogramm pro Kubikmeter $\left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right]$. Multipliziert man nun die Differenz der beiden Luftdichten (im Inneren des Ballons und außerhalb des Ballons) mit dem Ballonvolumen, so erhält man die maximale mögliche Masse, die dieser Ballon unter diesen Umständen tragen kann.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zum ersten Mal wurde dieses Prinzip schon vor mehr als 2200 Jahren von Archimedes formuliert. Es dauerte bis zum Jahr 1783 bis die Gebrüder Montgolfier mit dem ersten Heißluftballon Menschen fliegen ließen.

Ausrüstung	Gewicht
Ballon	0,11 kg (pro m^2 Stofffläche)
Korb	79 kg
Gasflaschen	160 kg
Brenner	25 kg
Mindestausrüstung	7 kg

Für die Lösung der Aufgabe benötigen Sie die folgende Information zur Mantelfläche.

Mantelfläche

Die Mantelfläche M eines Rotationskörpers, der durch die Funktion $f(x)$ im Intervall $[a; b]$ beschrieben wird, lässt sich mithilfe der folgenden Formel berechnen:

$$M = 2 \cdot \pi \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Rotationskörper
- ❑ Berechnen des Rotationsvolumens
- ❑ Durchführen von Spline-Interpolationen
- ❑ Berechnen der Mantelfläche eines Rotationskörpers

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Regression - Von Messdaten zur mathematischen Näherung CAS

Regression - Von der Vergangenheit zur Zukunft



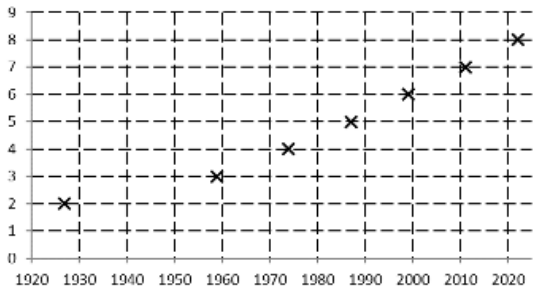
Die Vereinten Nationen haben den 15. November 2022 zum Tag des achtmilliardsten Erdenbürgers erklärt – und die Erdbevölkerung wächst weiter. Wann dürfen wir den neunmilliardsten Erdenbürger begrüßen?

Die Demographie ist eine Wissenschaft, die sich mit der Entwicklung von Bevölkerungen beziehungsweise Populationen beschäftigt. Dabei werden Daten über Entwicklungen in der Vergangenheit genutzt, um Prognosen für die Zukunft treffen zu können.

Die amerikanische Volkszählungsbehörde (*Bureau of the Census*) hat die sogenannten Meilensteine der Entwicklung der Weltbevölkerung veröffentlicht. Die folgenden Daten geben das Jahr des Erreichens einer weiteren Milliarde Menschen seit 1900 an.

Jahr	**1927**	**1959**	**1974**	**1987**	**1999**	**2011**	**2022**
Bevölkerung in Milliarden	2	3	4	5	6	7	8

Diese Daten lassen sich in einem Diagramm darstellen:



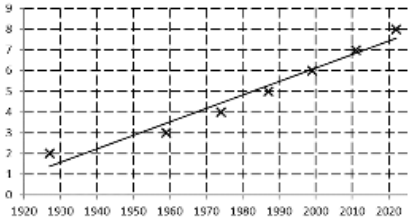
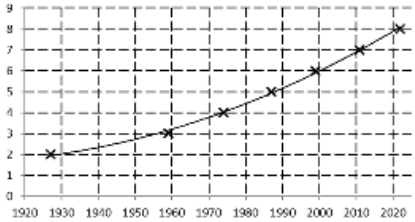
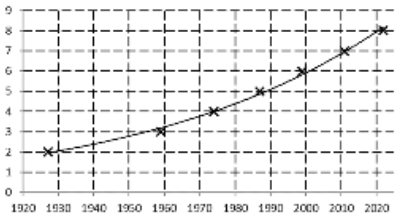
Mithilfe der mathematischen Methode der **Regression** lassen sich unterschiedliche Funktionen finden, die diese Daten näherungsweise beschreiben.

Eine Regressionsfunktion per Hand aufzustellen ist ein aufwändiges Unterfangen. Hier ist die Verwendung eines Computer-Algebra-System (CAS) empfehlenswert.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Im Folgenden sind drei unterschiedliche Funktionen zur Beschreibung des Wachstums der Weltbevölkerung verwendet worden:

Lineare Regression	**Quadratische Regression**	**Exponentielle Regression**
Datenpunkte und Graph der Regressionsfunktion	**Datenpunkte und Graph der Regressionsfunktion**	**Datenpunkte und Graph der Regressionsfunktion**
		
Allgemeine Funktionsgleichung	**Allgemeine Funktionsgleichung**	**Allgemeine Funktionsgleichung**
$f(x) = a \cdot x + b$	$g(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$	$h(x) = a \cdot b^x$
Funktionsgleichung der Regressionsfunktion	**Funktionsgleichung der Regressionsfunktion**	**Funktionsgleichung der Regressionsfunktion**
$f(x) = 0{,}06x - 123{,}9$	$g(x) = 4{,}27 \cdot 10^{-4}x^2 - 1{,}62x + 1540{,}15$	$h(x) = 4{,}69 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}015^x$
Gütemaße *(Erklärung folgt)*	**Gütemaße**	**Gütemaße**
$R^2 = 0{,}961$	$R^2 = 0{,}9982$	$R^2 = 0{,}9956$
$MSE = 0{,}2182$	$MSE = 0{,}0129$	$MSE = 0{,}0013$

Um auszuwählen, welche Funktion sich zur Beschreibung des Wachstums am besten eignet, lassen sich drei Kriterien betrachten: Einerseits kann anhand des **Verlaufs** der Regressionskurve beurteilt werden, wie gut diese die Messwerte mathematisch beschreibt. Weiterhin kann anhand von mathematischen **Gütemaßen** die Genauigkeit der Regression beurteilt werden. Darüber hinaus ist es von Bedeutung, aus dem **Kontext** heraus zu beurteilen, welches mathematische Modell den Kontext insbesondere auf lange Sicht am besten beschreibt.

Hinsichtlich des **Verlaufs** des Graphen lässt sich aus der Abbildung erkennen, dass die quadratische und die exponentielle Regression die Werte am besten treffen.

Die Betrachtung der mathematischen **Gütemaße** zeigt, dass die exponentielle Regression die Datenpunkte besser beschreibt als die lineare Regression und ähnlich gut wie die quadratische. Dies lässt sich daran ablesen, dass der *R^2-Wert* sehr nahe an 1 liegt und der *MSE-Wert* fast 0 ist.

Auch der **Kontext** der Bevölkerungsentwicklungen deutet darauf hin, dass eine exponentielle Regression am geeignetsten ist, da mit der Anzahl der Menschen auch die Anzahl der Neugeborenen wächst. Eine lineare Regression eignet sich nicht zur Beschreibung des Kontextes, da lineare Funktionen in diesem Kontext bedeuten, dass in jedem Jahr die gleiche Anzahl an Menschen hinzukommt. Da die Bevölkerung sich jährlich um einen bestimmten Wachstumsfaktor vervielfacht, bietet sich eine quadratische Modellierung ebenfalls nicht an. Somit ist die Verwendung einer exponentiellen Regression im vorliegenden Fall sinnvoll.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die Funktionsgleichung zur Beschreibung dieser exponentiellen Regression lautet:

$h(x) = 4{,}69 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}015^x$

Um zu untersuchen, wann die nächste Milliarde erreicht wird, muss die folgende Gleichung gelöst werden: $h(x) = 9$

Als Lösung ergibt sich: $x = 2054{,}28$. Nach diesem Modell wird der neunmilliardste Erdenbürger Mitte März 2054 geboren.

Gütemaße

Die gebräuchlichen Gütemaße zur Beurteilung einer Regressionsfunktion sind R^2 und MSE.

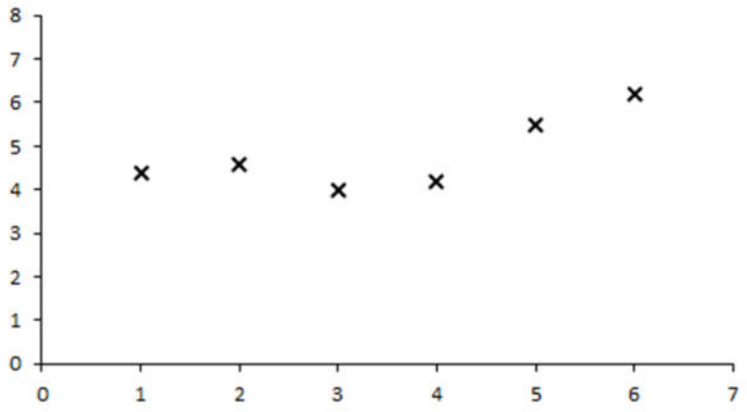
Der R^2-Wert ist das **Bestimmtheitsmaß** der Regressionsfunktion. R^2 liegt immer zwischen 0 (ungeeignetes Modell) und 1 (perfekt passendes Modell).

Der **mittlere quadratische Fehler** (englisch: mean square error, MSE) gibt die Abweichung der Regression von den realen Werten an. Je näher der mittlere quadratische Fehler an Null liegt, desto besser beschreibt die Regression die realen Daten.

Genau hingeschaut: Veranschaulichung des mittleren quadratischen Fehlers (MSE)

Bei einer wissenschaftlichen Untersuchung ergeben sich die folgenden Messwerte:

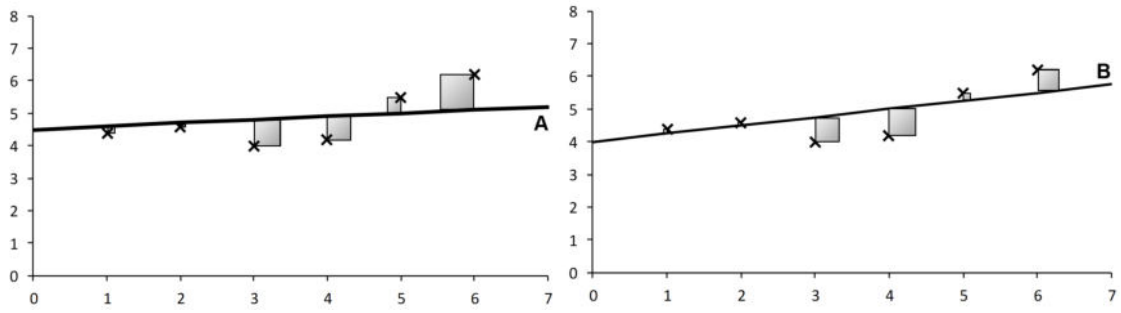
1	2	3	4	5	6
4,4	4,6	4	4,2	5,5	6,2



Die Messwerte sind im oberen Graphen dargestellt. Es wird ein linearer Zusammenhang zwischen den beiden Größen vermutet. Im Folgenden werden zwei Vorschläge für eine Regressionsgerade dargestellt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Durch die Berechnung der mittleren Abstandsquadrate soll berechnet werden, welche der beiden Regressionsgeraden den Sachverhalt besser beschreibt:

x-Werte	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y-Werte	**4,4**	**4,6**	**4**	**4,2**	**5,5**	**6,2**
Regression A $f(x) = 0{,}1x + 4{,}5$	4,6	4,7	4,8	4,9	5,0	5,1
Abweichung	0,2	0,1	0,8	0,7	0,5	1,1
quadratische Abweichung	0,04	0,01	0,64	0,49	0,25	1,21

Berechnung der mittleren Abstandsquadrate

$$(0{,}04 + 0{,}01 + 0{,}64 + 0{,}49 + 0{,}25 + 1{,}21) : 6 = \mathbf{0{,}44}$$

x-Werte	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
y-Werte	**4,4**	**4,6**	**4**	**4,2**	**5,5**	**6,2**
Regression B $f(x) = 0{,}25x + 4$	4,25	4,5	4,75	5	5,25	5,5
Abweichung	0,15	0,1	0,75	0,8	0,25	0,7
quadratische Abweichung	0,0225	0,01	0,5625	0,64	0,0625	0,49

Berechnung der mittleren Abstandsquadrate

$$(0{,}0225 + 0{,}01 + 0{,}5625 + 0{,}64 + 0{,}0625 + 0{,}49) : 6 = \mathbf{0{,}298}$$

Bei Regression A beträgt der Wert der mittleren Abstandsquadrate 0,44 und bei Regression B ist der Wert 0,298. Regression B ist also bezogen auf dieses Gütemaß besser als Regression A.

Durch Näherungsverfahren wird im Anschluss diejenige Regressionsgerade gesucht, bei welcher der Wert der mittleren Abstandsquadrate am geringsten ist. Dieses Verfahren lässt sich in ähnlicher Form auch bei anderen Funktionen anwenden. Auch die Berechnung des mittleren quadratischen Fehlers (MSE) basiert auf den mittleren Abstandsquadraten, berücksichtigt darüber hinaus jedoch noch die Komplexität der gewählten Funktionsklasse.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Bestimmen einer Regressionsfunktion

Casio ClassPad II

- Wählen Sie im Hauptmenü **Statistik**  aus.
- Geben Sie die Wertepaare in **`list1`** und **`list2`** ein.
- Zeichnen Sie die Punkte mit  in ein Koordinatensystem ein.
- Wählen Sie unter dem Menüpunkt **`Calc`** die Regression mit dem von Ihnen gewünschten Funktionstyp aus und bestätigen Sie das nächste Fenster mit **`OK`**. Die Regressionsfunktion wird nun berechnet.
- Im folgenden Fenster bekommen Sie die Parameter für die allgemeine Funktionsgleichung des von Ihnen gewählten Funktionstyps angezeigt. Außerdem können Sie die Gütemaße **`r²`** und **`MSe`** ablesen.
- Der Klick auf **`OK`** schließt das Fenster und der Graph der Regressionsfunktion wird eingezeichnet. Die Funktionsgleichung bekommen Sie mit dem Menüpunkt **`Analyse`** und **`Verfolgen`** wieder angezeigt.

Geogebra

Befehlsübersicht zur Durchführung einer Regression

- Lineare Regression: **`Trendlinie[{(`x_1`, `y_1`),(`x_2`, `y_2`),…}]`**
- Quadratische Regression: **`TrendPoly[{(`x_1`, `y_1`),(`x_2`, `y_2`),…},2]`**
- Kubische Regression: **`TrendPoly[{(`x_1`, `y_1`),(`x_2`, `y_2`),…},3]`**
- trigonometrische Regression: **`TrendSin[{(`x_1`, `y_1`),(`x_2`, `y_2`),…}]`**
- exponentielle Regression (Basis e): **`TrendExp[{(`x_1`, `y_1`),(`x_2`, `y_2`),…}]`**

TI-Nspire CAS

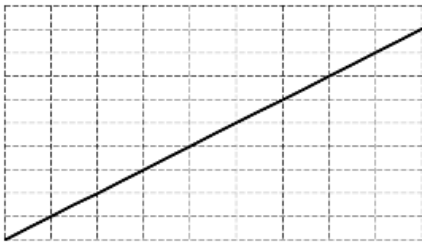
- Wählen Sie im Hauptmenü **Lists & Spreadsheet** aus.
- Benennen Sie die ersten beiden Spalten und tragen Sie hier Ihre Wertepaare ein.
- [menu] → Statistik → Statistische Berechnung
- Sie erhalten nun eine Liste mit möglichen Regressionsfunktionen.
- Wählen Sie eine aus und tragen Sie unter **X-Liste** und **Y-Liste** die Namen der beiden Spalten ein.
- Sie erhalten die Parameter Ihrer Funktion sowie die Werte für **`r`** und **`r²`**.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Graphen verschiedener Funktionstypen

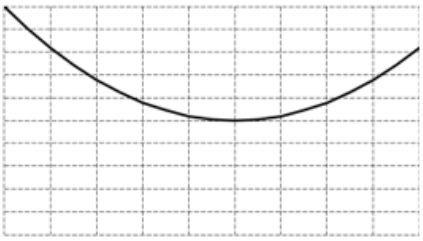
Als Auswahlhilfe zur Durchführung einer Regression finden Sie hier einige typische Graphen der jeweiligen Funktionstypen. Darunter finden Sie die Bezeichnung und die allgemeine Funktionsgleichung (gegebenenfalls mit Variante) der Funktion (mehr Informationen finden Sie ab Seite 211).



lineare Funktion

ganzrationale Funktion
1. Grades

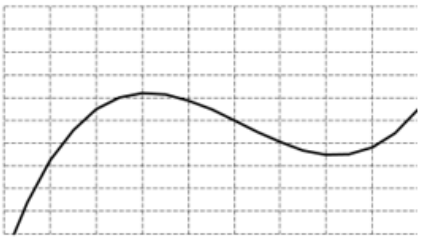
$f(x) = a \cdot x + b$



quadratische Funktion

ganzrationale Funktion
2. Grades

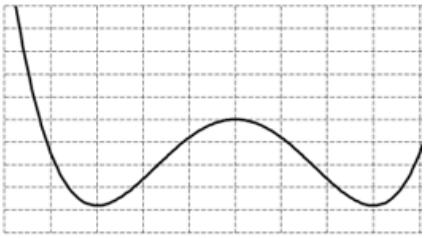
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$



kubische Funktion

ganzrationale Funktion
3. Grades

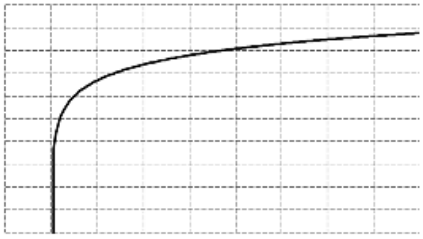
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$



quartische Funktion

ganzrationale Funktion
4. Grades

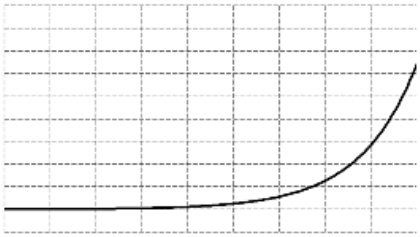
$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$



Logarithmusfunktion

logarithmische Funktion

$f(x) = a + b \cdot \ln(x)$



Exponentialfunktion

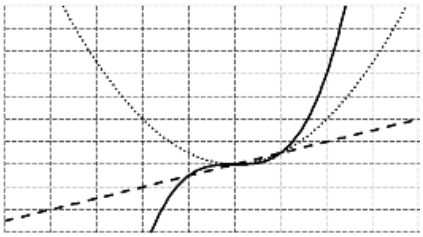
exponentielle Funktion

$f(x) = a \cdot b^x$

(allgemein)

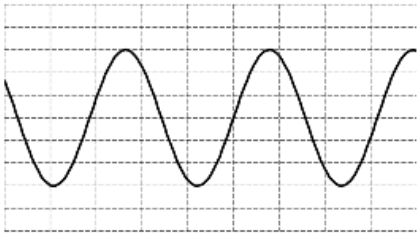
$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

(e-Funktion)



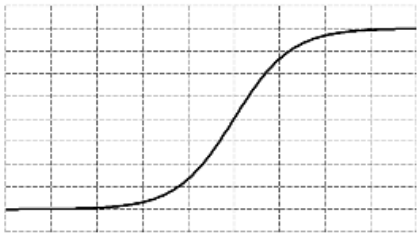
Potenzfunktion

$f(x) = a \cdot x^b$



Sinus-Funktion

$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x + c)) + d$



Logistische Funktion

$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-k \cdot x}}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(1) Aufgabe: Medikament

Die nachfolgende Tabelle zeigt die Konzentration $c(t)$ in Milligramm pro Liter $\left[\frac{\text{mg}}{\text{l}}\right]$ eines Medikamentes im Blut eines Patienten in Abhängigkeit von der Zeit t in Stunden [h].

t in h	0	1	2	3	4	5
c in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$	10,4	6,3		2,9	2,1	

a) **Geben** Sie eine exponentielle Funktion zur Beschreibung der Konzentration des Medikamentes im Laufe der Zeit **an**.

b) **Bestimmen** Sie mit der gewählten Funktion die in der Tabelle fehlenden Werte.

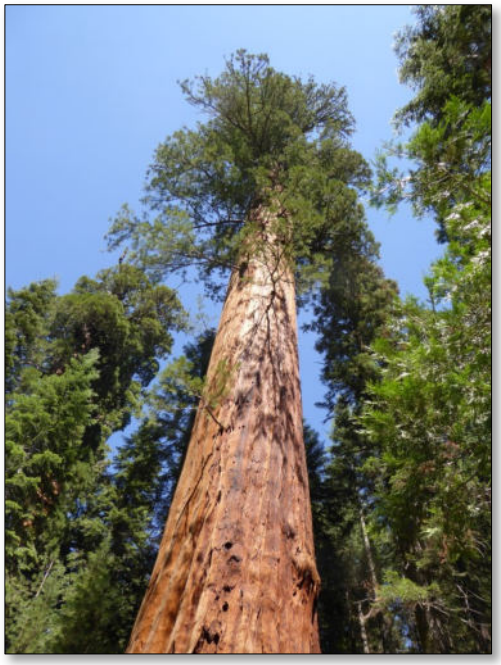
c) **Bestimmen** Sie, wann die Konzentration des Medikamentes unter die Nachweisgrenze von $0{,}1\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gefallen ist.

(2) Aufgabe: Baumwachstum

Mithilfe der Jahresringe kann an einem gefällten Baum ermittelt werden, wie schnell dieser gewachsen ist. Dabei zeigte sich bei einem Baum der folgende Zusammenhang zwischen dem Alter t in Jahren [a] und dem Umfang $u(t)$ in Metern [m] des Baumes:

t in a	25	50	75	100
$u(t)$ in m	0,465	1,273	2,485	3,389

t in a	125	150	175	200
$u(t)$ in m	3,768	3,899	3,944	3,952



Betrachten Sie die Graphen einer exponentiellen und einer logistischen Funktion zur Beschreibung des Baumwachstums im Laufe der Zeit.

Entscheiden Sie, welche der beiden Funktionen im Kontext besser geeignet ist.

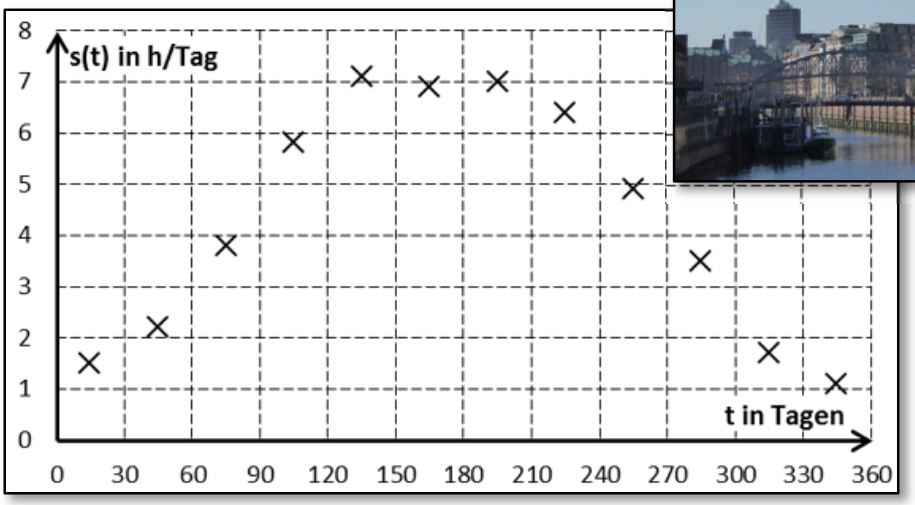
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Aufgabe: Sonnenscheindauer

Das folgende Diagramm zeigt die durchschnittliche Sonnenscheindauer pro Tag $\left[\frac{\text{h}}{\text{Tag}}\right]$ in Hamburg innerhalb eines Jahres.





t in Tagen	15	45	75	105	135	165	195	225	255	285	315	345
$s(t)$ in $\frac{\text{h}}{\text{Tag}}$	1,5	2,2	3,8	5,8	7,1	6,9	7	6,4	4,9	3,5	1,7	1,1

a) **Bestimmen** Sie eine quadratische Funktion, eine ganzrationale Funktion vierten Grades und eine Sinus-Funktion (im Gradmaß) zur Beschreibung der Sonnenscheindauer pro Tag im Laufe eines Jahres.

b) **Entscheiden** Sie, welche der Funktionen im Kontext besser geeignet ist.

c) **Berechnen** Sie die Anzahl der Sonnenstunden in einem Jahr in Hamburg.

(4) Aufgabe: Elektrischer Widerstand von Silizium

Bei einem Physikversuch wird eine Siliziumscheibe mit einem Föhn erhitzt und ihr Widerstand in Ohm [Ω] bei verschiedenen Temperaturen in Grad Celsius [℃] gemessen:

Temperatur in ℃	30	40	60	70	80	90	100
Widerstand in Ω	47 000	32 000	16 000	8 000	6 000	4 000	4 000

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Bestimmen** Sie eine quadratische Funktion und eine Exponentialfunktion zur Beschreibung des Widerstandes in Abhängigkeit von der Temperatur.

b) **Entscheiden** Sie, welche der beiden Funktionen im Kontext besser geeignet ist.

c) **Berechnen** Sie die maximale prozentuale Abweichung der Messwerte von den durch die Funktion prognostizierten Werten.

d) **Berechnen** Sie mit der gewählten Funktion den Widerstand bei 50 °C und bei 120 °C.



(5) Aufgabe: Bevölkerung in Hamburg

In der Tabelle ist die Bevölkerungszahl für Hamburg (jeweils im Dezember) angegeben.
Quelle: Statistisches Amt für Hamburg und Schleswig-Holstein

2012	**2013**	**2014**	**2015**	**2016**	**2017**
1 734 272	1 746 342	1 762 791	1 787 408	1 810 438	1 830 584
2018	**2019**	**2020**	**2021**	**2022**	**2023**
1 841 179	1 847 253	1 852 478	1 853 935	1 892 122	1 910 160

Berechnen Sie Prognosen für die Bevölkerungsentwicklung der folgenden Jahre auf Grundlage dieser Daten und **bewerten** Sie Ihr Modell. Verändern Sie gegebenenfalls Ihr Modell.

(6) Aufgabe: Verbreitung eines viralen Videos im Internet

Das Musikvideo „Gangnam Style“ von Psy war das erste Video von dem erwartet wurde, dass es die Grenze von einer Milliarde Zugriffen auf Youtube überschreiten würde. Im Oktober 2012 konnten die folgenden Daten über die Zugriffe erstellt werden:

Tag	Jul 18	Jul 25	Aug 01	Aug 08	Aug 15	Aug 22	Aug 29	Sep 05
Zugriffe in Millionen	1	3	9	17	35	52	98	108

Tag	Sep 12	Sep 19	Sep 26	Okt 03	Okt 10	Okt 17	Okt 24	Okt 31
Zugriffe in Millionen	153	204	263	352	403	471	530	590

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

a) **Bestimmen** Sie eine logistische Funktion und eine Exponentialfunktion zur Beschreibung der Zugriffe auf das Musikvideo.

b) **Entscheiden** Sie, welche der beiden Funktionen im Kontext besser geeignet ist.

c) **Berechnen** Sie, wann mit der gewählten Funktion voraussichtlich eine Milliarde Zugriffe erreicht werden.

d) **Recherchieren** Sie, wann diese Grenze tatsächlich erreicht wurde, und **vergleichen** Sie dieses Datum mit Ihrer Berechnung.

(7) Aufgabe: LEGO®-Steine

Recherchieren Sie für eine genügend große Anzahl LEGO®-Baukästen die Anzahl der enthaltenen Steine und die jeweiligen (Listen-) Preise. Nutzen Sie hierfür am besten die Internetseite www.Lego.de.

Untersuchen Sie die Daten nach selbst gestellten Fragestellungen.

(8) Aufgabe: Regression und Interpolation

Die beiden mathematischen Methoden der Regression und der Interpolation eignen sich dazu, auf der Basis von angegebenen Daten bzw. Bedingungen mathematische Funktionsgleichungen aufzustellen, die den Verlauf des zugehörigen Graphen beschreiben. Jedoch sind die beiden Methoden in unterschiedlichen Situationen anzuwenden.

Beschreiben Sie, was eine Regression beziehungsweise eine Interpolation leistet. Betrachten Sie dabei auch die Vor- und Nachteile sowie die Frage, wann sich die jeweilige Methode eignet.

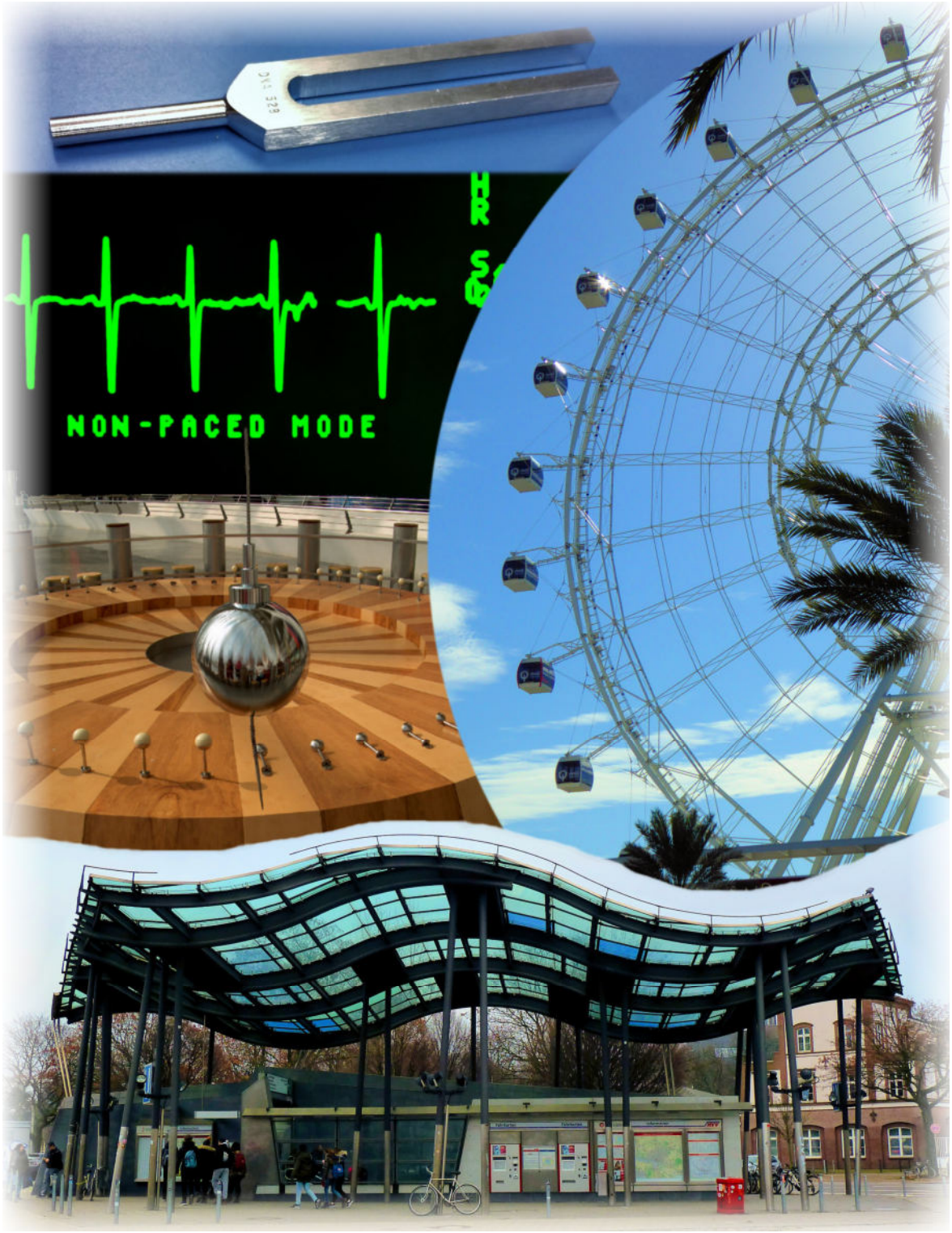
Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Bestimmen einer passenden Regressionsfunktion
- ❑ Interpretieren von Gütemaßen
- ❑ Bewerten eines mathematischen Modells

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einstieg in das Thema trigonometrische Funktionen



Quellen: Stimmgabel – Foto von auntmasako, 2016 verändert, public domain | EKG - Foto von Vera Kratochvil, verändert, public domain | Pendel - Foto von Daniel Sancho, 2005, verändert, creativecommons.org/licenses/by/2.0/

(1) Aufgabe zum Einstieg

Beschreiben Sie die Abbildung, **nennen** Sie Gemeinsamkeiten und formulieren Sie zu den Bildern Fragestellungen, welche sich mithilfe von Mathematik beantworten lassen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

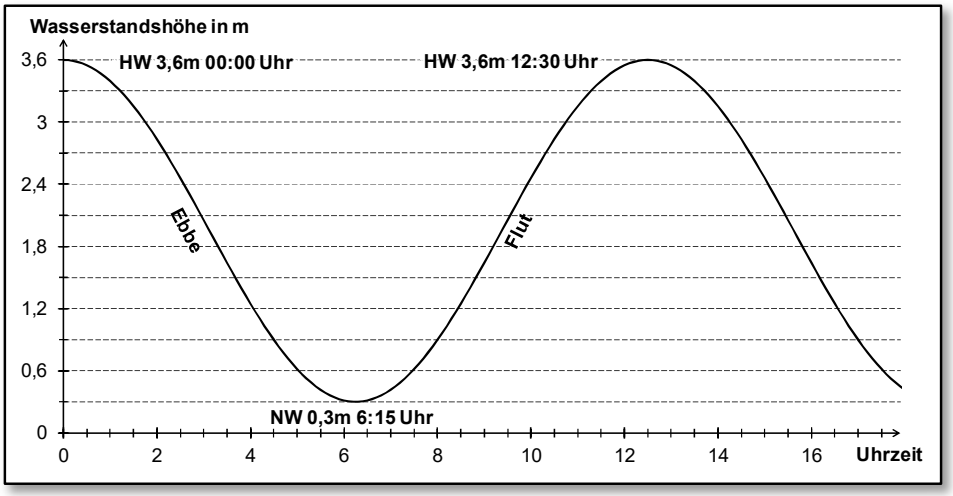
Trigonometrische Funktionen - Von sich wiederholenden Vorgängen zu periodischen Funktionen

(2) Aufgabe: Wattwanderung vor Cuxhaven 1



Das Watt ist die Küstenzone, die sich durch die Gezeiten (Ebbe und Flut) zeitweise unter Wasser befindet, zeitweise aber auch nicht vom Meer bedeckt ist. Bei Wanderungen durch das Watt ist es gefährlich, wenn Wanderer plötzlich von der herannahenden Flut überrascht werden, daher sind Kenntnisse über die Zeiten von Hoch- und Niedrigwasser wichtig. Für die Vorhersage der Gezeiten der kommenden Tage kann aus den heutigen Daten von Hochwasser (HW) und Niedrigwasser (NW) ein mathematisches Modell erstellt werden.

Das folgende Diagramm zeigt den aktuellen Verlauf des Wasserstandes in Metern [m] abhängig von der Zeit in Stunden [h]:



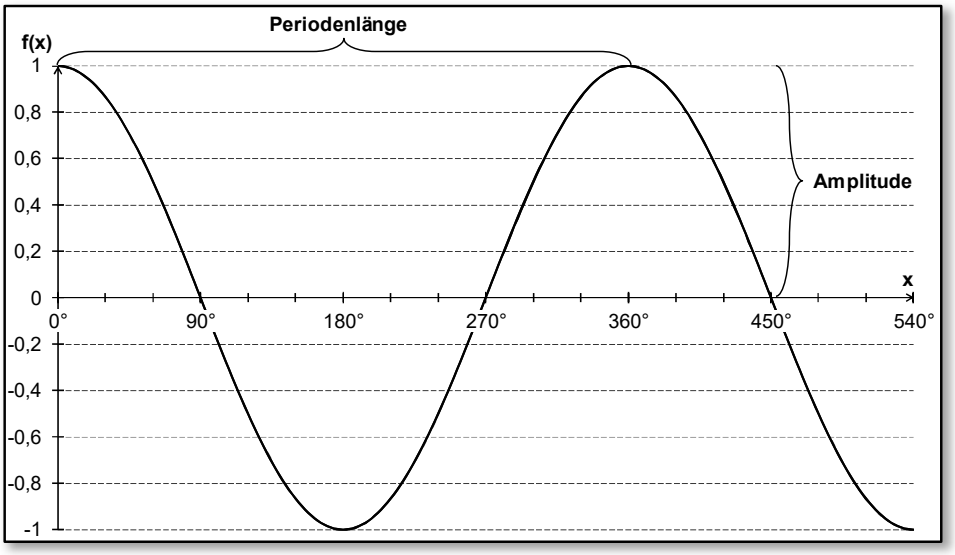
Da es sich bei Ebbe und Flut um sich ständig wiederholende Vorgänge handelt, eignet sich zur Modellierung des Sachverhaltes am besten eine trigonometrische Funktion (Sinus-Funktion oder Cosinus-Funktion). Trigonometrische Funktionen sind *periodisch*, das heißt, dass sich die Funktionswerte in regelmäßigen Abständen wiederholen.

Im Folgenden sollen durch Veränderung der Parameter einer Cosinus-Funktion die Gezeiten möglichst genau modelliert werden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Graph der Cosinus-Funktion $f(x) = cos(x)$ hat im Gradmaß folgendes Aussehen:



Die *Periodenlänge* bezeichnet den horizontalen Abstand zwischen zwei Maxima oder zwei Minima. Die *Amplitude* ist der halbe vertikale Abstand zwischen einem Maximum und einem Minimum.

Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x) = cos(x)$ und **vergleichen** Sie ihn mit dem oben gezeigten Graphen, der den Wasserstandsverlauf beschreibt. **Nennen** Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind. *Hinweis:* Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

Wirkung des Parameters a

Untersuchen Sie die Funktion $f_a(x) = a \cdot cos\,(x)$ mithilfe eines CAS, eines Funktionenplotters oder einer Tabellenkalkulation. Setzen Sie hierfür verschiedene Werte für Parameter a ein und betrachten Sie die Veränderungen des Graphen. Achten Sie darauf, dass die Einstellung Gradmaß (je nach System: Grad, degree, DEG) gewählt ist.

Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen der Funktion $f_a(x)$ für verschiedene Werte des Parameters a (zum Beispiel $a = 2$; $a = 3$; $a = \frac{1}{2}$; …).

Bestimmen Sie den Parameter a so, dass die Funktion $f_a(x)$ den Wasserstandsverlauf besser beschreibt, als die Ausgangsfunktion $f(x)$ dies tut.

Wirkung des Parameters d

Für die genauere Beschreibung wird ein weiterer Parameter d hinzugefügt.

Untersuchen Sie die Funktion $f_d(x) = a \cdot cos(x) + d$ wie in der vorherigen Aufgabe. Wählen Sie a zunächst so, wie vorher von Ihnen festgelegt.

Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen der Funktion $f_d(x)$ für verschiedene Werte d.

Bestimmen Sie den Parameter d so, dass die Funktion $f_d(x)$ den Wasserverlauf besser beschreibt, als $f_a(x)$ dies tut. Verändern Sie, falls nötig, auch den Wert des Parameters a noch einmal.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Wirkung des Parameters b

Beschreiben Sie, welche Eigenschaften des Wasserstandsdiagramms durch Ihre Funktion $f_d(x)$ noch nicht gut modelliert wird.

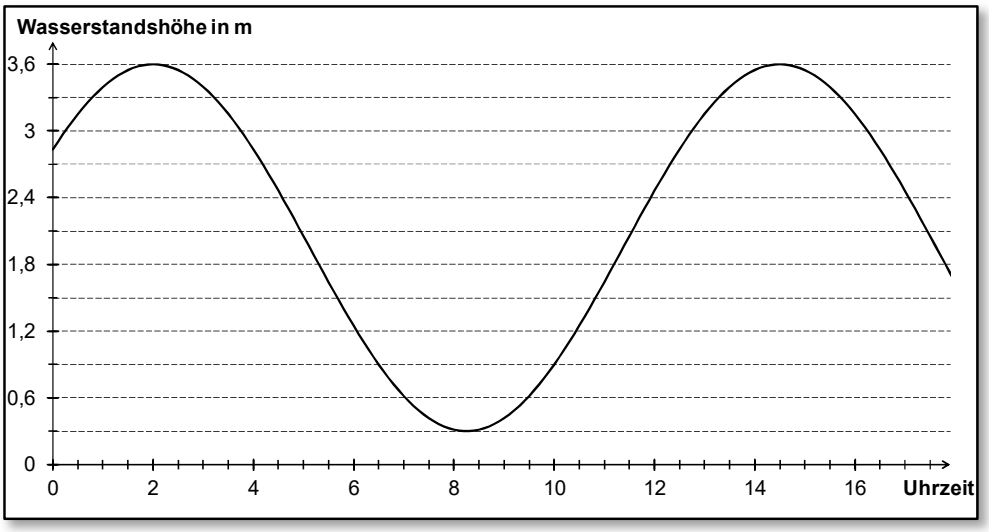
Untersuchen Sie die Wirkung des Parameters b in der Funktion $f_b(x) = a \cdot cos(b \cdot x) + d$. Wählen Sie wiederum die Parameter a und d wie vorher festgelegt.

Beschreiben Sie die Auswirkungen von Parameter b auf den Graphen und **bestimmen** Sie die Parameter a, b und d so, dass $f_b(x)$ den oben beschriebenen Sachkontext genau beschreibt.

Bestimmen Sie mithilfe Ihrer Funktion $f_b(x)$ den Wasserstand um 18 Uhr.

(3) Aufgabe: Wattwanderung vor Cuxhaven 2

Für einen anderen Tag ergibt sich folgendes Wasserstandsdiagramm:



a) **Vergleichen** Sie dieses Wasserstandsdiagramm mit dem aus Aufgabe 2.

Auch diese Funktion soll modelliert werden.

Der Ansatz ist wiederum: $f(x) = a \cdot cos(b \cdot x) + d$.

b) **Begründen** Sie, warum für die Parameter gilt: $a = 1{,}65$, $d = 1{,}95$ und $b = 28{,}8$.

Das spätere Eintreten des Hochwassers lässt sich durch die folgende Funktionsgleichung modellieren.

$$f_c(x) = 1{,}65 \cdot cos\big(28{,}8 \cdot (x + c)\big) + 1{,}95$$

c) **Untersuchen** Sie die Auswirkungen der drei vorgegebenen Werte für den Parameter c auf den Graphen:

$$c_1 = 1 \qquad c_2 = 0 \qquad c_3 = -2$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

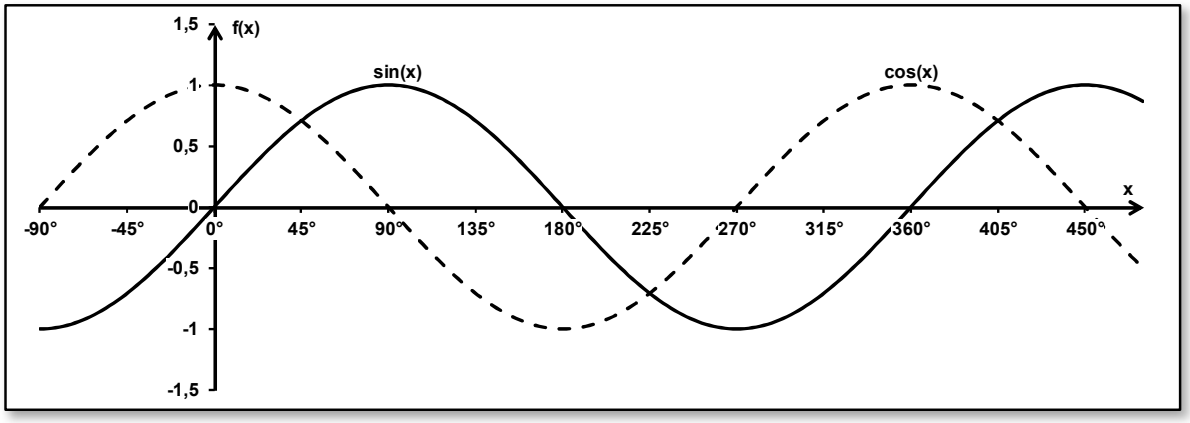
Sinus- und Cosinus-Funktion

Eine weitere trigonometrische Funktion ist die Sinus-Funktion, die der Cosinus-Funktion sehr ähnlich ist. Zwei wichtige Charakteristika von trigonometrischen Funktionen sind die Periodenlänge und die Amplitude. Die Periodenlänge bezeichnet den horizontalen Abstand zwischen zwei Maxima oder zwei Minima. Die Amplitude ist der halbe vertikale Abstand zwischen einem Maximum und einem Minimum.

Für die Cosinus- und die Sinus-Funktion gilt, dass der Wert der Amplitude der unveränderten Funktion 1 beträgt und dass der Wert der Periodenlänge der unveränderten Funktion 360° ist.

Der einzige Unterschied zwischen den beiden Funktionen besteht darin, dass die Sinus-Funktion eine um 90° nach rechts verschobene Cosinus-Funktion ist (beziehungsweise die Cosinus-Funktion eine um 90° nach links verschobene Sinus-Funktion ist).

Dieser Zusammenhang wird in der folgenden Abbildung noch einmal deutlich:



Genau hingeschaut: Herleitung der Sinus- und Cosinus-Funktion

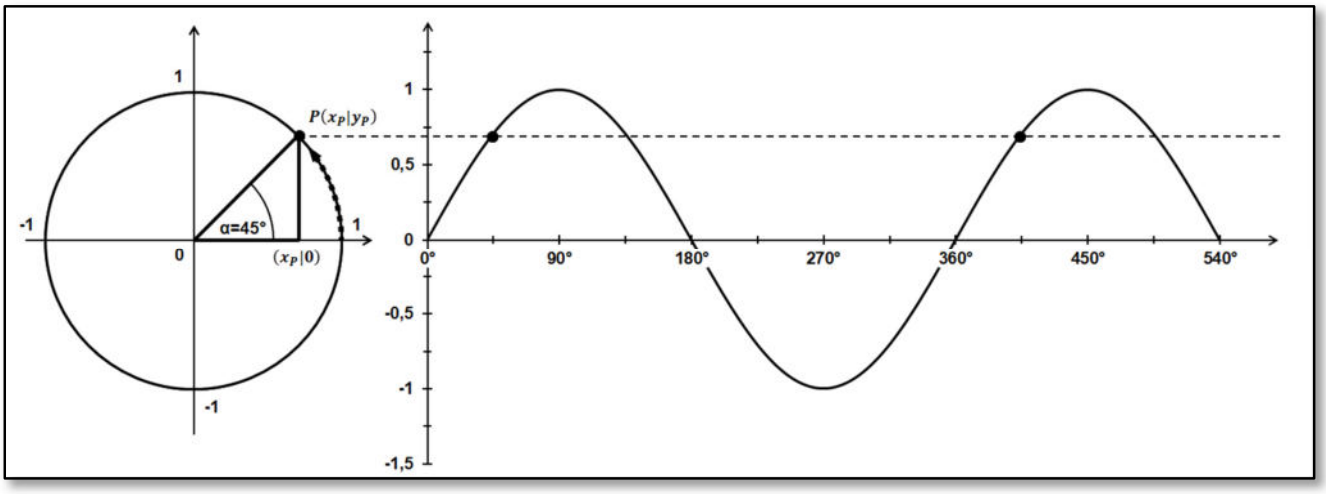
Sowohl die Sinus-Funktion als auch die Cosinus-Funktion lassen sich mithilfe des sogenannten Einheitskreises herleiten. Als Einheitskreis bezeichnet man einen Kreis mit Radius $r = 1$.

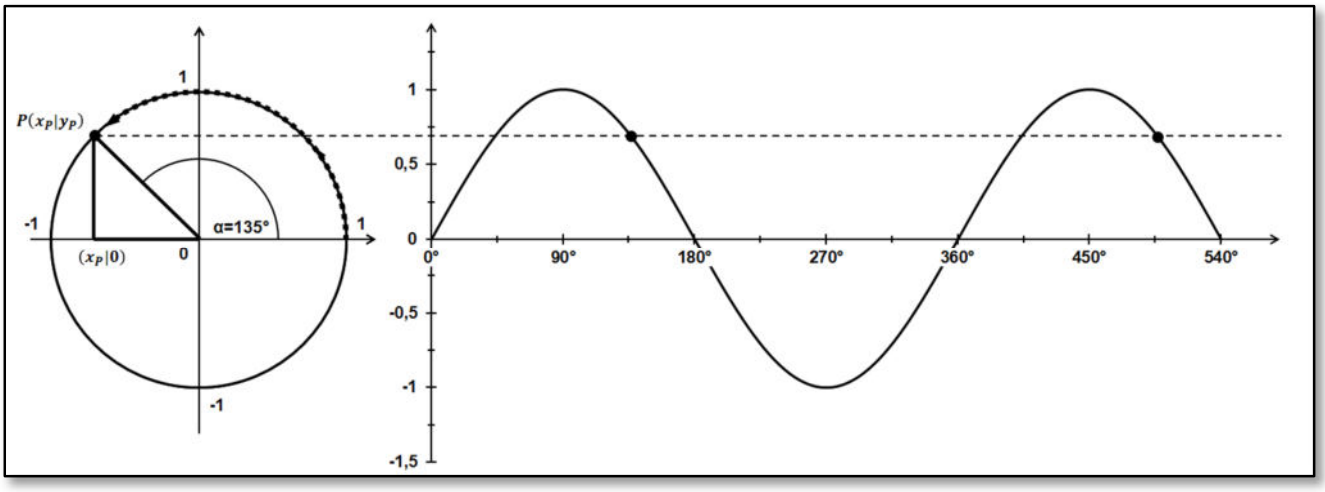
Man stellt sich vor, dass sich ein Punkt P mit den Koordinaten $(x_p|y_P)$ abhängig vom Winkel $\propto$ auf dem Kreisbogen gegen den Uhrzeigersinn bewegt. Der Winkel $\propto$ ist dabei der Winkel, der sich zwischen der x-Achse und der Verbindungslinie von Koordinatenursprung $(0|0)$ zu Punkt P ergibt.

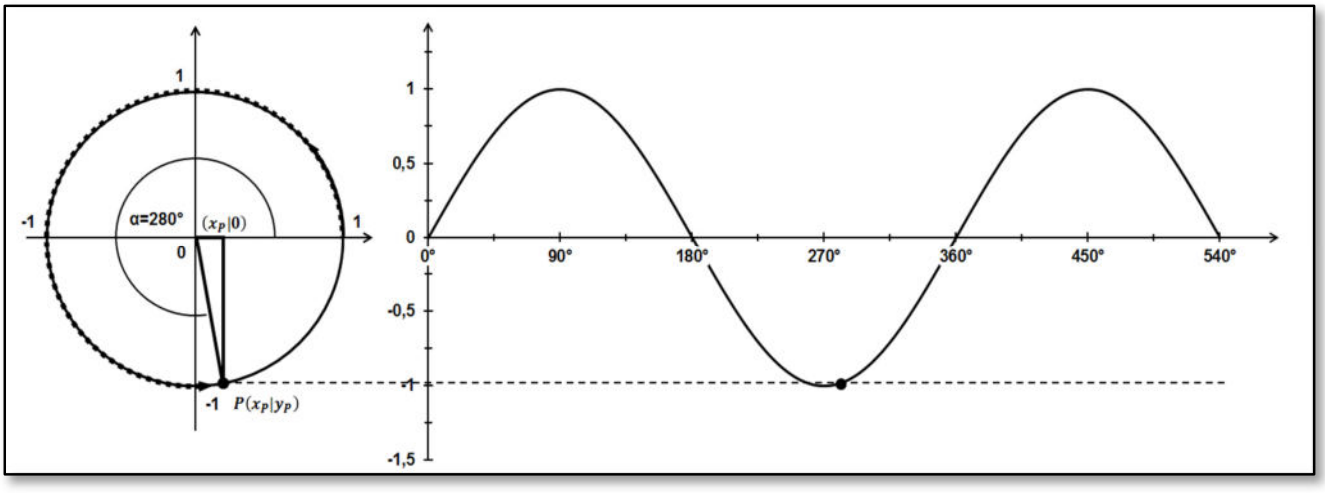
Die Bewegung des Punktes P startet dabei im Punkt $(1|0)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.







Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Betrachtet wird jeweils das rechtwinklige Dreieck, das sich durch den Punkt $P(x_p|y_P)$, Punkt $(x_p|0)$ und den Ursprung $(0|0)$ ergibt. Dabei ist α der Winkel am Koordinatenursprung, die zugehörige Gegenkathete entspricht der Höhe des Punktes P, also y_p und die Hypotenuse entspricht dem Radius $r = 1$.

Aus der Definition des Sinus ergibt sich:

$$\sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse} = \frac{y_P}{r} = \frac{y_P}{1} = y_P$$

Zu jedem Winkel α ergibt sich somit eine zugehörige Höhe des Punktes P, die dem Sinus des Winkels α entspricht.

Die oben abgebildeten Graphen zeigen die Abhängigkeit der Höhe vom Winkel α, dargestellt durch eine Funktion.

Diese Funktion wird beschrieben durch die folgende Funktionsgleichung: $f(x) = sin\,(x)$.

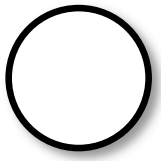
Die Cosinus-Funktion lässt sich analog durch die Betrachtung der Ankathete und des Wertes x_P herleiten:

$$\cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse} = \frac{x_P}{r} = \frac{x_P}{1} = x_P$$

Gradmaß und Bogenmaß

Das Bogenmaß ist ein anderes Einheitensystem, um die Größe eines Winkels anzugeben. Während im Gradmaß ein voller Kreis dem Winkel 360° entspricht, geht das Bogenmaß von der Kreisumfangsformel $u = 2 \cdot \pi \cdot r$ aus.

Bei einem sogenannten Einheitskreis mit dem Radius $r = 1$ hat der Umfang daher die Länge $u = 2 \cdot \pi \cdot r = 2 \cdot \pi \cdot 1 = 2 \cdot \pi$. Der Vollwinkel $2 \cdot \pi$ im Bogenmaß entspricht also 360° im Gradmaß. Hieraus lassen sich nun alle anderen Winkelgrößen berechnen.

Visualisierung				
Winkel im Gradmaß	360°	270°	180°	90°
Winkel im Bogenmaß	2π	$\frac{3}{4} \cdot 2\pi = \frac{3}{2}\pi$	$\frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi$	$\frac{1}{4} \cdot 2\pi = \frac{1}{2}\pi$

Die Betrachtung von trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß erleichtert die Bearbeitung von Fragestellungen der Differential- und Integralrechnung.

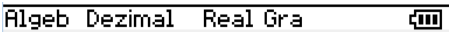
Wenn es nicht anders angegeben ist, wird von nun an das Bogenmaß verwendet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

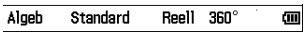
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

Umstellung des Winkelmaßes

Casio ClassPad: In der Statuszeile 

mit dem Stift auf **Gra** → **Gon** → **Bog** → **Gra** klicken.

Casio ClassPad II: In der Statuszeile 

zwischen **360°** → **400** → **2π** → **360°** wechseln.

Geogebra: Einstellungen → Erweitert → Winkeleinheit (Grad oder Radiant)

TI-Nspire CAS: Einstellungen → Dokumenteneinstellungen → Winkel (Bogenmaß, Grad oder Neugrad)

MathBox im CASten

Im Englischen heißen die Winkelmaße radian (rad; Bogenmaß), degree (deg, Gradmaß) und grad (gra, Neugrad / Gon). Achtung: Die Einstellung **Gra** hat je nach eingestellter Sprache unterschiedliche Bedeutungen!

(4) Übungsaufgabe: Umrechnung von Bogen- und Gradmaß

Berechnen Sie die Winkel im fehlenden Winkelmaß.

Visualisierung				
Winkel im Gradmaß	120°		45°	1°
Winkel im Bogenmaß		$\frac{1}{3}\pi$		

Parameter einer trigonometrischen Funktion

Wie in der Aufgabe zur Wattwanderung (Seite 105) deutlich wurde, gibt es vier Parameter zur Anpassung einer Sinus- und Cosinus-Funktion, die auf unterschiedliche Eigenschaften der Funktion Einfluss nehmen.

Für die Parameter in den allgemeinen Funktionsgleichungen

der Cosinus-Funktion $f(x) = a \cdot cos\big(b \cdot (x + c)\big) + d$

und der Sinus-Funktion $g(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x + c)\big) + d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ gilt jeweils:

Parameter a

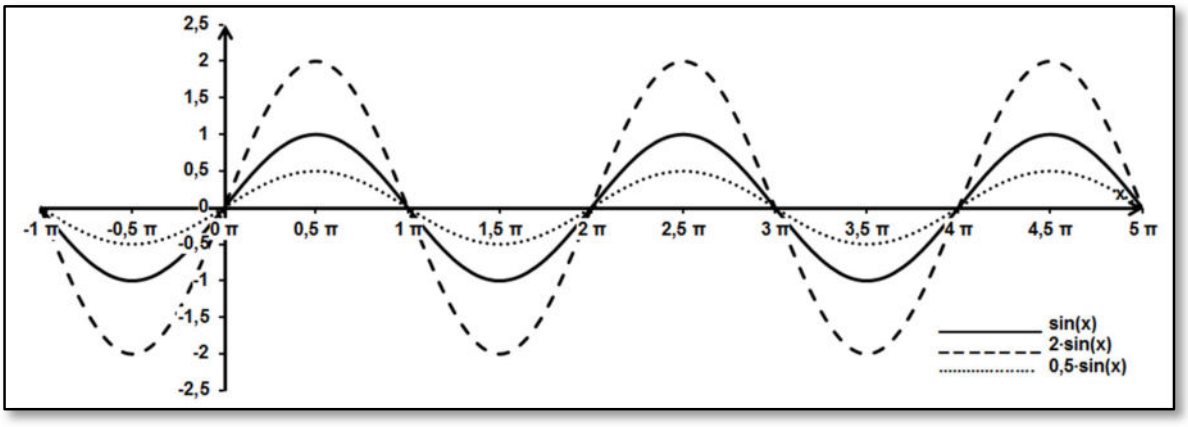
Der Parameter a gibt den Wert der Amplitude an und stellt somit eine Streckung oder Stauchung der Funktion in y-Richtung dar.

Der Parameter a berechnet sich mithilfe der folgenden Formel: $a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$.

Hierbei ist y_{max} der y-Wert eines Maximums und y_{min} der y-Wert eines Minimums.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Parameter b

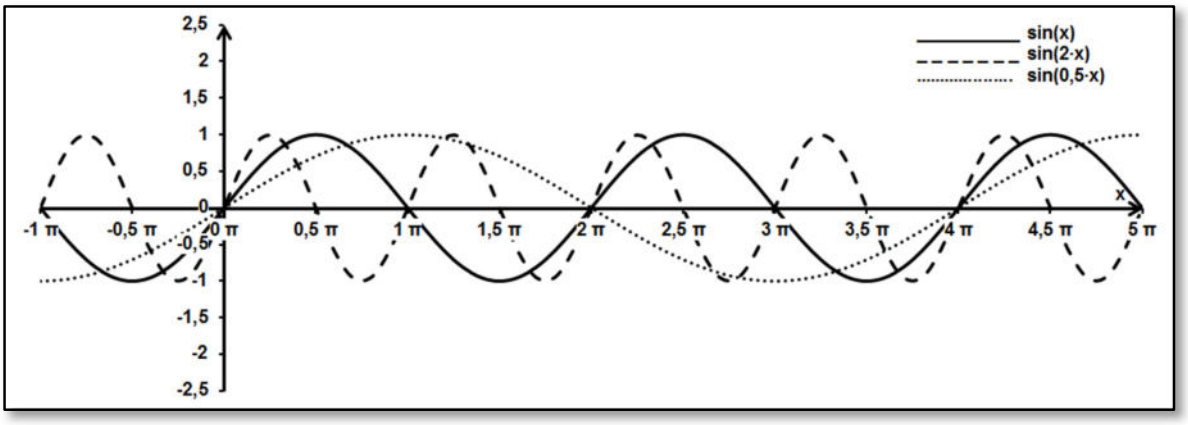
Der Parameter b beeinflusst die Periodenlänge p der Funktion und stellt somit eine Streckung oder Stauchung in x-Richtung dar.

Ist $0 < b < 1$, so vergrößert sich die Periodenlänge p. Die Funktion wird also in x-Richtung gestreckt.

Ist $b > 1$, so verringert sich die Periodenlänge p. Die Funktion wird also in x-Richtung gestaucht.

Im Bogenmaß berechnet sich der Parameter b mithilfe der folgenden Formel: $b = \frac{2\pi}{p}$.

Im Gradmaß gilt die folgende Formel: $b = \frac{360°}{p}$.



Parameter c

Der Parameter c verschiebt den Graphen der Funktion entlang der x-Achse.

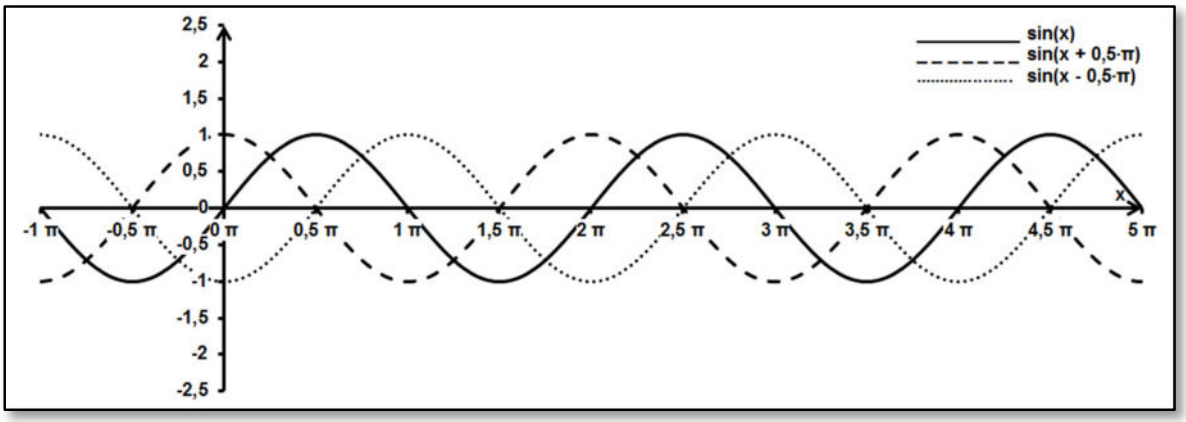
Ist $c > 0$, so wird der Graph um $|c|$ nach links verschoben.

Ist $c < 0$, so wird der Graph um $|c|$ nach rechts verschoben.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

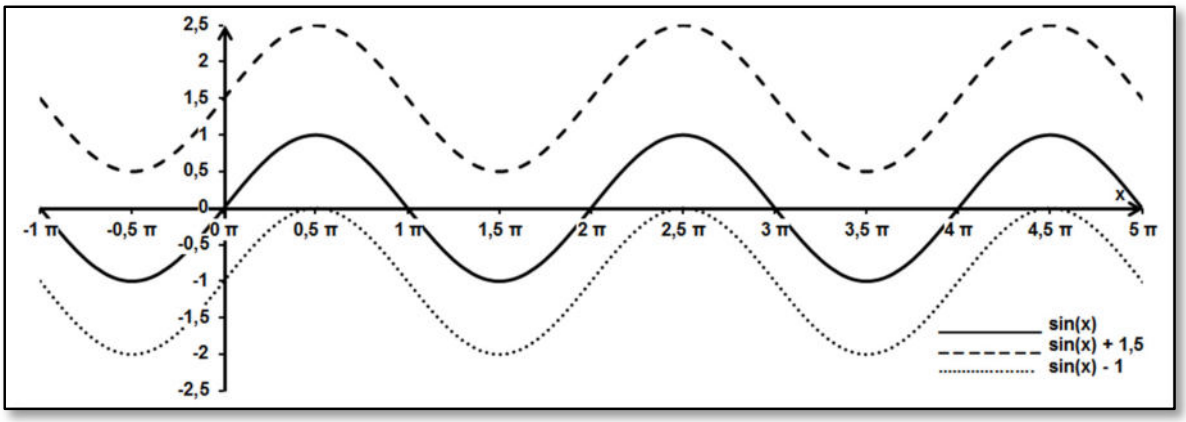
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Parameter c berechnet sich für die Sinus-Funktion mithilfe der folgenden Formel:
$c = -x_{min} - \frac{p}{4}$ beziehungsweise $c = -x_{max} + \frac{p}{4}$.
Der Parameter c berechnet sich für die Cosinus-Funktion mithilfe der folgenden Formel:
$c = -x_{min} - \frac{p}{2}$ beziehungsweise $c = -x_{max}$.
Hierbei ist x_{max} der x-Wert eines Maximums, x_{min} der x-Wert eines Minimums und p die Periodenlänge.



Parameter d

Der Parameter d verschiebt den Graphen der Funktion entlang der y-Achse.
Ist $d > 0$, so wird der Graph um $|d|$ nach oben verschoben.
Ist $d < 0$, so wird der Graph um $|d|$ nach unten verschoben.
Der Parameter d berechnet sich mithilfe der folgenden Formel: $d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2}$.
Hierbei ist y_{max} der y-Wert eines Maximums und y_{min} der y-Wert eines Minimums.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

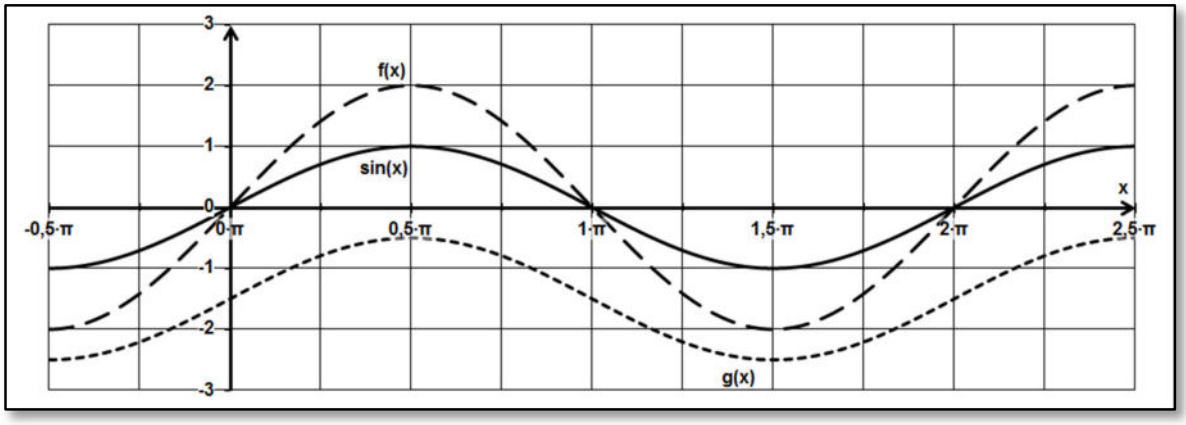
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Übungsaufgabe: Modellieren von Funktionen

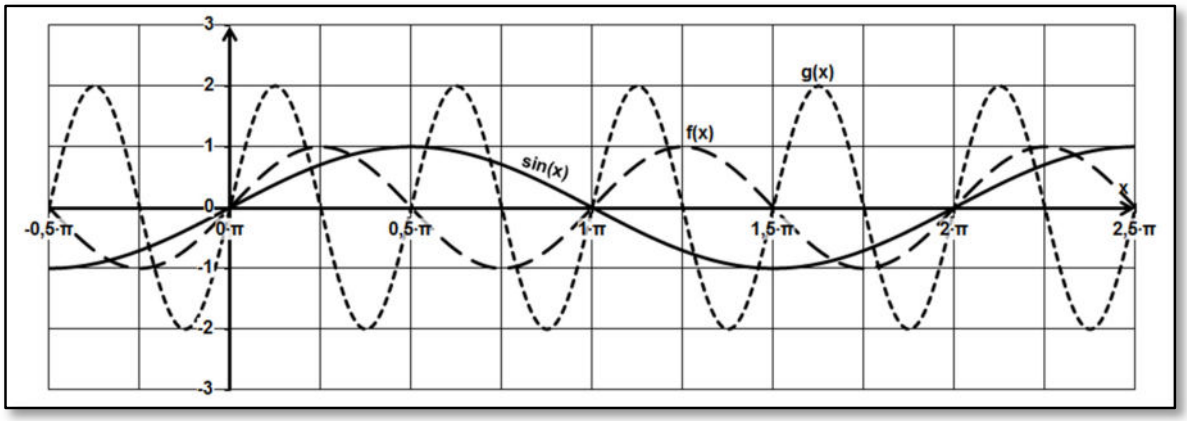
In den folgenden Abbildungen ist jeweils der Graph der Funktion $sin(x)$ als durchgängige Linie gezeichnet.

Bestimmen Sie die Funktionsgleichungen der beiden weiteren abgebildeten Graphen im Bogenmaß.

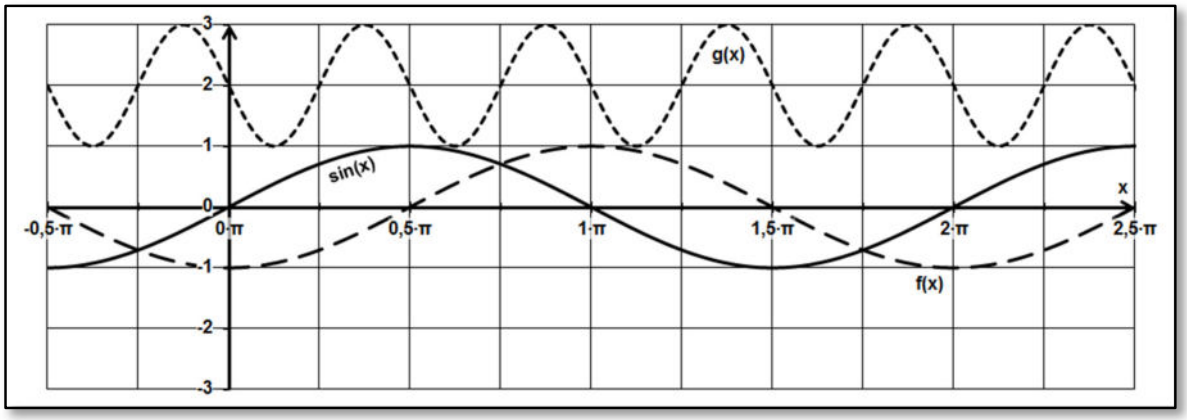
a)



b)



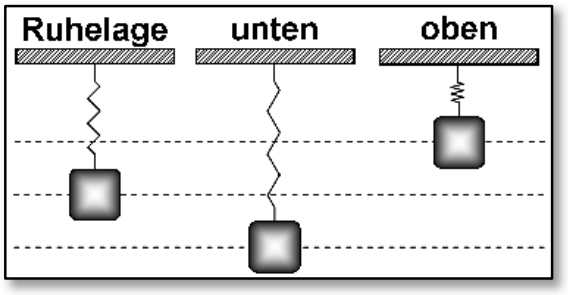
c)



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Harmonische Schwingung eines Federpendels



In der Physik wird die Schwingung eines Federpendels idealisiert mithilfe einer Sinus-Funktion beschrieben.

Die Funktion $s(t)$ gibt dabei die Auslenkung s des Pendelkörpers in Zentimetern [cm] aus der Ruhelage ($s = 0$) in Abhängigkeit von der Zeit t in Sekunden [s] an.

Bei einem Versuch wird ein Pendel um -5 cm aus der Ruhelage nach unten ausgelenkt und dann losgelassen (Zeitpunkt $t = 0$). Das Pendel schwingt innerhalb von $0{,}2$ s bis zur maximalen Auslenkung nach oben.

a) **Skizzieren** Sie die Bewegung des Pendelkörpers vom Moment des Loslassens an.

b) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung $s(t)$ zur Beschreibung der Pendelbewegung im Bogenmaß.

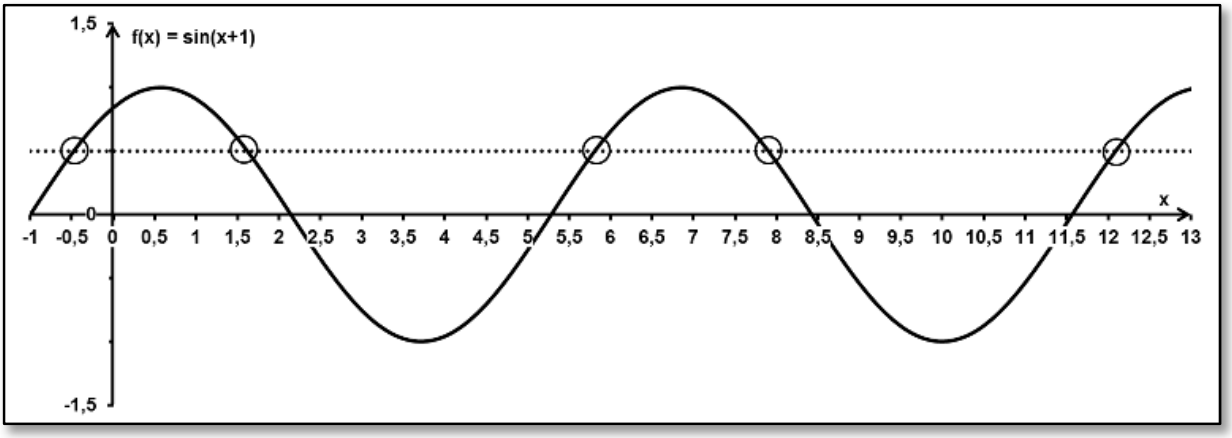
c) **Berechnen** Sie die Auslenkung des Pendels nach $t = 3{,}75$ s.

d) **Bestimmen** Sie, zu welchem Zeitpunkt das Pendel eine Auslenkung von 2 cm nach oben hat.

Gleichungen lösen, die trigonometrische Funktionen enthalten

Um einen x-Wertes zu einem gegebenen Funktionswert einer trigonometrischen Funktion im Bogenmaß zu bestimmen (wie dies im Aufgabenteil d) zur Federpendelschwingung der Fall war) muss eine Gleichung gelöst werden. Aufgrund der Periodizität von trigonometrischen Funktionen treten dabei unendlich viele Lösungen auf.

Die Herangehensweise wird exemplarisch an der Gleichung $sin(x) = 0{,}5$ gezeigt:



$$\begin{aligned} sin(x+1) &= 0{,}5 \\ x+1 &= sin^{-1}(0{,}5) \\ x+1 &= \frac{\pi}{6} \\ x &= \frac{\pi}{6} - 1 \approx -0{,}476 \end{aligned}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Dies ist nur eine der unendlich vielen Lösungen. Diese Lösung wird im Folgenden als x_L bezeichnet. Anschaulich ist klar, dass sich diese Lösung immer im Abstand von einer Periodenlänge (in diesem Beispiel 2π) wiederholt. Das heißt, weitere Lösungen sind:

$x_L + 2\pi = \frac{\pi}{6} - 1 + 2\pi,\ \ x_L + 4\pi = \frac{\pi}{6} - 1 + 4\pi,\ \ x_L + 6\pi = \frac{\pi}{6} - 1 + 6\pi \ldots,$

sowie $x_L - 2\pi$, $x_L - 4\pi$ …

Für die unendlich vielen Lösungen lässt sich allgemein notieren: $\{x = x_L + k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\}$

Bei einer anderen Periodenlänge p gilt allgemein: $\{x = x_L + k \cdot p \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\}$

Zwischen je zwei Lösungen liegt in der Regel noch eine weitere Lösung, die sich durch die folgende Formel berechnen lässt: $\{x = \frac{p}{2} - x_L - 2 \cdot c + k \cdot p \text{ mit } k \in \mathbb{Z}\}$. Das c ist hierbei der Parameter c aus der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x + c)\big) + d$.

Im Beispiel oben ist $c = 1$.

CASten

Interpretation der Lösungsmenge trigonometrischer Funktionen

Casio ClassPad II: Der ClassPad nutzt zur Darstellung unendlich vieler Lösungen die Platzhalter **`constn(1)`**, **`constn(2)`**,… welche für die ganzen Zahlen stehen.

Beispiel: **`solve(sin(x)=0.5)`**

`{x=2·π·constn(1)+ π/6,x=2·π·constn(2)+5·π/6}`

Durch Einsetzen von 0, 1, 2, … anstelle von **`constn()`** erhält man die Lösungen:
2 · π · 0 + π/6 und 2 · π · 0 + 5 · π/6 und 2 · π · 1 + π/6 und 2 · π · 1 + 5 · π/6 und …

Geogebra: Geogebra nutzt den Platzhalter $\mathbf{k_1}$.

Beispiel: **`Löse(sin(x)=0.5)`**

$$\left\{x = 2k_1\pi + \frac{1}{6}\pi, x = 2k_1\pi + \frac{5}{6}\pi\right\}$$

TI Nspire CAS: Der TI-Nspire nutzt den Platzhalter $\mathbf{n_1}$.

Beispiel: **`solve(sin(x)=0.5,x)`**

$$x = 6.28319 \cdot n_1 + 0.523599 \ or \ x = 6.28319 \cdot n_1 + 2.61799$$

(7) Übungsaufgaben: Gleichungen lösen

Berechnen Sie für die folgenden Gleichungen die allgemeine Lösungsmenge und **geben** Sie je vier konkrete Lösungen **an**.

a) $sin(x - 2) = 0{,}2$

b) $sin(2x + 3) = -0{,}4$

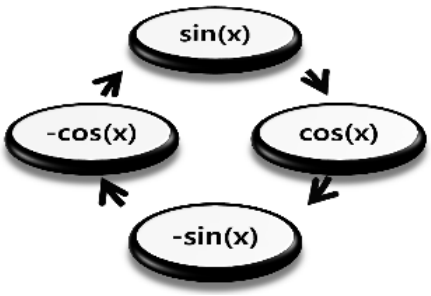
c) $4 \cdot cos\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + 3 = 2{,}9$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Ableitungen der trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß

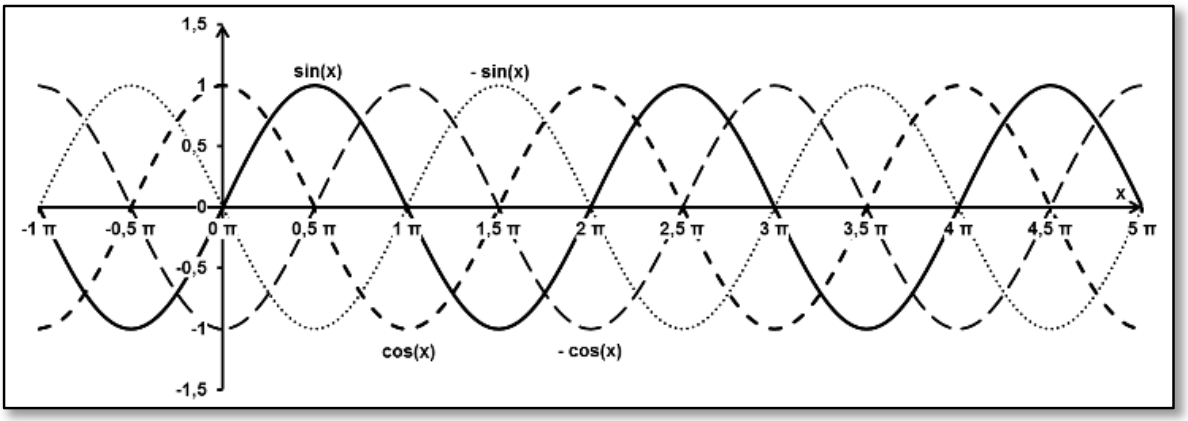
In der Aufgabe zur harmonischen Schwingung eines Federpendels ist nicht nur die Funktion $s(t)$ von Interesse, sondern auch die Ableitung $s'(t) = v(t)$, die die Geschwindigkeit des Pendelkörpers zu jedem Zeitpunkt angibt.



Die Ableitung einer trigonometrischen Funktion ist wieder eine trigonometrische Funktion.

Dabei gilt im Bogenmaß:

Funktion	$sin(x)$	$cos(x)$	$-sin(x)$	$-cos(x)$
Ableitung	$cos(x)$	$-sin(x)$	$-cos(x)$	$sin(x)$



(8) Aufgabe: Ableitungen verketteter Funktionen

In realen Anwendungssituationen wird auch die Ableitung von trigonometrischen Funktionen benötigt, deren Parameter verändert wurden. Im Folgenden sind einige dieser Funktionen mit ihren Ableitungen notiert.

Vergleichen Sie die Funktionen mit ihren zugehörigen Ableitungsfunktionen und **formulieren** Sie eine allgemeine Regel zur Bildung der Ableitung einer trigonometrischen Funktion im Bogenmaß.

Funktion	$sin(2x)$	$cos(5x)$	$sin(0{,}5x) + 1$	$2 \cdot sin(4x + 3) - 5$	$sin(x^2)$
Ableitung	$2 \cdot cos(2x)$	$-5 \cdot sin(5x)$	$0{,}5 \cdot cos(0{,}5x)$	$8 \cdot cos(4x + 3)$	$2x \cdot cos(x^2)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Ableitung verketteter Funktionen (Kettenregel)

Gegeben sind die beiden Funktionen $g(x)$ und $h(x)$. Wendet man zunächst die Funktion g auf x an und wendet man anschließend die Funktion h auf $g(x)$ an, so entsteht eine neue Funktion f mit $f(x) = h(g(x))$.

Die Funktion heißt Verkettung von g und h. Man sagt h ist die **äußere Funktion** und g ist die **innere Funktion**.

Bildet man die Ableitung dieser verketteten Funktion, so gilt: $f'(x) = g'(x) \cdot h'(g(x))$.

Merksatz:

„**Innere** Funktion **ableiten mal äußere** Funktion **ableiten** und **innere** Funktion **hineinschreiben.**“

Beispiel 1: $g(x) = x^2 + 3x$ und $h(x) = sin(x)$.

Verkettet man die beiden Funktionen, dann ergibt sich:

$f(x) = h\big(g(x)\big) = sin(x^2 + 3x)$

Die Ableitung:

$f'(x) = g'(x) \cdot h'\big(g(x)\big) = (2x + 3) \cdot cos\,(x^2 + 3x)$

Beispiel 2: $f(x) = cos^2(x) = (cos\,(x))^2$

Die innere Funktion ist $g(x) = cos(x)$ und die äußere Funktion ist $h(x) = x^2$.

Nach dem Merksatz ist die Ableitung:

$f'(x) = -\,sin(x) \cdot 2 \cdot \cos(x) = -2 \cdot sin(x) \cdot cos(x)$

Hinweis: Die trigonometrischen Funktionen werden jeweils im Bogenmaß betrachtet.

(9) Übungsaufgabe: Ableitung bestimmen

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 2 \cdot sin(3x - 4)$

b) $f(x) = -cos(4x)$

c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot cos(-2x^3 - \pi) + 6$

d) $f(x) = -7 \cdot cos(x^6) + 3x$

e) VERDACH?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil d) lautet:

$f'(x) = 7 \cdot cos(6x^5) + 3.$

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(10) Aufgabe: Tageslängen in Hamburg



Es wird in dieser Aufgabe vereinfacht angenommen, dass ein Jahr 360 Tage lang ist.

In der folgenden Tabelle sind die durchschnittlichen Tageslängen (Zeit zwischen Sonnenauf- und -untergang) der Stadt Hamburg in Stunden [h] abzulesen:

Tag	**0**	**15**	**30**	**45**	**60**	**75**	**90**	**105**	**120**
Tageslänge in h	7,57	8,02	8,93	9,82	10,85	11,85	13,07	14,05	15,12

Tag	**135**	**150**	**165**	**180**	**195**	**210**	**225**	**240**
Tageslänge in h	15,93	16,72	17,03	16,95	16,52	15,67	14,80	13,67

Tag	**255**	**270**	**285**	**300**	**315**	**330**	**345**
Tageslänge in h	12,68	11,57	10,60	9,75	8,60	7,85	7,50

a) **Skizzieren** Sie den Graphen der gesuchten Funktion.

b) **Bestimmen** Sie mithilfe der bekannten Formeln den Funktionsterm einer Funktion im Bogenmaß, deren Graph den Tageslängenverlauf näherungsweise beschreibt.

c) **Erläutern** Sie die kontextbezogene Bedeutung der Parameter a, b und d.

d) **Berechnen** Sie die Zeitspanne, in der die Tageslänge mehr als 8 Stunden beträgt.

An einem Tag im Jahr nimmt die Tageslänge so stark zu, wie in keinem anderen Tag. Die Veränderung von Tageslängen und Lichtverhältnissen erfordert dabei von dem menschlichen Körper ein hohes Maß an Umstellungs- und Anpassungsarbeit. Insbesondere in der Übergangsphase vom Winter zum Frühling müssen sich die Konzentrationen von Hormonen wie Melatonin („Schlafhormon“) und Serotonin („Glückshormon“) im Blut neu einpegeln.

e) **Bestimmen** Sie den Tag, an dem der menschliche Körper in besonderem Maße von dieser Hormonumstellung betroffen ist.

f) **Berechnen** Sie die durchschnittliche Tageslänge im Sommer (Juni bis August).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Stammfunktion zur Sinusfunktion im Bogenmaß

Eine Stammfunktion einer trigonometrischen Funktion der Form

$$f(x) = a \cdot sin(b \cdot (x + c)) + d$$

lautet:

$$F(x) = -\frac{a}{b} \cdot cos\big(b \cdot (x + c)\big) + d \cdot x$$

(11) Übungsaufgabe: Berechnen von Integralwerten von trigonometrischen Funktionen

Berechnen Sie die folgenden Integralwerte (alle Funktionen im Bogenmaß).

a) $\int_{-1}^{3} 4 \cdot sin\,(2 \cdot (x + 3))\,dx$

b) $\int_{2}^{4} 9 \cdot cos\,(3 \cdot (x - 7))\,dx$

c) $\int_{0}^{\pi} -10 \cdot sin(5x) + 2\,dx$

(12) Aufgabe: Klima in Hamburg

In der folgenden Tabelle sind die durchschnittlichen Temperaturen in Grad Celsius [℃] (unter Berücksichtigung von Höchst- und Tiefsttemperaturen) der Stadt Hamburg abzulesen:

Monat	**Jan.**	**Feb.**	**März**	**April**	**Mai**	**Juni**
t	0	1	2	3	4	5
Temperatur in ℃	0,45	1,2	3,9	7,65	12,2	15,55

Monat	**Juli**	**Aug.**	**Sept.**	**Okt.**	**Nov.**	**Dez.**
t	6	7	8	9	10	11
Temperatur in ℃	17	16,95	13,95	10	5,25	1,9

a) **Skizzieren** Sie den Graphen der gesuchten Funktion.

b) **Bestimmen** Sie mithilfe der bekannten Formeln den Funktionsterm einer Funktion im Bogenmaß, deren Graph den Temperaturverlauf näherungsweise beschreibt. **Begründen** Sie Ihren Ansatz.

c) **Bestimmen** Sie die Zeitspanne, in der Temperaturen von über 15 °C zu erwarten sind.

d) **Bestimmen** Sie nach Ihrem Modell die Jahresdurchschnittstemperatur.

e) **Bewerten** Sie, inwieweit sich Ihr Modell eignet, um das Klima in Hamburg langfristig zu beschreiben.

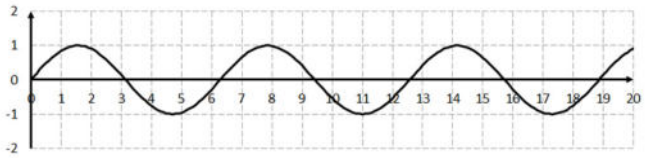
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

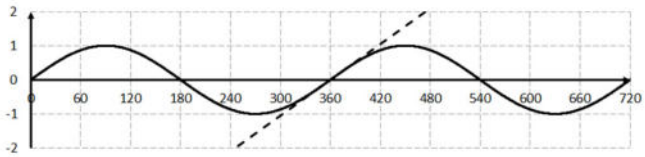
Genau hingeschaut: Ableitung der Sinus-Funktion im Gradmaß

Im Bogenmaß beträgt die Periodenlänge einer Sinus-Funktion 2π. Im Gradmaß hingegen ist die Periodenlänge größer und hat den Wert $360°$.

Betrachtet wird zunächst eine Sinus-Funktion im Bogenmaß. Bereits anhand der Abbildung lässt sich ablesen, dass die Steigung der Funktion an den Wendestellen, beispielsweise bei $x = 0$ oder $x = 2\pi$ den Wert 1 hat.



Eine Sinus-Funktion im Gradmaß hingegen hat in den Wendestellen beispielsweise bei $x = 0°$ oder $x = 360°$ eine wesentlich geringere Steigung. Näherungsweise lässt sich die Steigung mit Hilfe einer Tangente und einem geeigneten Steigungsdreieck ermitteln. Die Tangente verläuft in etwa durch die Punkte $P_1(300|-1)$ und $P_2(420|1)$.



Ausgehend von diesen Daten beträgt die Steigung $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{1-(-1)}{420-300} = \frac{2}{120} = \frac{1}{60} \approx 0{,}017$.

Der Wert der Steigung lässt sich exakt ermitteln, wenn eine Sinus-Funktion im Gradmaß durch eine Sinus-Funktion im Bogenmaß mathematisch beschrieben wird. Dieses Vorgehen ist sinnvoll, da die Ableitung einer Sinus-Funktion im Bogenmaß bekannt ist.

Bei einer Sinus-Funktion der Form $f(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x + c)\big) + d$ sind die Werte für die Parameter a, c und d unabhängig von der Betrachtung der Funktion im Grad- oder Bogenmaß identisch. Lediglich der Parameter b muss angepasst werden.

Der Parameter b ergibt sich aus $b = \frac{2\pi}{p}$ mit $p = 360$. Daraus folgt: $b = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

Die Sinus-Funktion im Bogenmaß, die eine Sinus-Funktion im Gradmaß mathematisch beschreibt, lautet: $f(x) = sin\left(\frac{\pi}{180}x\right)$. Die Ableitung hiervon lautet: $f'(x) = \frac{\pi}{180} \cdot cos\left(\frac{\pi}{180}x\right)$

Wird die Variable x im Gradmaß betrachtet, so muss lediglich der Parameter b angepasst werden. Es ergibt sich die folgende Ableitung: $f'(x) = \frac{\pi}{180} \cdot cos(x)$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Sinus- und Cosinus-Funktion
- ❑ Periodenlänge
- ❑ Amplitude
- ❑ Einheitskreis
- ❑ Bogenmaß und Gradmaß
- ❑ Parameter einer trigonometrischen Funktion
- ❑ Lösen von trigonometrischen Gleichungen
- ❑ Ableitung von trigonometrischen Funktionen im Bogenmaß
- ❑ Kettenregel
- ❑ Stammfunktion der Sinusfunktion im Bogenmaß
- ❑ *Ableitung von trigonometrischen Funktionen im Gradmaß*

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einstieg in das Thema Exponentialfunktion



Quellen: Petrischale – Foto von Sylvia Olson (USAF), verändert, public domain
E.Coli Bakterien – Foto von NIAID, verändert, creativecommons.org/licenses/by/2.0/ | Alphazerfall – Grafik von Inductiveload, 2007, verändert, public domain

(1) Aufgabe zum Einstieg

Beschreiben Sie die Abbildung und formulieren Sie zu den Bildern Fragestellungen, welche sich mithilfe von Mathematik beantworten lassen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Exponentialfunktion - Von Wachstums- und Zerfallsprozessen zu funktionalen Zusammenhängen

(2) Aufgabe: Ausbreitung von Ebola



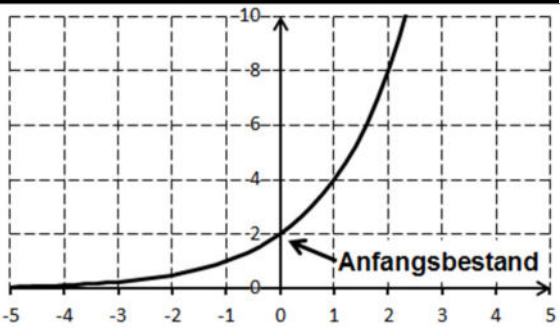
Gesundheitsaufklärung - Foto von CDC Global, 2014, CC BY 2.0 | Isolationsstation - Foto von CDC Global, 2014, CC BY 2.0 | Rasterelektronenmikroskop-Aufnahme: Ebola Virus - Aufnahme von Mikrobiologe Frederick A. Murphy (CDC Global), 2014, CC BY 2.0 | Medizinisches Forschungsinstitut der US Navy - Foto von US Army Africa, 2014, CC BY 2.0

Das Ebola-Fieber ist eine ansteckende Infektionskrankheit, die von Mensch zu Mensch, von Tieren auf den Menschen oder über kontaminierte Gegenstände übertragen wird. Die Ansteckungsgefahr variiert zwischen den unterschiedlichen Virusarten. Im Folgenden soll die Ausbreitung einer Ebola-Epidemie modelliert werden.

Es wird davon ausgegangen, dass für die untersuchte Virusart die Anzahl der erkrankten Personen pro Woche um 20% steigt. Zu Beginn der Modellierung sind bereits 3000 Menschen an dem Virus erkrankt.

a) **Berechnen** Sie die Anzahl der erkrankten Personen nach 4, nach 6 und nach 10 Wochen.
b) **Berechnen** Sie den Zeitpunkt, zu dem alle Menschen weltweit infiziert sind. *Hinweis:* Recherchieren Sie gegebenenfalls fehlende Daten.
c) **Diskutieren** Sie, inwieweit diese Modellierung realistisch ist.

Exponentialfunktion zur Basis b



Im Allgemeinen lassen sich Wachstums- oder Zerfallsprozesse, bei denen der Bestand pro Zeitschritt um einen festen Faktor zu- oder abnimmt, durch eine Exponentialfunktion modellieren.

Die allgemeine Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion zur Basis b lautet:

$$f(x) = a \cdot b^x$$

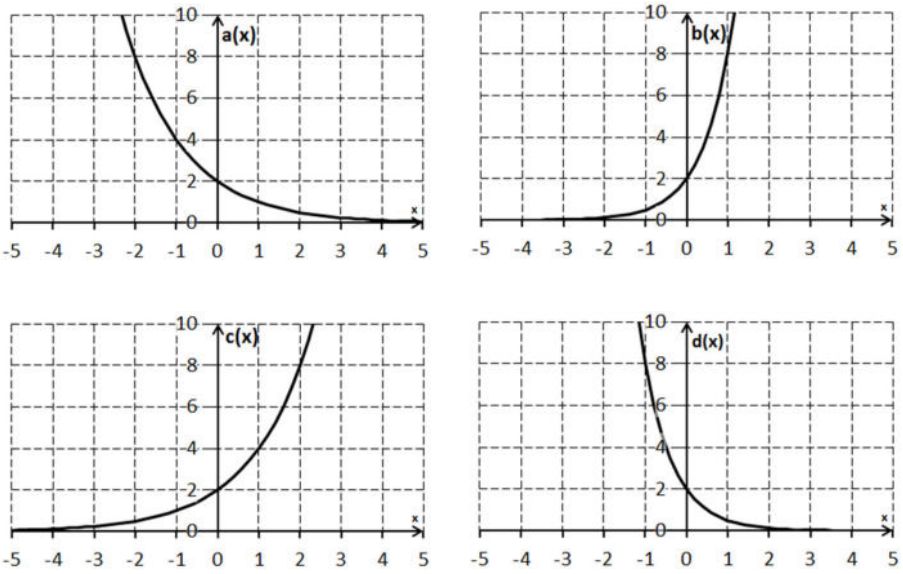
Dabei bezeichnet a den *Anfangsbestand* ($f(0) = a \cdot b^0 = a \cdot 1 = a$) und b den *Wachstums-* oder *Zerfallsfaktor*.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Aufgabe: Graphen zuordnen

a) **Ordnen** Sie die vier Funktionsgleichungen der Form $f(x) = a \cdot b^x$ den entsprechenden Graphen **zu**.



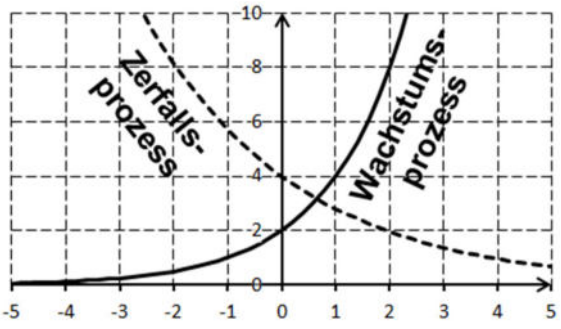
$e(x) = 2 \cdot 2^x$ $\quad f(x) = 2 \cdot 4^x$ $\quad g(x) = 2 \cdot 0{,}5^x$ $\quad h(x) = 2 \cdot 0{,}25^x$

b) **Beschreiben** Sie, welchen Einfluss der Parameter b auf den Verlauf des Graphen hat. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

Wachstumsfaktor

Die Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ beschreibt einen Wachstumsprozess für alle $b > 1$ und einen Zerfallsprozess für alle $0 < b < 1$ mit $b \in \mathbb{R}$.



Wird die Zunahme oder Abnahme des exponentiellen Wachstums bzw. Zerfalls mit einem Prozentsatz angegeben, so bezeichnet man sie als die Wachstumsrate $p\%$. Mit ihr kann man den Wachstumsfaktor b wie folgt bestimmen: $b = 1 + \frac{p}{100}$.

Andersherum gilt: $p = (b - 1) \cdot 100$

Bei einer exponentiellen Abnahme ist die Wachstumsrate p negativ und damit der Wachstumsfaktor b kleiner als 1.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Übungsaufgaben: Parameter aus dem Kontext angeben

a) In einer Petrischale befinden sich 150 Bakterien einer E. coli Kultur, deren Anzahl sich pro Stunde verdoppelt.

Berechnen Sie die Anzahl der Bakterien nach 3 und nach 4,5 Stunden.

b) Ein Elternpaar hat 2023 einen Betrag von 1000 € zur Geburt ihres Kindes zu einem Prozentsatz von 3% jährlich angelegt.

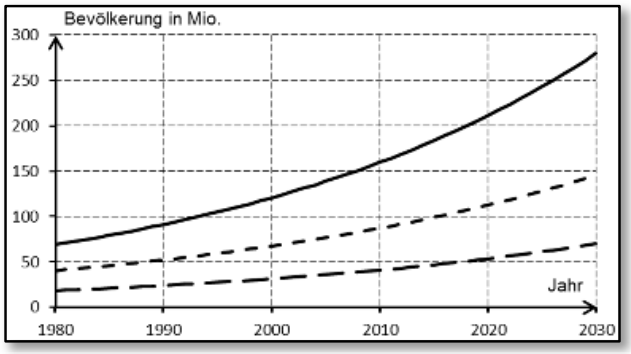
Berechnen Sie das Guthaben zum achtzehnten Geburtstag des Kindes.

c) Eine beliebige Menge des radioaktiven Schwefelisotops 35S halbiert sich innerhalb von ungefähr 87,5 Tagen. In einem Labor sind 3 Gramm des Elements vorhanden.

Berechnen Sie die voraussichtlich verbleibende Stoffmenge nach einem Jahr.

(5) Aufgabe: Entwicklung der Weltbevölkerung

Für die Modellierung zukünftiger Bevölkerungszahlen von Entwicklungsländern eignen sich besonders gut Exponentialfunktionen.



Berechnen Sie in den folgenden drei Teilaufgaben unter Annahme eines exponentiellen Bevölkerungswachstums die Anzahl der Menschen in Nigeria, Äthiopien und Kenia im Jahr 2030.



Karte von Afrika - mapswire.com, verändert, CC-BY 4.0

a) In Nigeria lebten nach Schätzungen der Weltbank 2021 insgesamt 213,4 Millionen Menschen und im Jahr 2022 insgesamt 218,5 Millionen Menschen.

b) In Äthiopien lebten laut Schätzungen der Weltbank 2021 insgesamt 120,3 Millionen und 2023 insgesamt 126,5 Millionen Menschen.

c) In Kenia lebten laut Schätzungen der Weltbank 2018 insgesamt 50 Millionen und 2022 insgesamt 54 Millionen Menschen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Exponentialfunktion anhand zweier Wertepaare erstellen

Da die allgemeine Exponentialfunktion $f(x) = a \cdot b^x$ von genau zwei Parametern abhängig ist, wird jede Exponentialfunktion eindeutig durch zwei Bedingungen festgelegt.

Am Beispiel der Teilaufgabe c) aus den Aufgaben zur Entwicklung der Weltbevölkerung (Seite 125) wird die Berechnung der Parameter a und b verdeutlicht:
In der Aufgabe sind die beiden Wertepaare $(2018\,|50)$ und $(2022\,|54)$ gegeben.

Daraus ergeben sich die beiden folgenden Gleichungen:

$$f(2018) = a \cdot b^{2018} = 50$$
$$f(2022) = a \cdot b^{2022} = 54$$

Durch Umformen der ersten Gleichung erhält man a:

$$f(2018) = a \cdot b^{2018} = 50 \;\Rightarrow\; a = \frac{50}{b^{2018}}$$

Durch Einsetzen des Terms für a in die zweite Gleichung erhält man für b:

$$\frac{50}{b^{2018}} \cdot b^{2022} = 54$$
$$50 \cdot b^4 = 54 \qquad |:50$$
$$b^4 = \frac{54}{50} \approx 1{,}08 \qquad |\sqrt[4]{\ }$$
$$b = \sqrt[4]{1{,}08} \approx 1{,}019426547$$

Dann ergibt sich durch Einsetzen des Wertes für b in die nach a umgeformte erste Gleichung:

$$a = \frac{50}{b^{2018}} = \frac{50}{1{,}019426547^{2018}} = 6{,}8657 \cdot 10^{-16}$$

Somit lässt sich die Entwicklung von Kenias Bevölkerung durch die Funktionsgleichung $f(t) = a \cdot b^t = 6{,}8657 \cdot 10^{-16} \cdot 1{,}019426547^t$ mit t in Jahren beschreiben.

Ein alternativer Weg wäre, das Jahr 2018 als Zeitpunkt Null zu betrachten. Damit ergibt sich:

$$f(0) = a \cdot b^0 = 50 \Rightarrow a = 50$$
$$f(4) = 50 \cdot b^4 = 54 \Rightarrow b^4 = \frac{54}{50} \Rightarrow b = \sqrt[4]{1{,}08} \approx 1{,}019426547$$



Mithilfe eines CAS lassen sich a und b auch durch Lösen des oben aufgestellten Gleichungssystems direkt bestimmen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Abbau eines Lokalanästhetikums

Um bei einer Zahnbehandlung das Schmerzempfinden zu reduzieren, wird der zu behandelnde Zahn mit 80 Milligramm [mg] eines Lokalanästhetikums betäubt. Nach einer halben Stunde sind erfahrungsgemäß noch 70 Milligramm des Medikaments vorhanden.

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung zur Beschreibung des Abbauprozesses des Lokalanästhetikums.

b) Bei den meisten Patienten kehrt ab einer Menge von 40 mg das Empfindungsvermögen wieder in den betäubten Zahn zurück. **Bestimmen** Sie diesen Zeitpunkt.

Exponentielle Gleichungen lösen

Zum Lösen von Gleichungen der Form $b^x = y$ wird der *Logarithmus* benötigt.

Die Logarithmusfunktion ist die Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion. Dies ist vergleichbar mit dem Wurzelziehen als Umkehroperation des Quadrierens ($\sqrt{x^2} = (\sqrt{x})^2 = x$).

Für den Logarithmus gilt:

$$b^x = y \Leftrightarrow x = log_b(y)$$

Man spricht $log_b(y)$ aus als „Logarithmus von y zur Basis b“.

CASten

Logarithmus: $log_b(y)$

Casio ClassPad II:	`log(b,y)`	oder Keyboard → Math1 → 
Geogebra:	`log(b,y)`	
TI-Nspire CAS:	`log(b,y)`	oder über die Tastatur: [ctrl] + [log]

(7) Übungsaufgabe: exponentielle Gleichungen lösen

Berechnen Sie x in den folgenden Gleichungen (falls nötig mit Hilfe des Taschenrechners).

a) $3^x = 81$
b) $2^x = 1024$
c) $7^x = 343$
d) $4^x = 22$
e) $2^x = 5$
f) $11^x = 51$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(8) Übungsaufgabe: Falten bis zum Mond



Stellen Sie sich vor, Sie könnten ein Blatt Papier beliebig oft genau in der Mitte falten.

Berechnen Sie, wie oft sie das Papier falten müssten, damit der Papierstapel so dick wäre, dass er bis zum Mond reicht. (*Hinweis:* Die Entfernung des Erdmondes beträgt im Mittel 384.400 km. Wählen Sie eine sinnvolle Papierdicke für Ihre Rechnung.)



Genau hingeschaut: Potenz- und Logarithmusgesetze

Zum Rechnen mit Logarithmen gelten folgende Gesetze, analog zu den Potenzgesetzen:

Logarithmusgesetze	Potenzgesetze
$log_b(b^r) = r$	$b^{log_b(x)} = x$
$log_b(x^r) = r \cdot log_b(x)$	$(b^s)^r = b^{s \cdot r}$
$log_b(x \cdot y) = log_b(x) + log_b(y)$	$b^x \cdot b^y = b^{x+y}$
$log_b\left(\frac{x}{y}\right) = log_b(x) - log_b(y)$	$b^{\frac{x}{y}} = b^{x-y}$
$log_b\left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \cdot log_b(x)$	$\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$
$log_b(1) = 0$	$b^0 = 1$
$log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$	

mit $x, y \in \mathbb{R}^+$; $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$; $n \in \mathbb{N}$; s, r $\in \mathbb{R}$.

(9) Übungsaufgabe: Anwendung der Logarithmusgesetze

Formen Sie die folgenden Terme mithilfe der Logarithmusgesetze um.

a) $log_a\left(\frac{c \cdot d}{e}\right)$

b) $log_a(f^3 \cdot g^5)$

c) $log_a\left(\sqrt{\frac{a}{h}}\right)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(10) Aufgabe: Wie alt ist der Ötzi?



Similaun in den Ötztaler Alpen - Foto von pajahoral, 2006, public domain

In den Ötztaler Alpen wurde 1991 in einem Gletscher die mumifizierte Leiche eines Mannes gefunden. Dieser Fund hat die Medien über einen langen Zeitraum beschäftigt und viele Rätsel um das Leben des „Ötzi“ aufgeworfen. Das Hauptinteresse galt natürlich dem Alter des Leichnams, denn bis dahin wurde angenommen, dass die Eisregionen der Alpen in der Vergangenheit von den Menschen gemieden wurden. Um das Alter historischer Funde zu bestimmen, nutzen Wissenschaftler die sogenannte C14-Methode. Diese wird im Folgenden erläutert.

Informationen zur C14-Methode / Radiokarbon-Datierung

Jeder Organismus, sei es eine Pflanze, ein Tier oder auch der Mensch, nimmt Zeit seines Lebens Kohlenstoff auf. Zwei dieser Kohlenstoffe sind das radioaktive ^{14}C-Isotop und das stabile ^{12}C-Isotop. Wenn ein Tier oder Mensch stirbt bzw. ein Baum gefällt oder eine Pflanze gepflückt wird, nimmt der jeweilige Organismus keinen Kohlenstoff mehr auf und die radioaktiven ^{14}C-Isotope in dem Organismus zerfallen exponentiell. Wissenschaftler nutzen dies zur Altersbestimmung von organischen Materialien. Dieses Verfahren wird Radiokarbon-Methode /-Datierung oder auch C14-Methode genannt.

Dabei untersucht man das Verhältnis zwischen der Anzahl der radioaktiven ^{14}C-Isotope und den stabilen ^{12}C-Isotopen in den verstorbenen Organismen. Das Verhältnis zwischen ^{14}C- und ^{12}C-Isotopen bezeichnen Wissenschaftler als die sogenannte ^{14}C-Konzentration. Die atmosphärische ^{14}C-Konzentration und somit auch die ^{14}C-Konzentration in lebenden Organismen beträgt ca. $1{,}2 \cdot 10^{-12}$. Die Halbwertszeit von ^{14}C-Isotopen beträgt 5730 Jahre.

a) **Bestimmen** Sie die Funktionsgleichung, die die ^{14}C-Konzentration in einem verstorbenen Organismus abhängig von der Zeit mathematisch beschreibt. *Hinweis:* Rechnen Sie ohne zu Runden mit dem exakten Wert der Basis weiter, da andernfalls die Folgeergebnisse starke Abweichungen aufweisen.

b) **Bestimmen** Sie in welchem Jahr der Ötzi ungefähr gestorben ist, wenn Wissenschaftler 1991 in einer Kohlenstoff-Probe eine ^{14}C-Konzentration von $6{,}9239 \cdot 10^{-13}$ festgestellt haben.

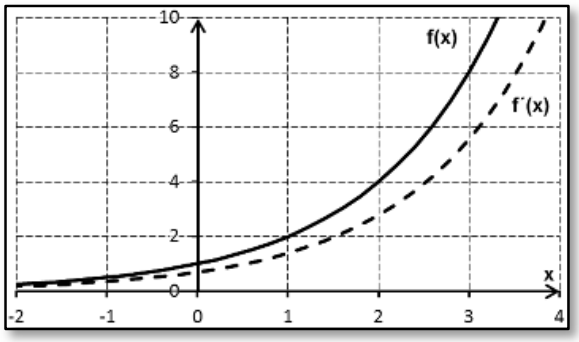
c) Die ältesten Mumienfunde stammen aus Chile und Peru. Diese Mumien aus der Atacamawüste werden auf das Jahr 7020 vor Christus datiert. **Bestimmen** Sie die ^{14}C-Konzentration, die diese Mumien im Jahr 2030 aufweisen müssten.

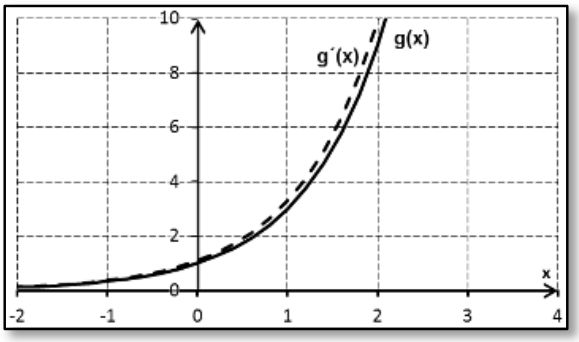
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Exponentialfunktionen zur Basis e und der natürliche Logarithmus

In den folgenden Abbildungen sind die Funktionen $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$ und ihre ersten Ableitungen eingezeichnet.





Man sieht, dass der Graph der Ableitungsfunktion von $f(x)$ unterhalb und der Graph der Ableitungsfunktion von $g(x)$ oberhalb der Ursprungsfunktion liegt. Folglich liegt es nahe, dass eine Exponentialfunktion existiert, deren Graph der Ableitungsfunktion genau auf der ursprünglichen Funktion liegt. Das bedeutet, dass eine Funktion $h(x)$ existiert, für welche die Ableitungsfunktion wieder $h(x)$ ergibt.

Die Basis der Exponentialfunktion, für welche dieses gilt, liegt demnach zwischen 2 und 3.

Der Wert ist $e \approx 2{,}71828182845$. Diese Zahl e wird als die Euler’sche Zahl bezeichnet (nach Leonard Euler; 1707 bis 1783).

Somit gilt für $h(x) = e^x$, dass $h'(x) = e^x$ ist. Diese Funktion wird als *e-Funktion* bezeichnet. Sie wird traditionell in den Naturwissenschaften zur Beschreibung von Wachstums- und Zerfallsvorgängen genutzt.

Die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion zur Basis e ist der natürliche Logarithmus ln. Es gilt:

$$log_e(x) = ln\,(x)$$

Diesen nutzt man zum Lösen von Gleichungen mit e-Funktionen.

Dann gilt:

$$e^x = y \Leftrightarrow x = ln(y)$$

Und damit gilt auch: $e^{ln\,(x)} = x$ und $ln(e^x) = x$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Wechsel von einer beliebigen Basis zur Basis e

Jede Exponentialfunktion zu beliebiger Basis b lässt sich in eine e-Funktion zur Basis e umformen. Die Umrechnung erfolgt mit $b = e^{ln\,(b)}$, so dass die Funktion $f(x) = a \cdot b^x$ sich umformen lässt zu $f(x) = a \cdot e^{ln\,(b) \cdot x}$.

Beispielsweise lässt sich in der Übungsaufgabe "Parameter aus dem Kontext bestimmen" (Seite 125) die Funktionsgleichung zur Beschreibung des Wachstums von E. coli Bakterien folgendermaßen in eine e-Funktion umformen:

$$f(t) = 150 \cdot 2^t = 150 \cdot e^{ln(2) \cdot t} = 150 \cdot e^{0{,}6931471806 \cdot t}$$

Auch lässt sich in der Aufgabe "Wie alt ist der Ötzi?" (Seite 129) die Funktionsgleichung zur Beschreibung der ^{14}C-Konzentration in verstorbenen Organismen in eine e-Funktion umformen:

$$f(t) = 1{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}9998790392^{\mathrm{t}} = 1{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot e^{\ln(0{,}9998790392) \cdot t}$$
$$= 1{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot e^{-0{,}000120968 \cdot t}$$

(11) Übungsaufgaben: Basiswechsel

Geben Sie die folgenden Funktionen als Exponentialfunktionen zur Basis e **an**.

a) $f(x) = 1000 \cdot 1{,}03^x$ b) $f(x) = 3 \cdot 0{,}5^x$ c) $f(x) = 173{,}6 \cdot 1{,}028^x$

Allgemeine Funktionsgleichung der e-Funktion

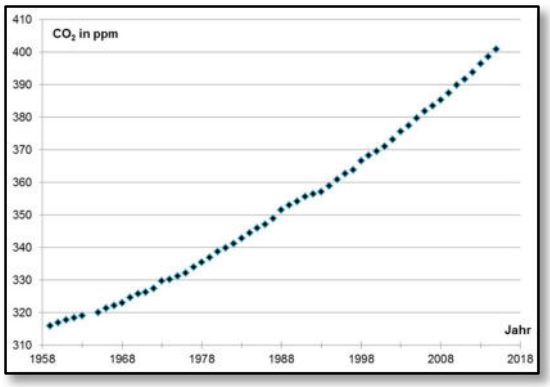
In der Literatur werden e-Funktionen normalerweise durch die allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$ beschrieben. Dabei wird k als *Zerfalls-* oder *Wachstumskonstante* bezeichnet und wird berechnet mit $k = ln\,(b)$. Für $k < 0$ beschreibt die Exponentialfunktion einen Zerfallsprozess und für $k > 0$ beschreibt sie einen Wachstumsprozess.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(12) Aufgabe: Atmosphärisches CO_2 auf Hawaii





Mauna Loa Observatorium - Foto von University Corporation for Atmospheric Research, public domain

Auf dem Mauna Loa auf Hawaii wird seit 1958 ($t = 1958$) der Gehalt von CO_2 in der Atmosphäre gemessen. Diese Daten sind für Klimaforscher interessant, da atmosphärisches CO_2 Auswirkungen auf das Klima hat.

Die Entwicklung des atmosphärischen CO_2 lässt sich durch die folgende Funktion beschreiben:

$$f(t) = 0{,}064 \cdot e^{0{,}00433 \cdot t}$$

mit t in Jahren und $f(t)$ in CO_2 parts per million [ppm]

a) **Berechnen** Sie nach diesem Modell den atmosphärischen CO_2-Gehalt im Jahr 1960 und **berechnen** Sie die prozentuale Abweichung vom real gemessenen Wert von 316,91 ppm.

b) **Berechnen** Sie, wann laut Modell der Wert von 440 ppm erreicht wird.

c) **Berechnen** Sie die jährliche prozentuale Zunahme des atmosphärischen CO_2-Gehalts.

d) **Bestimmen** Sie die erste Ableitung der Funktion (*Hinweis:* Nutzen Sie die Kettenregel auf Seite 118) und **interpretieren** Sie die Bedeutung der ersten Ableitung im Sachkontext.

(13) Aufgabe: Ableitungen von e-Funktionen

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

Hinweis: Nutzen Sie die Kettenregel auf Seite 118

a) $f(x) = 3 \cdot e^{1{,}2 \cdot x}$

b) $f(x) = -5 \cdot e^{2 \cdot x + 3}$

c) $f(x) = -2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot x}$

d) $f(x) = 2 \cdot e^{x^2}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Eine weitere Ableitungsregel - die Produktregel

Während sich in der letzten Aufgabe "Ableitungen von e-Funktionen" auch die jeweils zweiten Ableitungen der Funktionen in a) bis c) mithilfe der Kettenregel bilden lassen, ist zur Bildung der zweiten Ableitung der Funktion in d) die *Produktregel* notwendig, da dort das Produkt zweier Terme, in denen jeweils x auftritt, gebildet wird.

Die Produktregel lautet: Besteht eine Funktion aus dem Produkt zweier Funktionen

$$f(x) = g(x) \cdot h(x)$$

so gilt für die Ableitung

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x).$$

Merksatz: „Ableiten mal hinschreiben plus hinschreiben mal ableiten.“

(14) Übungsaufgabe: Ableiten mithilfe der Produktregel

Bestimmen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = x^2 \cdot e^{-0{,}5 \cdot x}$

b) $f(x) = -cos(x) \cdot e^{2 \cdot x - 3}$

c) $f(x) = sin(x) \cdot x^3$

d) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil c) lautet: $f'(x) = cos\,(x) \cdot 3x^2$.

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

(15) Aufgabe: Liegezeitbestimmung einer Leiche

In der Kriminaltechnik wird zur Bestimmung der Liegezeiten einer Leiche die Veränderung ihrer Körpertemperatur betrachtet. Bei der Untersuchung einer Leiche wird zur Bestimmung des Todeszeitpunktes die Lebertemperatur mehrfach gemessen. Die erste Messung ergab eine Temperatur von 26,7 °C. Zwei Stunden später wurde eine Temperatur von 24,4 °C gemessen. Außerdem ist die Raumtemperatur relevant, diese betrug 15,5 °C.



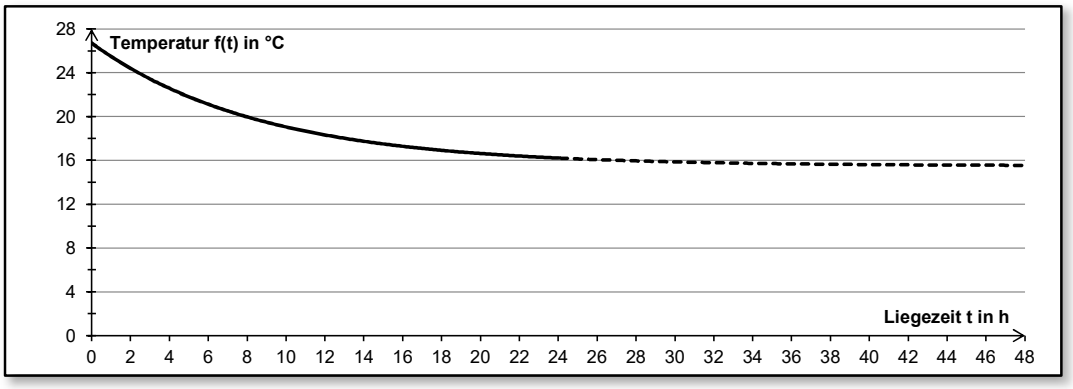
Der Abkühlungsprozess der Leiche kann durch die folgende Funktion beschrieben werden:

$$f(t) = 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot t} + 15{,}5$$

mit t in h und $f(t)$ in °C

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



a) **Bestätigen** Sie, dass die gemessenen Lebertemperaturen durch die Funktion $f(t)$ beschrieben werden.

b) Die Funktion $f(t)$ hat die Form $f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} + c$.

Interpretieren Sie den Parameter c im Sachkontext.

c) **Begründen** Sie, warum sich die Anfangstemperatur mithilfe des Terms $a + c$ berechnen lässt.

d) Es wird davon ausgegangen, dass die normale Körpertemperatur zwischen 36,4 und 37,3 °C liegt.

Berechnen Sie, vor wie vielen Stunden der Tod frühestens beziehungsweise spätestens eingetreten ist.

e) Je mehr Zeit seit dem Todeszeitpunkt vergangen ist, desto ungenauer wird die Liegezeitbestimmung mit dieser Methode. Nehmen Sie an, dass ab einer Temperaturänderung von einem Zehntel Grad Celsius pro Stunde $\left(0{,}1\ \frac{°C}{h}\right)$ die Temperaturmessung keine verlässliche Liegezeitbestimmung mehr zulässt und **bestimmen** Sie, wann dieser Zeitpunkt erreicht wird.

Bestimmung des Grenzwertes

In der Teilaufgabe b) zur "Liegezeitbestimmung einer Leiche" (Seite 133) wurde nach einem sogenannten Grenzwert der Funktion $f(t) = a \cdot e^{-k \cdot t} + c$ gefragt. In diesem Beispiel gibt der gesuchte Grenzwert (lateinisch: Limes) an, wie sich die Funktion für große Werte von t verhält. (*Hinweis:* Weitere Informationen zum Grenzwert auf Seite 12.)

Man schreibt dann:

$$\lim_{t \to \infty} 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot t} + 15{,}5 = 15{,}5$$

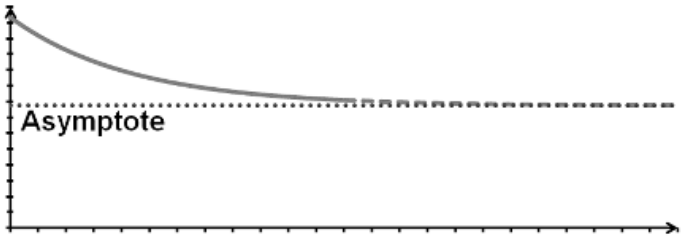
In einer Wertetabelle wird dies deutlich:

Liegezeit in h	**0**	**10**	**20**	**30**	**40**	**50**	**60**	**70**
Temperatur in °C	26,70	19,05	16,63	15,86	15,61	15,54	15,51	15,50

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hier wird der Grenzwert im Unendlichen betrachtet. Dabei nähert sich die Funktion dem Wert c an. Grafisch bedeutet dies, dass sich der Graph der Funktion einer waagerechten Linie annähert, sie aber nie berührt. Diese Linie wird als *Asymptote* bezeichnet.



Generell kann der Grenzwert einer Funktion f an jeder Stelle x_0 betrachtet werden.

Allgemein lässt sich für den Grenzwert L schreiben:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

CASten

Grenzwert

Casio ClassPad II:	Keyboard → Math2 → CALC → $\lim_{\square \to \square}$
Geogebra:	Grenzwert(*Funktion*,*Variable*,*Wert*)
TI-Nspire CAS:	lim(*Funktion*,*Variable*,*Wert*)
	oder [menu] → Analysis → Grenzwert

(16) Übungsaufgabe: Grenzwert bestimmen

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} 20 + e^{-0{,}5 \cdot x}$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

c) $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

(17) Übungsaufgabe: Lebensmittelsicherheit

Bei verzehrfertigen, heiß zu haltenden, leicht verderblichen Lebensmitteln muss eine Produkttemperatur von mindestens 65 °C eingehalten werden.

Die Funktion $f(t) = 60 \cdot e^{-0{,}002 \cdot t} + 20$ beschreibt den Abkühlungsprozess einer servierfertigen Speise, dabei gibt t die Zeit in Minuten [min] und $f(t)$ die Temperatur in Grad Celsius [°C] an.

a) **Berechnen** Sie den Grenzwert der Funktion und **interpretieren** Sie diesen im Kontext.

b) **Berechnen** Sie den Zeitpunkt, ab dem das Essen nicht mehr serviert werden darf.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(18) Übungsaufgaben: Anwendungen der e-Funktion in den Naturwissenschaften

a) Im Meer benötigen Algen, ebenso wie Pflanzen an Land, Licht zum Leben. Die Rote Krustenalge kann bis zu einer Wassertiefe überleben, in der mindestens 0,05 % der Lichtintensität, die über Wasser zur Verfügung steht, herrscht. Bei den Wasserbedingungen vor Helgoland lässt sich die Abnahme der Lichtintensität mit zunehmender Wassertiefe durch die exponentielle Funktion $I(s) = 100 \cdot e^{-0{,}5 \cdot s}$ beschreiben. Hierbei gibt $I(s)$ die relative Lichtintensität unter Wasser in Prozent [%] und s die Wassertiefe in Metern [m] an.



Berechnen Sie die maximale Wassertiefe bis zu der die Rote Krustenalge vor Helgoland vorkommt.

b) Der Luftdruck nimmt mit zunehmender Höhe exponentiell ab. Auf Höhe des Meeresspiegels ($h = 0$ m) beträgt der Luftdruck p ungefähr 1013 Hektopascal [hPa]. Auf der Zugspitze, in 2962 Metern Höhe, beträgt der Luftdruck nur noch 693 hPa.

Bestimmen Sie den Luftdruck auf dem 8848 Meter hohen Mount Everest.

c) In einem Artikel über Salmonellen ist zu lesen, dass sich die Anzahl dieser krankheitserregenden Bakterien bei günstigen Bedingungen (zwischen 20 °C und 40 °C) innerhalb von 20 Minuten verdoppelt und nach 40 Minuten verachtfacht hat.

Untersuchen Sie, ob sich die Salmonellen exponentiell vermehren.



Quelle: USAF, Stephanie Sauberan, Public Domain

(19) Aufgabe: Sauerstoffproduktion einer Kastanie

Jeder Baum wandelt im Laufe eines Tages mithilfe von Sonnenlicht Kohlendioxid (CO_2) in Sauerstoff (O_2) um. Die Sauerstoffproduktion einer Kastanie lässt sich an einem Sommertag im Tagesverlauf (zwischen 5:00 Uhr und 21:30 Uhr) durch die folgende Funktion modellieren:

$$s(t) = 900 \cdot e^{\frac{-t^4}{90}}$$

mit $-7 \leq t \leq 9{,}5$ in h und $s(t)$ in $\frac{\text{L}}{\text{h}}$

a) **Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion.

b) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext. **Interpretieren** Sie dabei auch den angegebenen Zeitbereich $-7 \leq t \leq 9{,}5$ im Sachkontext.

c) **Begründen** Sie anhand der Funktionsgleichung den andersartigen Verlauf des Graphen im Vergleich zu einer Exponentialfunktion der Form $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

d) CAS **Berechnen** Sie die an einem Tag produzierte Sauerstoffmenge der Kastanie und die Durchschnittsmenge pro Stunde.

e) CAS **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt, zu dem die Sauerstoffproduktion am stärksten zunimmt.

f) **Skizzieren** Sie jeweils einen möglichen Graphen, der die Sauerstoffproduktion einer Kastanie an einem Herbsttag bzw. an einem Wintertag beschreibt.

Begründen Sie die notwendigen Anpassungen, die Sie vorgenommen haben.

(20) Aufgabe: Baumwachstum der Rotbuche



In der Forstwirtschaft wird das Wachstum von Bäumen über einen längeren Zeitraum beobachtet.

Die Höhe einer Rotbuche kann allgemein durch die folgende Funktion modelliert werden, wobei der Beobachtungsbeginn bei $t = 0$ liegt (mit t in Jahren).

Dabei ist a abhängig von der Höhe der Rotbuche zu Beobachtungsbeginn:

$$h(t) = 40 - a \cdot e^{-0{,}03 \cdot t}$$

mit t in Jahren und $h(t)$ in m

a) **Untersuchen** Sie den Graphen dieser Funktionenschar für verschiedene Parameter a mithilfe eines CAS, eines Funktionenplotters oder einer Tabellenkalkulation.

Beschreiben Sie den Einfluss dieses Parameters und **interpretieren** Sie diesen im Sachkontext.

b) **Bestimmen** Sie den Parameter a für eine Rotbuche, die zu Beobachtungsbeginn eine Höhe von 15 m hat.

c) **Bestimmen** Sie die maximale Höhe dieser Rotbuche mithilfe des Grenzwertes.

Freistehende Buchen zeigen ein anderes Wachstumsverhalten, da diese nicht mit anderen Bäumen um das Sonnenlicht konkurrieren müssen. Sie werden nur etwa 30 m hoch.

d) **Geben** Sie die Funktion $h_{frei}(t)$ **an**, die diese maximale Höhe berücksichtigt.

e) **Bestimmen** Sie den Parameter a für eine freistehende Rotbuche, die zu Beobachtungsbeginn eine Höhe von 17 m hat.

Bei den obigen Funktionen beträgt der Wert des Parameters $k = 0{,}03$. Auch dieser Parameter berücksichtigt den Einfluss von Umweltbedingungen auf das Baumwachstum.

f) **Zeichnen** Sie den Graphen einer der obigen Rotbuchen für verschiedene Parameter k. **Beschreiben** Sie den Einfluss dieses Parameters und **interpretieren** Sie diesen im Sachkontext.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(21) Aufgabe: Die Entwicklung der weltweiten Ölförderung

Seit Beginn des letzten Jahrhunderts wird weltweit industriell Öl gefördert. Aufgrund erhöhten Bedarfs stieg die geförderte Ölmenge im Laufe des 20. Jahrhunderts rasant an.



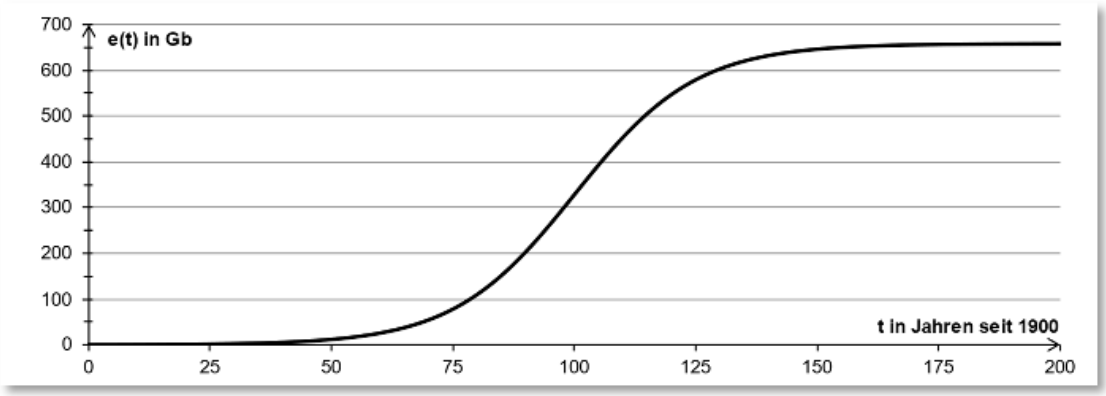
Ölbohrung. Oklahoma, 1922, public domain

Die Funktion $e(t)$ beschreibt die bis zum Zeitpunkt t insgesamt weltweit geförderte Ölmenge in Milliarden Barrel [Giga barrel; Gb]

Dabei entspricht das Jahr 1900 dem Wert $t = 0$.

$$e(t) = \frac{657}{1 + 3000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}}$$

mit t in Jahren und $e(t)$ in Gb



a) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen im Sachkontext.

b) **Begründen** Sie zum einen anhand der Funktionsgleichung und zum anderen anhand des Graphen die weltweit insgesamt maximal zu erwartende Ölfördermenge.

c) **Berechnen** Sie die bis zum Jahr 1980 weltweit geförderte Ölmenge.

d) **Vergleichen** Sie die von 1990 bis 2000 mit der von 2000 bis 2010 weltweit geförderten Ölmenge (*Hinweis:* Runden Sie auf ganze Gb). **Interpretieren** Sie Ihr Ergebnis und beziehen Sie sich dabei auch auf den dargestellten Graphen.

Als globales Ölfördermaximum (englisch: peak oil) bezeichnet man den Zeitpunkt, zu dem die weltweite Ölförderrate maximal ist.

e) **Begründen** Sie ohne Rechnung den Zeitpunkt, zu dem das globale Ölfördermaximum eintritt.

f) CAS **Berechnen** Sie den Zeitpunkt des globalen Ölfördermaximums.

g) **Skizzieren** Sie mithilfe des oben abgebildeten Graphen den Graphen der Funktion, die die jährliche Ölfördermenge beschreibt (*Hinweis:* Lassen Sie die y-Achse unskaliert).

h) **Berechnen** Sie die im Jahr des globalen Ölfördermaximums geförderte Ölmenge.

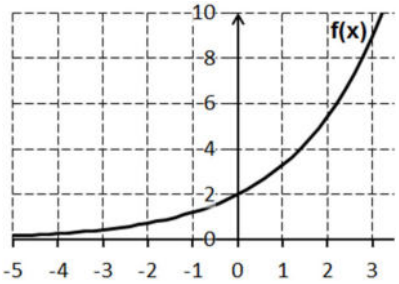
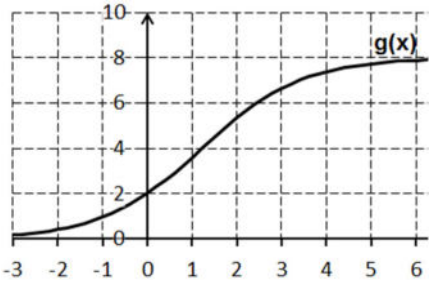
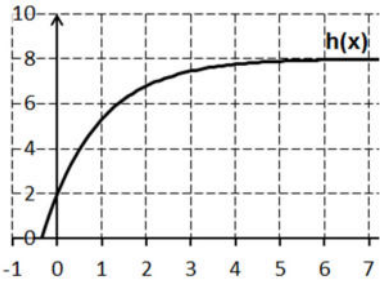
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Modellierung von Wachstumsprozessen

In den letzten Aufgaben haben Sie in verschiedenen Kontexten unter anderem unterschiedliche Modellierungen von Wachstumsprozessen kennen gelernt.

Es ergeben sich drei zu unterscheidende Modellierungen.

Exponentielles Wachstum	**Logistisches Wachstum**	**Beschränktes/begrenztes Wachstum**
Beispielhafter Funktionsverlauf: 	**Beispielhafter Funktionsverlauf:** 	**Beispielhafter Funktionsverlauf:** 
Allgemeine Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$	**Allgemeine Funktionsgleichung** $g(x) = \frac{c}{1+a \cdot e^{-k \cdot x}}$	**Allgemeine Funktionsgleichung** $h(x) = c - a \cdot e^{-k \cdot x}$
Grenzwertbetrachtung Nach oben unbeschränktes Wachstum: $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$	**Grenzwertbetrachtung** Nach unten und oben beschränktes Wachstum: $\lim_{x \to \infty} g(x) = c$ und $\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$	**Grenzwertbetrachtung** Nach oben durch c beschränktes Wachstum: $\lim_{x \to \infty} h(x) = c$
zugehörige Beispielaufgabe Atmosphärisches CO_2 auf Hawaii, Seite 132	**zugehörige Beispielaufgabe** Entwicklung der weltweiten Öl-förderung, Seite 138	**zugehörige Beispielaufgabe** Baumwachstum der Rot-buche, Seite 137

Mit jedem Modell lassen sich auch entsprechende Zerfalls- oder Schrumpfungsprozesse beschreiben.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(22) Übungsaufgabe: Ausbreitung eines Computervirus



Computerviren verbreiten sich rasant über die ganze Welt. Der Anbieter eines Anti-Viren-Programms beobachtet die Verbreitung eines neuen Virus und möchte Prognosen über die Ausbreitung des Computervirus erstellen.

Zu Beobachtungsbeginn $(t = 0)$ sind bereits 2000 Computer befallen. Der Anbieter geht davon aus, dass es weltweit eine Milliarde Windows Computer gibt. Bei einer schnellen Ausbreitung des Virus wird angenommen, dass nach $t = 10$ Tagen 90% aller Rechner befallen sind. Ein langsames Ausbreitungsszenario geht von einem Befall von 90% der Rechner innerhalb von $t = 45$ Tagen aus.

a) **Begründen** Sie, dass sich die Ausbreitung des Computervirus sinnvoll durch eine logistische Funktion modellieren lässt.

b) **Bestimmen** Sie jeweils die Funktionsgleichung, die die Ausbreitung des Virus in den beiden Szenarien beschreibt.

c) CAS **Vergleichen** Sie die maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in den beiden Ausbreitungsszenarien und **interpretieren** Sie diese im Kontext.

(23) Übungsaufgaben: Weitere Anwendungen in den Naturwissenschaften

a) Ein Kondensator ist ein elektrisches Bauteil, welches elektrische Ladungen speichern kann. In einem Experiment kann die Spannung U beim Ladevorgang eines Kondensators durch die Formel $U(t) = 5\text{V} - 5\text{V} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$ beschrieben werden.

Die Zeitkonstante τ [griechisch: tau; Einheit: Sekunde] hängt dabei von den im Schaltkreis vorhandenen Bauteilen (Kondensator und Widerstand) ab und soll hier $\tau = 3\ s$ sein.

Für die Praxis gibt es die Regel, dass nach $5 \cdot \tau$ der Kondensator "vollständig geladen" ist und man meint damit, dass mehr als 99 % der angelegten Spannung (im Beispiel 5 V) erreicht ist.

Zeichnen Sie die Funktion $U(t)$ und **begründen** Sie, warum man nicht erst beim Erreichen von $U(t) = 5\text{ V}$ davon spricht, dass der Kondensator "vollständig geladen" sei. **Zeigen** Sie, dass die genannte Regel im Beispiel gilt.

b) Neben der recht bekannten Radiokarbon-Datierung gibt es auch andere Methoden zur Datierung von Proben, zum Beispiel die Argon-Karbon-Datierung für Gesteinsproben.

Das Element Kalium ist ein Bestandteil vieler Gesteinsarten und besteht aus den stabilen Isotopen ^{39}K und ^{41}K und aus dem radioaktiven Isotop ^{40}K mit einer Halbwertzeit von $t_H = 1{,}277 \cdot 10^9$ a [anno: Jahr]; die Zerfallsrate λ ist damit $\lambda = \frac{\ln(2)}{t_H} = 5{,}428 \cdot 10^{-10}\,\frac{1}{\text{a}}$.

Das Zerfallsprodukt ist in 10,7 % der Fälle ^{40}Ar und ansonsten ^{40}Ca. Während die Kalium-Konzentration $N_K(t)$ im Gestein mit der Zeit abnimmt, nehmen somit die Argon-Konzentration $N_{Ar}(t)$ und die Calcium-Konzentrationen zu (t jeweils in Jahren [a]).

Zum Zeitpunkt der Gesteinsentstehung durch die Abkühlung heißen Materials ist normalerweise kein Argon im Gestein eingeschlossen. Wenn man also Argon im Gestein nachweisen kann, ist dies durch den Kalium-Zerfall entstanden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Für den Zerfall von ^{40}K gilt das Zerfallsgesetz:

$$N_K(t) = N_K(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Im gleichen Maße wie ^{40}K zerfällt, nimmt die Konzentration der Zerfallsprodukte $N_Z(t)$ zu:

$$N_Z(t) = N_K(0) - N_K(t)$$

Für die Konzentration des Isotops ^{40}Ar gilt:

$$N_{Ar}(t) = 0{,}107 \cdot N_Z(t)$$

Zeigen Sie, dass für die Altersbestimmung einer Gesteinsprobe bei Messung der Kalium- und der Argon-Konzentration (dies geschieht im Labor mithilfe der Atomspektroskopie bzw. der Massenspektroskopie) gilt:

$$t = \frac{1}{\lambda} \cdot ln\left(1 + \frac{N_{Ar}(t)}{0{,}107 \cdot N_K(t)}\right)$$

Bestimmen Sie das Alter einer Gesteinsprobe, welche von einer Apollo-Mond-Mission zur Erde zurückgebracht wurde. Die Kalium-Konzentration beträgt $N_K(t) = 4{,}2 \cdot 10^{-6}$ g und die Argon-Konzentration $N_{Ar}(t) = 4{,}076 \cdot 10^{-6}$ g.

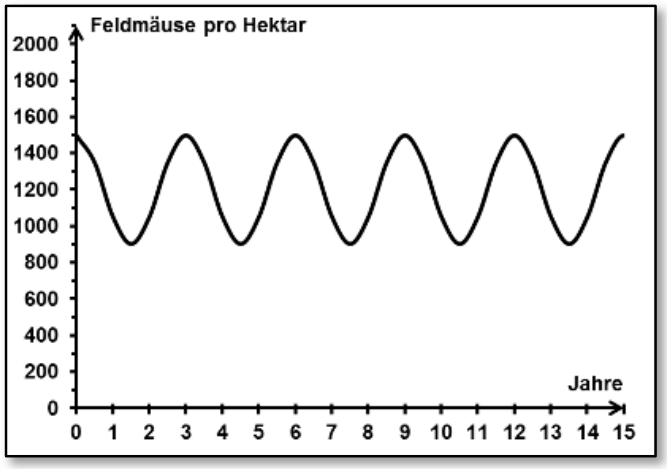
(Hinweis zur Einordnung Ihres Ergebnisses: Das Alter des Mondes beträgt circa 4,53 Milliarden Jahre)

(24) Aufgabe: Entwicklung einer Feldmauspopulation CAS

Eine naturbelassene Wiese ist durch eine seltene Feldmausart besiedelt.

Feldmauspopulationen entwickeln sich in einem drei-Jahres-Zyklus, in dessen Verlauf die Anzahl der Tiere stark schwankt. Die nebenstehende Abbildung zeigt die Entwicklung einer Feldmauspopulation in freier Wildbahn.

In der Nähe der Wiese entsteht ein neues Industriegebiet, welches Einflüsse auf die Feldmauspopulation haben wird.



Die folgende Funktion beschreibt die Bestandsentwicklung dieser Feldmauspopulation.

$$f(t) = 300 \cdot \cos\left(\frac{2}{3}\pi \cdot t\right) + 900 \cdot e^{-0{,}0513 \cdot t} + 300$$

mit t in Jahren und $f(t)$ in Feldmäusen pro Hektar

a) **Beschreiben** Sie die Entwicklung der Population.

b) **Vergleichen** Sie die durchschnittliche Anzahl der Feldmäuse im ersten drei-Jahres-Zyklus mit der des zweiten Zyklus. **Bestimmen** Sie die dreijährliche Zerfallsrate.

c) **Bestimmen** Sie den Zeitpunkt, zu dem die Feldmauspopulationsanzahl am stärksten abnimmt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Naturschützer*innen befürchten, dass die maximale Anzahl dieser seltenen Feldmäuse in einem drei-Jahres-Zyklus unter 1000 Feldmäuse pro Hektar fallen könnte. Sie wollen in diesem Fall Maßnahmen zur Erhaltung der Feldmauspopulation einleiten.

d) **Geben** Sie **an**, ab wann nach dem Modell Gegenmaßnahmen ergriffen werden müssen.

Ab diesem Zeitpunkt werden tatsächlich Maßnahmen ergriffen, die zu einer Regeneration der Population führen soll. Das Ziel des Eingriffes ist ein Anstieg der Populationsanzahl um 10% innerhalb eines Drei-Jahres-Zyklus. Die Maßnahmen werden ab dem Zeitpunkt $t = 16{,}5$ ergriffen.

Das folgende Modell soll nun die Feldmauspopulation beschreiben:

$$m(t) = 300 \cdot cos\left(\frac{2}{3}\pi \cdot t\right) + 900 \cdot e^{k \cdot t} + d$$

mit $t \geq 16{,}5$ in Jahren, $f(t)$ in Feldmäusen pro Hektar

e) **Bestimmen** Sie die Parameter k und d, so dass die Vorgabe der Naturschützer*innen eingehalten wird und der Graph sprungfrei an $f(t)$ ansetzt.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Exponentialfunktion zur Basis b
- ❑ Anfangsbestand
- ❑ Wachstums- / Zerfallsfaktor
- ❑ Wachstums- und Zerfallsprozesse
- ❑ Bestimmen einer Exponentialfunktion zu zwei Wertepaaren
- ❑ Lösen von exponentiellen Gleichungen
- ❑ *Potenz- und Logarithmusgesetze*
- ❑ Euler'sche Zahl e
- ❑ Exponentialfunktion zur Basis e
- ❑ natürlicher Logarithmus
- ❑ Durchführen eines Basiswechsels
- ❑ Produktregel
- ❑ Bestimmen des Grenzwertes
- ❑ logistisches Wachstum
- ❑ beschränktes / begrenztes Wachstum

Einträge, die sich auf „Genau hingeschaut“ beziehen, sind kursiv gedruckt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Gebrochenrationale Funktionen – Vom Fährbetrieb zur Definitionslücke



(1) Aufgabe: Fährbetrieb auf der Elbe

Eine Hamburger Hafenfähre hat im normalen Betrieb eine Eigengeschwindigkeit v_E von $3\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Die Eigengeschwindigkeit ist die Geschwindigkeit, die die Fähre aus eigener Kraft, ohne Berücksichtigung der Strömung, erreicht.

Die Strömung der Elbe hat zusätzlich einen Einfluss darauf, wie schnell die Hafenfähre von einer Haltestelle zur nächsten gelangt. Die Elbe hat in Hamburg eine Strömungsgeschwindigkeit v_S von $1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Die Fährlinie 62 verbindet die Hamburger Landungsbrücken mit der flussabwärtsliegenden Haltestelle Altona Fischmarkt. Der Abstand der beiden Haltestellen beträgt 1200 Meter [m].

a) **Berechnen** Sie die Fahrzeit von den Landungsbrücken zum Fischmarkt und die Fahrzeit für die Gegenrichtung.

b) **Berechnen** Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ (sprich: „v quer“) der Hafenfähre auf der Gesamtstrecke (Hin- und Rückfahrt).

c) VERDACH?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil b) lautet:

"Ich berechne jeweils die Geschwindigkeit für den Hin- und den Rückweg, addiere beide und teile das Ergebnis durch 2."

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Unterschiedliche Schiffe, die auf der Elbe fahren, haben offensichtlich unterschiedliche Eigengeschwindigkeiten. Die Strömungsgeschwindigkeit v_S wird als konstant angenommen.

Fährt ein Schiff mit einer Eigengeschwindigkeit v_E die gleiche Strecke einmal flussauf- und einmal flussabwärts, so lässt sich die Durchschnittsgeschwindigkeit $\bar{v}$ des Schiffs mithilfe der folgenden Funktion berechnen:

$$\bar{v}(v_E) = \frac{v_E^2 - v_S^2}{v_E}$$

mit v_E in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ und $\bar{v}(v_E)$ in $\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

d) **Bestätigen** Sie, dass die Funktion für die oben angegebenen Daten das gleiche Ergebnis liefert, wie in Teilaufgabe b).

Eine neue Fährverbindung soll zwei Haltestellen im Abstand von 1500 Metern $[\mathrm{m}]$ in 16 Minuten $[\mathrm{min}]$ Gesamtfahrzeit (für Hin- und Rückfahrt, die Haltezeit wird nicht betrachtet) miteinander verbinden.

e) **Berechnen** Sie für diese neue Hafenfähre die notwendige Eigengeschwindigkeit v_E.

f) **Berechnen** Sie die Nullstellen der Funktion $\bar{v}(v_E)$ und **interpretieren** Sie diese im Sachkontext.

g) **Berechnen** Sie den Funktionswert an der Stelle $v_E = 0$ und **begründen** Sie das Zustandekommen des Ergebnisses mathematisch.

h) **Zeichnen** Sie die Funktion $\bar{v}(v_E)$ mit der folgenden Skalierung: $-5 \leq v_E \leq 5$ und $-5 \leq \bar{v} \leq 5$.

i) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen und gehen Sie dabei auch auf Unterschiede zu den Graphen der Ihnen bereits bekannten Funktionsklassen ein. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

Weiterführender Aufgabenteil

j) **Leiten** Sie die Formel $\bar{v}(v_E) = \frac{v_E^2 - v_S^2}{v_E}$ **her**.

Geben Sie dafür zunächst einen allgemeingültigen Term **an**, der die Geschwindigkeit jeweils einer Fahrtstrecke flussauf- und flussabwärts beschreibt. **Stellen** Sie zusätzlich den Term für die jeweiligen Fahrtzeiten **auf**.

Gebrochenrationale Funktionen, Definitionslücke und Definitionsbereich

In der vorangegangenen Aufgabe haben Sie eine neue Funktionsklasse kennengelernt. Bei der Funktion $\bar{v}(v_E)$ steht die Variable v_E auch im Nenner des Funktionsterms. Es handelt sich um eine *gebrochenrationale Funktion*.

Eine gebrochenrationale Funktion lässt sich als Bruch darstellen, in dem sowohl im Zähler als auch im Nenner eine ganzrationale Funktion ($Z(x)$ und $N(x)$) steht.

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet daher:

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = \frac{a_n \cdot x^n + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + \cdots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0}$$

mit $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ und $a_0, \ldots, a_n, b_0, b_m \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

In der Teilaufgabe g) der vorangegangenen Aufgabe wurde festgestellt, dass $v_E = 0$ nicht in die Funktion eingesetzt werden darf, da die Division durch null mathematisch nicht definiert ist. Diese Stelle $v_E = 0$ nennt man *Definitionslücke* der Funktion $\bar{v}(v_E)$.

Allgemein sind alle Nullstellen der Funktion $N(x)$ Definitionslücken der Funktion $f(x)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der *Definitionsbereich* D (auch: *Definitionsmenge*) einer Funktion $f(x)$ ist die Menge aller Zahlen, die als x-Werte in die Funktion eingesetzt werden können. Dies ist bei gebrochenrationalen Funktionen relevant, da die Definitionslücke nicht in die Funktion eingesetzt werden darf und daher ausgeschlossen werden muss.

In der Aufgabe zum Fährbetrieb lautet der Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$.

$\mathbb{R}\backslash\{0\}$ liest man als: "Alle reellen Zahlen ohne Null."

(2) Aufgabe: Strahlungsleistung der Sonne

Aufgrund der Kernfusion setzt die Sonne in jeder Sekunde eine enorme Energiemenge frei. Die Strahlungsleistung der Sonne P_{Sonne} beträgt $3{,}845 \cdot 10^{26}$ Watt [W], das sind 384,5 Yotawatt. Je weiter weg sich ein Ort von der Sonne befindet, umso weniger Energie von der Sonne erreicht ihn. Wichtig für die Bedingungen auf einem Planeten ist, wieviel Strahlungsleistung S ihn erreicht.

Die Strahlungsleistung S in Watt pro Quadratmeter $\left[\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right]$ im Abstand r in Metern $[\mathrm{m}]$ vom Sonnenmittelpunkt aus berechnet sich mit der Formel:

$$S(r) = \frac{3{,}845 \cdot 10^{26}}{4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

mit r in m und $S(r)$ in $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$

a) **Berechnen** Sie die Solarkonstante, also die Strahlungsleistung pro Quadratmeter, für die Erde (Abstand von der Sonne: $r = 149\,600\,000\ \mathrm{km}$).

Es wird angenommen, dass für komplexeres Leben die Solarkonstante eines Planeten zwischen $500\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ und $1500\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ liegen muss. Dies ist die habitable Zone.

b) **Berechnen** Sie den minimalen und maximalen Abstand eines Planeten von der Sonne, in dem Leben möglich wäre.

c) **Geben** Sie den Definitionsbereich der Funktion $S(r)$ **an**.

d) **Skizzieren** sie den Graphen der Funktion $S(r)$ und markieren Sie die habitable Zone.

(3) Übungsaufgabe: Definitionsbereich angeben

Geben Sie die Definitionsbereiche der folgenden Funktionen **an**.

a) $f(x) = \frac{2}{x+3}$

b) $g(x) = \frac{3}{(x-2)\cdot(x+5)}$

c) $h(x) = \frac{2x}{x^2-9}$

d) $i(x) = \frac{1}{x^2} + 4$

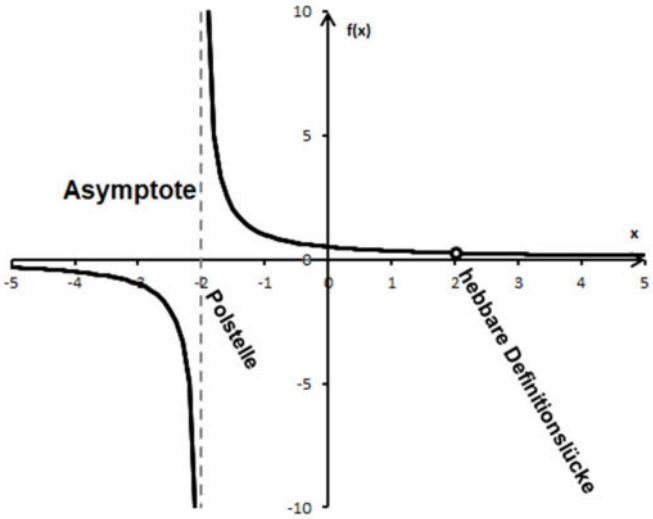
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hebbare Definitionslücken und Polstellen

Bei der Betrachtung von Definitionslücken unterscheidet man zwischen *hebbaren Definitionslücken* und *Polstellen*.

Von einer hebbaren Definitionslücke spricht man, wenn diese Definitionslücke sowohl Nullstelle des Nenners als auch des Zählers ist.



Ein Beispiel für eine Funktion mit einer hebbaren Definitionslücke ist $f(x) = \frac{x}{x^2-x}$, da sich diese Funktion theoretisch kürzen ließe zu $f(x) = \frac{1}{x-1}$.

Bei allen anderen Definitionslücken, die nicht hebbar sind, handelt es sich um Polstellen.

Innerhalb einer Funktionsgleichung können sowohl hebbare Definitionslücken als auch Polstellen auftreten.

Beispiel:

Bei der Funktion $g(x) = \frac{x}{x\cdot(x+2)}$ ist $x = 0$ eine hebbare Definitionslücke und $x = -2$ eine Polstelle (siehe Abbildung).

Graphisch befindet sich an der Stelle $x = -2$ eine senkrechte Asymptote.

Hinweis: Bei Asymptoten muss es sich nicht immer um Geraden, die parallel zur x- oder y-Achse liegen, handeln.

(4) Übungsaufgabe: Polstellen und hebbare Definitionslücken

Geben Sie bei den folgenden Funktionen jeweils den Definitionsbereich **an** und **entscheiden** Sie, ob die Definitionslücken jeweils hebbar sind oder ob es sich um Polstellen handelt.

a) $f(x) = \frac{x}{(x-7)\cdot x^2}$

b) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$

c) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(42-x)^5}$

d) $f(x) = \frac{x^2}{x^5}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Schokoladenkugelproduktion

Ein Süßwarenhersteller produziert aus 500 Litern [l] geschmolzener Schokolade kugelförmige Pralinen. Die Anzahl der produzierten Pralinen ist von deren Durchmesser abhängig. Bisher wurden Pralinen mit einem Durchmesser von 2 Zentimetern [cm] produziert, diese sollen nun verkleinert werden.

Für die zu erwartende Produktionsmenge gilt die folgende Funktion:

$$p(x) = \frac{500\,000}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (1-x)^3}$$

Hierbei gibt x die Verkleinerung des Radius in Zentimetern [cm] und $p(x)$ die Anzahl der Pralinen an.

a) **Begründen** Sie die Gültigkeit der Funktion $p(x)$ für den Sachkontext.

b) **Geben** Sie einen im Kontext sinnvollen Definitionsbereich **an**.

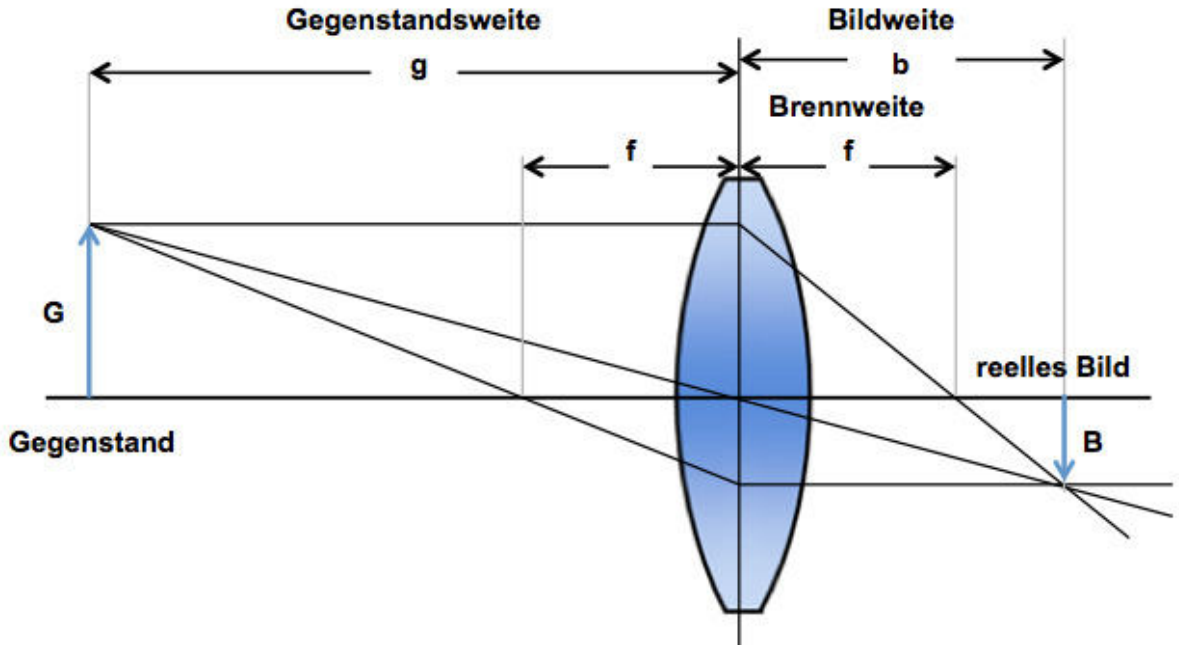
c) **Berechnen** Sie die Anzahl der Pralinen bei einem Pralinendurchmesser von 1,2 cm.

d) **Berechnen** Sie die Größe der Pralinen, wenn der Hersteller 1 000 000 Pralinen herstellen will.

(6) Aufgabe: Bildweite einer Sammellinse

In optischen Geräten, wie zum Beispiel Fotoapparaten, Videokameras und Ferngläsern, wird ein System aus Linsen zur Bilddarstellung genutzt. Bei einer sogenannten bikonvexen Linse (Sammellinse) sind beide Seiten der Linse nach außen gewölbt.

Die Höhe B des von einem Gegenstand mit der Höhe G erzeugten Bildes hängt von der Gegenstandsweite g und der Brennweite f der Linse ab.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zudem ist die Bildweite b abhängig von der Gegenstandsweite g und der Brennweite f.
Dieser mathematische Zusammenhang lässt sich durch die folgende Funktionsgleichung mathematisch beschreiben:

$$b(g) = \frac{g \cdot f}{g - f}$$

mit g in mm und $b(g)$ in mm.

Die Brennweite f der Linse beträgt 100 mm.

a) **Geben** Sie den Definitionsbereich der Funktion $b(g)$ **an**.
b) **Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion $b(g)$ in ein Koordinatensystem mit $0 \leq g \leq 300$ und $0 \leq b(g) \leq 1000$.
c) **Begründen** Sie, warum im Sachkontext $g > 100\ \mathrm{mm}$ gelten sollte.
d) **Bestimmen** Sie die Bildweite b, wenn die Gegenstandsweite $g = 200\ \mathrm{mm}$ beträgt und **begründen** Sie anhand der Abbildung, warum die Gegenstandsweite und die Bildweite übereinstimmen.
e) **Bestimmen** Sie die Gegenstandsweite g, wenn die Bildweite $b = 500\ \mathrm{mm}$ beträgt.

Weiterführende Aufgabenteile zur Sammellinse

Die oberstehende Formel $b(g)$ zur Berechnung der Bildweite wurde mit Hilfe von Strahlensätzen hergeleitet.

f) **Zeigen** Sie, dass die beiden folgenden Verhältnisse korrekt sind und **nennen** Sie die Dreiecke, die dafür betrachtet wurden.

$$\frac{B}{G} = \frac{b}{g} \qquad \frac{B}{G} = \frac{b - f}{f}$$

Aus den beiden Verhältnissen folgt:

$$\frac{b}{g} = \frac{b - f}{f}$$

g) **Zeigen** Sie, dass die Funktionsgleichung $b(g) = \frac{g \cdot f}{g - f}$ korrekt ist, indem Sie diese aus der obigen Verhältnisgleichung durch Termumformung entwickeln.
h) **Bestimmen** Sie ausgehend von dem Term $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$ eine Funktionsgleichung mit deren Hilfe sich die Gegenstandsweite g (abhängig von b und f) berechnen lässt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Potenz- und Bruchschreibweise

Es gibt verschiedene Möglichkeiten zur Darstellung von gebrochenrationalen Funktionen. Bisher wurde die *Bruchschreibweise* verwendet.

Alternativ kann auch die *Potenzschreibweise* genutzt werden.

Es gilt: $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$, also beispielweise $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$.

Dies gilt auch zum Beispiel für $g(x) = \frac{x^2}{(5-x)^4} = x^2 \cdot (5-x)^{-4}$.

Allgemeiner lässt sich sagen: $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = Z(x) \cdot N(x)^{-1}$.

Also gilt beispielsweise $f(x) = \frac{2x}{x^2-9} = 2x \cdot (x^2-9)^{-1}$.

(7) Übungsaufgabe: Potenz- und Bruchschreibweise umwandeln

Geben Sie bei den folgenden Funktionen jeweils die andere Schreibweise (Bruch- oder Potenzschreibweise) **an**.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^5}$

b) $f(x) = \frac{x}{(x-7) \cdot x^2}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16}$

d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(42-x)^5}$

e) $f(x) = x^{-1}$

f) $f(x) = 25 \cdot x^{-3}$

g) $f(x) = (x-2)^{-7}$

h) $f(x) = x^{-2} + 3x^4$

Ableitungen gebrochenrationaler Funktionen

Die Ableitung von gebrochenrationalen Funktionen wird in der Potenzschreibweise analog zu den ganzrationalen Funktionen gebildet (*Hinweis:* siehe auch Produkt- und Kettenregel auf Seite 133 und 118).

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2+7x}{x^4} = (3x^2+7x) \cdot x^{-4}$$

Potenzschreibweise mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (6x+7) \cdot x^{-4} + (3x^2+7x) \cdot (-4x^{-5}) \\ &= 6x \cdot x^{-4} + 7x^{-4} + 3x^2 \cdot (-4x^{-5}) + 7x \cdot (-4x^{-5}) \\ &= 6x^{-3} + 7x^{-4} - 12x^{-3} - 28x^{-4} = -6x^{-3} - 21x^{-4} \\ &= -\frac{6}{x^3} - \frac{21}{x^4} \end{aligned}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

In der Bruchschreibweise lässt sich die Ableitung der Funktion $f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)}$ mithilfe der *Quotientenregel* bilden:

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{(N(x))^2}$$

Beispiel:

$$f(x) = \frac{3x^2+7x}{x^4} = (3x^2 + 7x) \cdot x^{-4}$$

Bruchschreibweise mithilfe der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{(6x+7)\cdot x^4 - (3x^2+7x)\cdot 4x^3}{(x^4)^2}$$

$$= \frac{6x^5+7x^4-12x^5-28x^4}{x^8} = \frac{-6x^5-21x^4}{x^8} = \frac{-6x^5}{x^8} - \frac{21x^4}{x^8} = -6x^{-3} - 21x^{-4} = -\frac{6}{x^3} - \frac{21}{x^4}$$

(8) Übungsaufgabe: Ableitungen bestimmen

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2}$

c) $f(x) = (x+1)^2 \cdot x^{-6}$

d) $f(x) = x^6 \cdot (x+1)^{-2}$

Stammfunktionen einfacher gebrochenrationaler Funktionen

Für die Stammfunktionen einfacher gebrochenrationaler Funktionen gilt die folgende Regel:

Für $f(x) = \frac{a}{x^n} = a \cdot x^{-n}$ mit $n \in \mathbb{N}$ lautet eine Stammfunktion $F(x) = \frac{a}{(-n+1)} \cdot x^{-n+1}$

Beispiel:

Eine Stammfunktion zu $f(x) = \frac{2}{x^3} = 2 \cdot x^{-3}$ lautet

$F(x) = \frac{2}{(-3+1)} \cdot x^{-3+1} = \frac{2}{-2} \cdot x^{-2} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$

Ein Sonderfall ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$. Eine Stammfunktion dazu lautet $F(x) = \ln(|x|)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(9) Übungsaufgabe: Stammfunktionen bestimmen

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \frac{9}{x^4}$

b) $f(x) = -\frac{10}{x^6}$

c) $f(x) = \frac{3}{x-5}$

d) $f(x) = \frac{4}{3x+1}$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ gebrochenrationale Funktionen
- ❑ Definitionsbereich und Definitionslücke
- ❑ Hebbare Definitionslücken und Polstellen
- ❑ Bruch- und Potenzschreibweise
- ❑ Ableitungen von gebrochenrationalen Funktionen
- ❑ Quotientenregel
- ❑ Stammfunktionen einfacher gebrochenrationaler Funktionen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Wurzelfunktionen – Von Beregnungssystemen zur Wurzel



Kreisförmig bewässerte Felder – Foto (links) von Sam Beebe, 2008, verändert, CC BY 2.0 | Foto (rechts) von Brendon Lambert, 2015, CC BY-SA 4.0

(1) Aufgabe: Beregnungssysteme

In der Landwirtschaft werden große Anbauflächen häufig mithilfe von Beregnungssystemen kreisförmig bewässert. Der Radius $r(A)$ des Beregnungssystems in Metern [m] ist abhängig von der zu bewässernden Fläche A in Quadratmetern [m^2].

Der mathematische Zusammenhang lässt sich durch die folgende Funktion beschreiben:

$$r(A) = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

mit A in m^2 und $r(A)$ in m

a) Eine Fläche von 400 m^2 soll bewässert werden
Berechnen Sie den Radius des dazu benötigten Bewässerungssystems.

b) **Berechnen** Sie, welcher Radius für eine doppelt so große Fläche benötigt wird.

c) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil b) lautet: "Da die Fläche doppelt so groß ist, muss auch der Radius verdoppelt werden."
Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

d) **Geben** Sie den Definitionsbereich der Funktion $r(A)$ **an**.

e) **Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion $r(A)$.

f) **Beschreiben** Sie den Verlauf des Graphen und gehen Sie dabei auch auf Unterschiede zu den Graphen der Ihnen bereits bekannten Funktionsklassen ein. **Nennen** Sie Formulierungen, die für das genaue Beschreiben hilfreich sind.

Hinweis: Weitere Formulierungstipps finden Sie in der Lösung.

Wurzelfunktionen

Für Wurzelfunktionen gibt es ähnlich wie bei gebrochenrationalen Funktionen zwei verschiedene Darstellungsmöglichkeiten.

Allgemein gilt $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, also zum Beispiel $\sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{x^1} = x^{\frac{1}{4}}$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die allgemeine Funktionsgleichung für Wurzelfunktionen lautet in Wurzelschreibweise $f(x) = a \cdot \sqrt[n]{(x+b)^m} + c$ und in Potenzschreibweise

$f(x) = a \cdot (x+b)^{\frac{m}{n}} + c$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

Für den Definitionsbereich wird der Term unterhalb der Wurzel betrachtet (*Radikand*).

Der Radikand darf bei geradem n nicht kleiner als 0 werden, da sich in diesem Fall die Wurzel nicht ziehen lässt. Um die Grenzen des Definitionsbereichs zu ermitteln, müssen die Nullstellen des Radikanden berechnet werden. So gilt für die Funktion $f(x) = 2 \cdot \sqrt[6]{x+3}$ der Definitionsbereich

$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -3\} = [-3; \infty)$.

Ist n ungerade oder m gerade, gibt es keine Einschränkung des Definitionsbereichs.

(2) Übungsaufgabe: Schreibweisen und Definitionsbereiche von Wurzelfunktionen

Geben Sie die jeweils andere Schreibweise und den jeweiligen Definitionsbereich der angegebenen Funktion **an**.

a) $f(x) = 31 \cdot \sqrt[3]{x+12} + 4$

b) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-12} - 3$

c) $f(x) = 4 \cdot (x+1)^{\frac{1}{6}} + 3$

d) $f(x) = 0{,}1 \cdot (x-2)^{\frac{4}{5}} + 10$

e) $f(x) = 15 \cdot (x+4{,}5)^{\frac{1}{2}}$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + x - 2}$

(3) Aufgabe: Fadenpendel

Wenn man an einem Faden der Länge l in Metern [m] den Mittelpunkt einer Kugel befestigt und diese frei schwingen lässt, dann berechnet sich die Dauer T einer Schwingung in Sekunden [s] (einmal hin- und wieder zurückschwingen) mit der Formel

$$T(l) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{9{,}81}}$$

mit l in m und $T(l)$ in s

a) **Berechnen** Sie Schwingungsdauer eines Pendels mit der Länge 0,5 m.

b) **Berechnen** Sie die notwendige Pendellänge, wenn die Schwingungsdauer 2 s betragen soll.

c) **Geben** Sie den Definitionsbereich der Funktion $T(l)$ **an**.

d) **Zeichnen** Sie den Graphen der Funktion $T(l)$ für Pendellängen bis 2 m.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Aufgabe: Parameter der Quadratwurzelfunktion

Beschreiben Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$.

Wirkung des Parameters a

Untersuchen Sie die Funktion $f_a(x) = a \cdot \sqrt{x}$ mithilfe eines CAS, eines Funktionenplotters oder einer Tabellenkalkulation. Setzen Sie hierfür verschiedene Werte für Parameter a ein und betrachten Sie die Veränderungen des Graphen.

Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen der Funktion $f_a(x)$ für verschiedene Werte des Parameters a (zum Beispiel $a = 0{,}8$; $a = 1{,}3$; $a = -1$; …).

Wirkung des Parameters b

Untersuchen Sie wie oben die Funktion $f_b(x) = \sqrt{x + b}$. Setzen Sie hierfür verschiedene Werte für Parameter b ein und betrachten Sie die Veränderungen des Graphen.

Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen der Funktion $f_b(x)$ für verschiedene Werte des Parameters b (zum Beispiel $b = 3$; $b = -2$; …).

Wirkung des Parameters c

Untersuchen Sie wie oben die Funktion $f_c(x) = \sqrt{x} + c$. Setzen Sie hierfür verschiedene Werte für Parameter c ein und betrachten Sie die Veränderungen des Graphen.

Beschreiben Sie die Veränderungen des Graphen der Funktion $f_c(x)$ für verschiedene Werte des Parameters c (zum Beispiel $c = -2$; $c = 0{,}5$; …).

Parameter der Quadratwurzelfunktion

Für die Parameter der Quadratwurzelfunktion in der allgemeinen Form $f(x) = a \cdot \sqrt{x + b} + c$ gelten die folgenden Regeln.

Parameter a

Der Parameter a führt zu einer Streckung ($|a| > 1$) oder Stauchung ($0 < |a| < 1$) in y-Richtung. Ist $a < 0$, so wird der Graph der Funktion an der x-Achse gespiegelt.

Parameter b

Der Parameter b führt zu einer Verschiebung des Graphen der Funktion entlang der x-Achse.

Für $b < 0$ verschiebt sich der Graph der Funktion um $|b|$ Einheiten nach rechts, für $b > 0$ verschiebt er sich um $|b|$ Einheiten nach links.

Parameter c

Der Parameter c führt zu einer Verschiebung des Graphen der Funktion entlang der y-Achse.

Für $c < 0$ verschiebt sich der Graph der Funktion um $|c|$ Einheiten nach unten, für $c > 0$ verschiebt er sich um $|c|$ Einheiten nach oben.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Ableitung der Wurzelfunktionen

Die Ableitung von Wurzelfunktionen wird in der Potenzschreibweise analog zu den ganzrationalen Funktionen gebildet.

Die Ableitung von $f(x) = a \cdot \sqrt[n]{(x+b)^m} + c = a \cdot (x+b)^{\frac{m}{n}} + c$ lautet

$f'(x) = a \cdot \frac{m}{n} \cdot (x+b)^{\frac{m}{n}-1}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

Für $f(x) = 9 \cdot \sqrt[3]{(x+7)^4} + 6 = 9 \cdot (x+7)^{\frac{4}{3}} + 6$ lautet die Ableitung

$f'(x) = 9 \cdot \frac{4}{3} \cdot (x+7)^{\frac{4}{3}-1} = 12 \cdot (x+7)^{\frac{1}{3}} = 12 \cdot \sqrt[3]{x+7}$

Erhält man in der Ableitung einen negativen Exponenten muss die Wurzel in den Nenner geschrieben werden (analog zu den gebrochenrationalen Funktionen).

Beispiel: Für $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ lautet die Ableitung $f'(x) = \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3 \cdot \sqrt[3]{x}}$

Bei verketteten Funktionen muss die Kettenregel (siehe Seite 118) verwendet werden.

Beispiel:

Für $f(x) = \sqrt[4]{(8x^2+1)^9} = (8x^2+1)^{\frac{9}{4}}$ gilt

$f'(x) = 16x \cdot \frac{9}{4} \cdot (8x^2+1)^{\frac{9}{4}-1} = 36x \cdot (8x^2+1)^{\frac{5}{4}} = 36x \cdot \sqrt[4]{(8x^2+1)^5}$

(5) Übungsaufgabe: Ableitungen von Wurzelfunktionen

Bestimmen Sie die Ableitungen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt[4]{(x+4)^6}$

b) $f(x) = 31 \cdot \sqrt[3]{x+12} + 4$

c) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-12} - 3$

d) $f(x) = 10 \cdot (x^3+1)^{\frac{1}{5}} - 4$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Stammfunktionen einfacher Wurzelfunktionen

Für die Stammfunktionen einfacher Wurzelfunktionen gelten die folgenden Regeln.

Für $f(x) = \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ lautet eine Stammfunktion $F(x) = \frac{1}{\left(\frac{m}{n}+1\right)} \cdot x^{\frac{m}{n}+1}$

Beispiel:

Eine Stammfunktion von $f(x) = \sqrt[7]{x^4} = x^{\frac{4}{7}}$ lautet

$F(x) = \frac{1}{\left(\frac{4}{7}+1\right)} \cdot x^{\frac{4}{7}+1} = \frac{1}{\frac{11}{7}} \cdot x^{\frac{11}{7}} = \frac{7}{11} \cdot x^{\frac{11}{7}} = \frac{7}{11} \cdot \sqrt[7]{x^{11}}$

(6) Übungsaufgabe: Stammfunktionen von Wurzelfunktionen

Bestimmen Sie jeweils eine Stammfunktion der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sqrt[5]{x^6}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

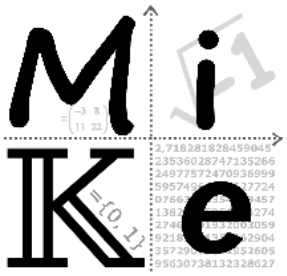
c) $f(x) = 5 \cdot \sqrt[9]{x^5}$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Wurzelfunktionen
- ❑ Wurzel- und Potenzschreibweise
- ❑ Definitionsbereich von Wurzelfunktionen
- ❑ Parameter der Quadratwurzelfunktion
- ❑ Ableitung der Wurzelfunktionen
- ❑ Stammfunktionen einfacher Wurzelfunktionen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Lösungen für die Aufgaben und Übungen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches „**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“ (von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hier finden Sie zu allen Aufgaben und Übungsaufgaben des Buches Lösungen oder Lösungsansätze. In [eckigen Klammern] steht die Seitenzahl der zugehörigen (Übungs-) Aufgabe.

Lösung: Einstieg in die Differentialrechnung

(1) Aufgabe zum Einstieg [7]

In den Abbildungen sind zum Beispiel Verkehrsschilder zu sehen, denen Steigungen als Prozentangabe zu entnehmen sind. Ferner sind eine besonders steile Straße und ein recht steiler Berg abgebildet, der von Besuchern erklommen wird. Darüber hinaus ist noch eine Achterbahn abgebildet, die aufwärtsfährt.
Bei der steilen Straße stellt sich beispielsweise die Frage, welches Warnschild hier angebracht werden müsste.

Lösung: Vom Höhenprofil zur Steigung in einem Punkt

(2) Aufgabe: Radrennen [8]

a) Der höchste Punkt der Strecke befindet sich bei etwa 70 km mit etwa 130 m.

b) Die größte Steigung ist bei etwa 168 km zu sehen. Das größte Gefälle ist bei etwa 182 km zu finden.

c) Nahezu waagerecht verläuft die Strecke beispielsweise zwischen dem 7. und 18. Kilometer oder zwischen dem 83. Und 116. Kilometer.

d) Der Streckenabschnitt von Kilometer 207 und Kilometer 220 wiederholt sich direkt im Anschluss zweimal.

(3) Aufgabe: Untersuchung eines Streckenabschnitts [8]

Kilometer 53: Höhe etwa 36 m

Kilometer 71: Höhe etwa 132 m

Höhendifferenz: $132\ \text{m} - 36\ \text{m} = 96\ \text{m}$

Horizontale Streckendifferenz:

$$71\ \text{km} - 53\ \text{km} = 18\ \text{km}$$

Steigung: $\frac{96\ \text{m}}{18\ \text{km}} = 5{,}33\frac{\text{m}}{\text{km}} = 0{,}00533\frac{\text{m}}{\text{m}} = 0{,}533\%$

Kilometer 71: Höhe etwa 132 m

Kilometer 84: Höhe etwa 8 m

Höhendifferenz: $8\ \text{m} - 132\ \text{m} = -124\ \text{m}$

Horizontale Streckendifferenz:

$$84\ \text{km} - 71\ \text{km} = 13\ \text{km}$$

Steigung:

$$\frac{-124\ \text{m}}{13\ \text{km}} = -9{,}54\frac{\text{m}}{\text{km}} = -0{,}00954\frac{\text{m}}{\text{m}} = -0{,}954\%$$

Es handelt sich hierbei um ein Gefälle.

(4) Übungsaufgabe: Durchschnittliche Steigungen bestimmen [10]

a) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{41-2}{130-118} = \frac{39}{12} = 3{,}25$

Die Steigung beträgt $3{,}25\ \frac{\text{m}}{\text{km}} = 0{,}0032\frac{\text{m}}{\text{m}}$ bzw. 0,325%.

b) $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-18}{155-145} = \frac{-15}{10} = -1{,}5$

Das Gefälle beträgt $1{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{km}} = 0{,}0015\frac{\text{m}}{\text{m}}$ bzw. 0,15%.

c) y_1 und y_2 lassen sich mit $f(x_1)$ und $f(x_2)$ berechnen. Es gilt also $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{8-18}{150-146} = \frac{-10}{4} = -2{,}5$

Das Gefälle beträgt $2{,}5\ \frac{\text{m}}{\text{km}}$ bzw. 0,25%.

(5) Übungsaufgabe: Näherungsweise Berechnung der Steigung an einer Stelle [11]

$$\frac{f(1{,}001) - f(1)}{1{,}001 - 1} = 1{,}31928004\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

$$\frac{f(5{,}001) - f(5)}{5{,}001 - 5} = -2{,}52023996\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

$$\frac{f(12{,}001) - f(12)}{12{,}001 - 12} = 6{,}0004 \cdot 10^{-4} = 0{,}00060004\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

(6) Übungsaufgabe zu „Der Grenzwert des Differenzenquotienten [13]

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 1{,}32\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = -2{,}52\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(12+h) - f(12)}{h} = 0\ \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Übungsaufgabe: San Francisco Marathon [13]

a) $\frac{f(18{,}3)-f(16{,}8)}{18{,}3-16{,}8} = \frac{25{,}8-93{,}268}{1{,}5} = -44{,}9727 \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$

b) näherungsweise:

$\frac{f(17{,}501)-f(17{,}5)}{0{,}001} = -67{,}6785 \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$

exakt:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(17{,}5+h)-f(17{,}5)}{h} = -67{,}6725 \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$

c) näherungsweise:

$\frac{f(16{,}801)-f(16{,}8)}{0{,}001} = 0{,}8489 \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$

exakt:

$\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(16{,}8+h)-f(16{,}8)}{h} = 0{,}9408 \left[\frac{\text{m}}{\text{km}}\right]$

Lösung: Vom Weg zur Geschwindigkeit

(1) Aufgabe: Wasserrakete [14]

a) <u>Hilfreiche Formulierungen:</u>

…startet…
…beginnt…
…befindet sich in 20 Metern Höhe…
…steigt…
…die Höhe nimmt immer langsamer zu…
…steigt immer langsamer…
…erreicht die maximale Höhe…
…die maximale Höhe beträgt…
…ist am höchsten Punkt…
…beginnt zu sinken…
…die Höhe nimmt immer schneller ab…
…sinkt immer schneller…
…zum Zeitpunkt $t = 2s$…
…nach 2 Sekunden…
…in den ersten 2 Sekunden…
…zwischen $t = 0s$ und $t = 2s$…
…ab $t = 2s$…

<u>Lösungsvorschlag:</u>

Die Rakete startet am Erdboden. In den ersten zwei Sekunden steigt die Rakete. Dabei nimmt ihre Höhe immer langsamer zu, bis sie nach genau 2 Sekunden ihre maximale Höhe von 40 Metern erreicht. Danach beginnt sie zu sinken und sinkt immer schneller.

b) $\frac{s(2)-s(0)}{2-0} = \frac{40-0}{2} = 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

c) $\frac{s(0{,}301)-s(0{,}3)}{0{,}001} = \frac{11{,}13399-11{,}1}{0{,}001} = \frac{0{,}03399}{0{,}001}$

$= 33{,}99 \approx 34 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$\frac{s(0{,}501)-s(0{,}5)}{0{,}001} = \frac{17{,}52999-17{,}5}{0{,}001} = \frac{0{,}02999}{0{,}001}$

$= 29{,}99 \approx 30 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$\frac{s(1{,}001)-s(1)}{0{,}001} = \frac{30{,}01999-30}{0{,}001} = \frac{0{,}01999}{0{,}001} = 19{,}99$

$\approx 20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$\frac{s(1{,}501)-s(1{,}5)}{0{,}001} = \frac{37{,}50999-37{,}5}{0{,}001} = \frac{0{,}00999}{0{,}001}$

$= 9{,}99 \approx 10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

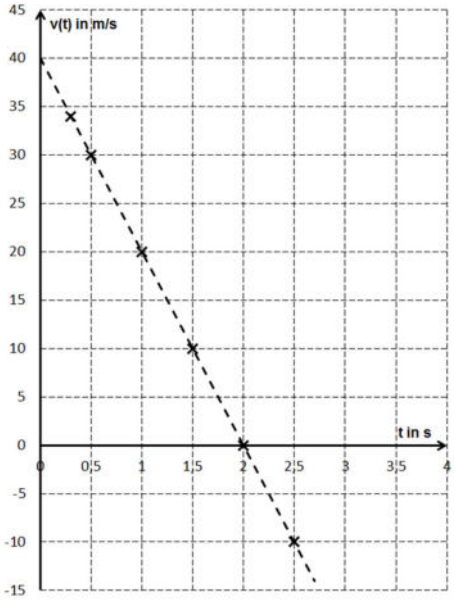
$\frac{s(2{,}001)-s(2)}{0{,}001} = \frac{39{,}99999-40}{0{,}001} = \frac{-0{,}00001}{0{,}001}$

$= -0{,}01 \approx 0 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$\frac{s(2{,}501)-s(2{,}5)}{0{,}001} = \frac{37{,}48999-37{,}5}{0{,}001} = \frac{-0{,}01001}{0{,}001}$

$= -10{,}01 \approx -10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

d)



e) $v(t) = -20t + 40$

$v(3) = -20 \cdot 3 + 40 = -60 + 40 = -20 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Ableitungsregeln entdecken [16]

Funktion	Ableitung
$f(x) = x^6$	$f'(x) = 6 \cdot x^5$
$f(x) = x^3 + x^9$	$f'(x) = 3 \cdot x^2 + 9 \cdot x^8$
$f(x) = 3x^4$	$f'(x) = 12 \cdot x^3$
$f(x) = \frac{1}{3}x^4 + 2x - 10$	$f'(x) = \frac{4}{3} \cdot x^3 + 2$

(3) Übungsaufgabe: Ableitungsfunktionen bestimmen [17]

a) $f'(x) = 8x^7$

b) $f'(x) = 12x^2$

c) $f'(x) = 48x^3 + 4x$

d) $f'(x) = 36x^5 - 15x^4$

e) $f'(x) = 18x - 30x^4 + 2$

f) $f'(x) = -21x^2 + 2x - 1$

g) Bei der Lösung wurde der Exponent um 1 verringert und die Zahl wurde dann mit dem Koeffizienten multipliziert. Das ist nicht richtig, da der Exponent der Ausgangsfunktion mit dem Koeffizienten multipliziert wird und dann erst um 1 verringert wird.

h) Die ersten zwei Summanden wurden richtig abgeleitet, nur der letzte Summand wurde nicht abgeleitet. Er hätte zu 0 werden müssen ($8 = 8x^0$, da $x^0 = 1$. Leitet man $8x^0$ ab, ergibt sich: $0 \cdot 8 \cdot x^{-1} = 0$).

(4) Übungsaufgabe: Tangentengleichung [18]

a) Ansatz: $t(x) = a \cdot x + b$

Steigung a bestimmen:

$a = f'(2)$

$f'(x) = 2 \cdot x$

$f'(2) = 2 \cdot 2 = 4 \qquad \Rightarrow a = 4$

b bestimmen:

$t(2) = f(2) = 2^2 + 7 = 4 + 7 = 11$

Es folgt: $11 = 4 \cdot 2 + b \Rightarrow b = 3$

$t(x) = 4 \cdot x + 3$

b) Ansatz: $t(x) = a \cdot x + b$

Steigung a bestimmen:

$a = g'(2)$

$g'(x) = 4 \cdot x + 3$

$g'(2) = 4 \cdot 2 + 3 = 11 \quad \Rightarrow a = 11$

b bestimmen:

$t(2) = g(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 + 4 = 18$

Es folgt: $18 = 11 \cdot 2 + b \Rightarrow b = -4$

$t(x) = 11 \cdot x - 4$

c) Ansatz: $t(x) = a \cdot x + b$

Steigung a bestimmen:

$a = h'(2)$

$h'(x) = 15 \cdot x^2 + 8 \cdot x$

$h'(x) = 15 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2 = 76 \qquad \Rightarrow a = 76$

b bestimmen:

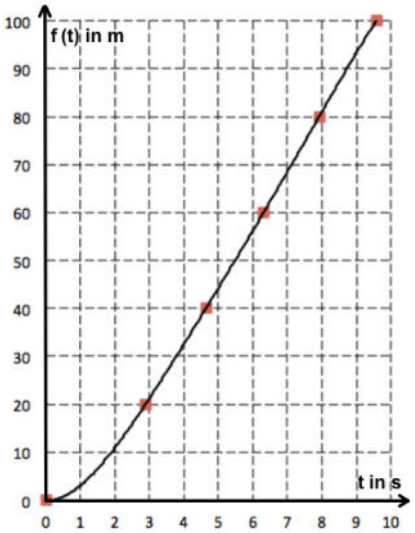
$t(2) = h(2) = 5 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 = 56$

Es folgt: $56 = 76 \cdot 2 + b \qquad \Rightarrow b = -96$

$t(x) = 76 \cdot x - 96$

(5) Aufgabe: Weltrekord über 100m Sprint [18]

a)



b) $f'(x) = -0{,}01174x^4 + 0{,}26698x^3 - 2{,}236674x^2 + 8{,}44928x - 0{,}50905$

Für $t = 2{,}89$: $f'(2{,}89) = 10{,}8535$

Für $t = 4{,}64$: $f'(4{,}64) = 11{,}7679$

Für $t = 6{,}31$: $f'(6{,}31) = 12{,}2082$

Für $t = 7{,}92$: $f'(7{,}92) = 12{,}5366$

Für $t = 9{,}58$: $f'(9{,}58) = 10{,}9761$

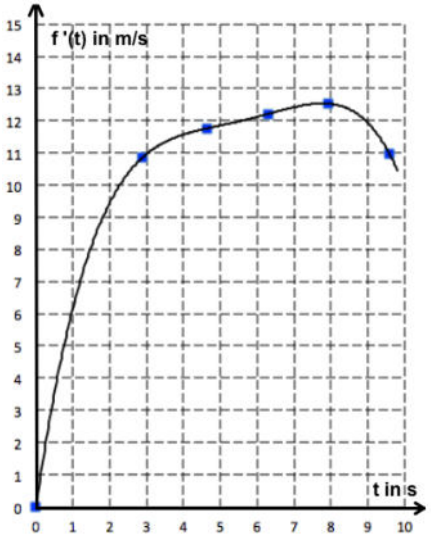
c) $s(2{,}89) = 19{,}999956$ ist korrekt berechnet, aber $s(t)$ gibt die zurückgelegte Strecke an

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

und nicht die Geschwindigkeit. Für die Geschwindigkeit muss die Ableitung berechnet werden.

d)



e) Hilfreiche Formulierungen:

…startet…

…beginnt…

…die Geschwindigkeit steigt…

…die Geschwindigkeit nimmt immer langsamer zu…

…steigt immer langsamer…

…erreicht die maximale Geschwindigkeit…

…erreicht die Höchstgeschwindigkeit…

…die maximale Geschwindigkeit beträgt…

…beginnt zu sinken…

…die Geschwindigkeit nimmt ab…

…sinkt…

…zum Zeitpunkt $t = 8s$…

…nach 3 Sekunden…

…in den ersten 3 Sekunden…

…zwischen $t = 3s$ und $t = 8s$…

…ab $t = 8s$…

Lösungsvorschlag:

Usain Bolt startet aus dem Startblock mit 0 $\mathrm{m/s}$. Innerhalb der ersten 3 Sekunden steigt seine Geschwindigkeit schnell auf ca. 11 m/s. Zwischen $t = 3s$ und $t = 8s$ nimmt die Geschwindigkeit weniger schnell zu, bis er zum Zeitpunkt $t = 8s$ seine Höchstgeschwindigkeit von 12,54 $\mathrm{m/s}$ erreicht. Ab $t = 8s$ sinkt seine Geschwindigkeit leicht.

f) Die maximale Geschwindigkeit wird ca. nach 7,9 Sekunden erreicht und beträgt ca. $12{,}54\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 45{,}14\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

Das bedeutet, dass die in den Medien benannte Geschwindigkeit nur seine durchschnittliche Geschwindigkeit war und er aber auf einem Teil der Strecke sogar noch wesentlich schneller gelaufen ist.

(6) Aufg.: Höhenprofil einer Straße [19]

a) $f'(x) = \frac{2}{25}x^3 - \frac{11}{25}x^2 + \frac{14}{25}x$

$f'(1) = 0{,}2\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{km}} = 20\%$

b) $f'(0{,}82) = 0{,}20745344\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{km}} \approx 20{,}75\%$

Nur die PKW ohne Anhänger können die Straße befahren.

c) $f'(2{,}85) = -0{,}12597\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{km}} \approx -12{,}6\%$

Auf dem Straßenschild sollte ein Gefälle von 13% angegeben werden.

(7) Übungsaufgabe: Bedeutung der ersten Ableitung im Kontext [20]

$f'(t)$ hat die Einheit $\frac{l}{h}$. Die Ableitung beschreibt die Abfüllgeschwindigkeit in Litern pro Stunde.

$g'(t)$ hat die Einheit $\frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{\mathrm{h}} = \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}^2}$. Die Ableitung beschreibt die Veränderung der Geschwindigkeit pro Stunde, also die Beschleunigung des Autos.

$h'(t)$ hat die Einheit $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}$. Die Ableitung gibt die Veränderung der Höhenmeter in Metern pro Kilometer Strecke, also die Steigung der Straße, an.

(8) Aufgabe: Bergwanderung [21]

a) Hilfreiche Formulierungen:

…startet…

…beginnt…

…befindet sich in 0,5 km Höhe…

…steigt…

…die Höhe nimmt zu…

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches „**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“ (von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

…die Steigung des Weges nimmt zu / ab…
…wird der Weg immer steiler…
…der Weg ist am steilsten…
…die steilste Stelle befindet sich bei…

…die Steigung hat den Wert 0…
…der Weg verläuft horizontal…
…erreicht ein Plateau…
…erreicht die maximale Höhe…
…die maximale Höhe beträgt…
…ist am höchsten Punkt…
…der Weg führt bergab…
…die Höhe nimmt immer schneller ab…
…bei Kilometer $x = 5\ \text{km}$…
…nach 5 Kilometern…
…auf den ersten 10 Kilometern…
…zwischen $x = 4\text{km}$ und $x = 6\text{km}$…
…ab $x = 10\text{km}$…

Lösungsvorschlag:

Die Wanderung beginnt bei 0 km Höhe. Auf den ersten 2 km wird der Weg immer steiler und flacht dann bis zu 5 km ab. Bei Kilometer $x = 5$ km befindet sich in 0,5 km ein Plateau. Im Anschluss steigt der Weg weiter. Der höchste Punkt wird bei Kilometer $x = 10$ km erreicht. Die Höhe beträgt dort 1 km. Ab Kilometer $x = 10$ km führt der Weg bergab.

b) $f'(x) = -\frac{3}{2500}x^4 + \frac{3}{125}x^3 - \frac{3}{20}x^2 + \frac{3}{10}x$

$f'(0) = 0$

$f'(2) = 0{,}1728$

$f'(5) = 0$

$f'(10) = 0$

$f'(11{,}5) = -0{,}874575$

c) An den Stellen $x = 0$, $x = 5$ und $x = 10$ ist die Steigung gleich 0, da an allen drei Stellen der Bergwanderer weder aufwärts noch abwärts wandern müsste.

(9) Aufgabe: Notw. Bedingung für Tief-, Hoch- und Sattelpkt. anwenden [22]

a) Ansatz: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 1$

Löse die Gleichung $3x^2 - 1 = 0$ nach x:

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0{,}577$

b) Ansatz: $g'(x) = 0$

$g'(x) = -2x$

Löse die Gleichung $-2x = 0$ nach x:

$x = 0$

d) Ansatz: $h'(x) = 0$

$h'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2$

Löse die Gleichung $5x^4 + 4x^3 - 6x^2 = 0$ nach x:

$x_1 = 0$, $x_2 \approx 0{,}766$ und $x_3 \approx -1{,}566$

(10) Übungsaufgabe: Anwendung des Vorzeichen-Wechsel-Kriteriums [24]

a) Zu Aufgabe 9, Teil a)

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0{,}577$

$f'(0{,}577 - 0{,}1) = -0{,}32 < 0$

$f'(0{,}577 + 0{,}1) = 0{,}37 > 0$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$

$f'(-0{,}577 - 0{,}1) = 0{,}37 > 0$

$f'(-0{,}577 + 0{,}1) = -0{,}32 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0{,}577$

b) Zu Aufgabe 9, Teil b)

$g'(x) = -2x$ und $x = 0$

$g'(0 - 0{,}1) = 0{,}2 > 0$

$g'(0 + 0{,}1) = -0{,}2 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x = 0$

c) Zu Aufgabe 9, Teil c)

$h'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2$

$x_1 = 0$, $x_2 \approx 0{,}766$ und $x_3 \approx -1{,}566$

$h'(0 - 0{,}1) = -0{,}0635 < 0$

$h'(0 + 0{,}1) = -0{,}0555 < 0$

$\Longrightarrow$ Sattelpunkt bei $x_1 = 0$

$h'(0{,}766 - 0{,}1) = -0{,}5 < 0$

$h'(0{,}766 + 0{,}1) = 0{,}91 > 0$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $x_2 = 0.766$

$h'(-1{,}566 - 0{,}1) = 3{,}37 > 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$h'(-1{,}566 + 0{,}1) = -2{,}4 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x_3 = -1.566$

(11) Aufgabe: Bestimmen der zweiten Ableitung [25]

a) zur Erinnerung (Aufgabe 9):

$f'(x) = 3x^2 - 1$

$x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$ und $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0{,}577$

$f''(x) = 6x$

$f''(0{,}577) = 3{,}462 > 0$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $x_1 = \sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0{,}577$

$f''(-0{,}577) = -3{,}462 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x_2 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0{,}577$

b) zur Erinnerung (Aufgabe 9):

$g'(x) = -2x$ und $x = 0$

$g''(x) = -2$

$g''(0) = -2 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x = 0$

c) zur Erinnerung (Aufgabe 9):

$h'(x) = 5x^4 + 4x^3 - 6x^2$

$x_1 = 0$, $x_2 \approx 0{,}766$ und $x_3 \approx -1{,}566$

$h''(x) = 20x^3 + 12x^2 - 12x$

$h''(0) = 0$

$\Longrightarrow$ Sattelpunkt bei $x_1 = 0$

$h''(0{,}766) = 6{,}84 > 0$

$\Longrightarrow$ Minimum bei $x_2 = 0.766$

$h''(-1{,}566) = -28{,}59 < 0$

$\Longrightarrow$ Maximum bei $x_3 = -1{,}566$

(12) Aufgabe: Cosinus°Cola [26]

a) $g(0) = -102$

Das Unternehmen hat Fixkosten in Höhe von 102 000 €.

b) Ansatz: $g(x) = 0$

$\Longrightarrow x_1 = 50$, $x_2 = 1000$ und $x_3 = 5100$

Weise nun nach, zwischen welchen Produktionsmengen Gewinn erwirtschaftet wird:

z.B. $g(51) = 1{,}92 > 0$ und

$g(1001) = -1{,}56 < 0$

Die Gewinnzone ist $50 \leq x \leq 1000$.

c) Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$

$g'(x) = \frac{3}{2.500.000}x^2 - \frac{123}{25.000}x + \frac{1081}{500}$

$g'(x) = 0$

$\Longrightarrow x_1 = 500{,}538$ und $x_2 = 3599{,}462$

Die zweite Lösung entfällt, da der Wert nicht in der Gewinnzone liegt.

Hinreichende Bedingung: $g''(x) < 0$

$g''(x) = \frac{3}{1.250.000}x - \frac{123}{25.000}$

$g''(500{,}538) = -0{,}0037 < 0 \Longrightarrow$ Maximum

($g''(3599{,}362) = 0{,}0037 > 0 \Longrightarrow$ Minimum)

Das Unternehmen erwirtschaftet den maximalen Gewinn, wenn es 500,538 m^3 bzw. 500538 Liter Cosinus° Cola pro Monat produziert.

d) Der Lösungsansatz ist richtig, es fehlt jedoch die Überprüfung der hinreichenden Bedingung. Die notwendige Bedingung zeigt nur, dass es sich um einen Hoch-, Tief- oder Sattelpunkt handelt und nicht um welche der drei Möglichkeiten.

(13) Aufg.: Schwimmbadbesucher [27]

a) Ansatz: $b(t) = 800$

$t_1 = 0{,}57677$

Dieses entspricht etwa 34 Minuten 36 Sekunden (Nebenrechnung: $0{,}57677 \cdot 60 = 34{,}6062$ und $0{,}6062 \cdot 60 = 36{,}372$).

$t_2 = 2{,}35346$

Dieses entspricht 2 Stunden 21 Minuten 12 Sekunden.

$t_3 = 3{,}88768$

Dieses entspricht 3 Stunden 53 Minuten 16 Sekunden.

$t_4 = 8{,}7199$

Dieses entspricht 8 Stunden 43 Minuten 12 Sekunden.

Um zu prüfen, in welchen Zeiträumen weniger bzw. mehr als 800 Besucher in dem Schwimmbad sind, berechnet man die Anzahl der Besucher jeweils links und rechts der Nullstellen:

bei $t = 0{,}5$ $\quad b(0{,}5) \approx 731 < 800$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

bei $t = 1$ $\quad b(1) \approx 1022 > 800$

bei $t = 3$ $\quad b(3) \approx 662 < 800$

bei $t = 5$ $\quad b(5) \approx 1642 > 800$

bei $t = 8{,}8$ $\quad b(8{,}8) \approx 437 < 800$

Zwischen 8:00 Uhr und 8:34 Uhr befinden sich weniger als 800 Besucher im Schwimmbad, ebenso wie zwischen 10:22 Uhr und 11:53 Uhr und von 16:44 Uhr bis zur Schließung des Schwimmbads.

b) Notwendige Bedingung: $b'(t) = 0$

$b'(t) = -69{,}54t^3 + 810{,}375t^2 - 2510{,}422t + 2024{,}471$

$b'(t) = 0$ liefert:

$t_1 = 1{,}271$

$t_2 = 3{,}18$

$t_3 = 7{,}202$

Hinreichende Bedingung: $b''(t) > 0$

$b''(t) = -208{,}62t^2 + 1620{,}75t - 2510{,}422$

$b''(1{,}271) = -787{,}46 < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

$b''(3{,}18) = 533{,}91 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

$b''(7{,}202) = -1658{,}65 < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

Bei $t_2 = 3{,}18$ bzw. nach etwa 3 Stunden und 11 Minuten bzw. um 11:11 Uhr wird die minimale Besucherzahl erreicht. Natürlich sind zur Öffnung und Schließung des Schwimmbades weniger Gäste vorhanden.

(14) Übungsaufgabe: Minima, Maxima und Sattelpunkte bestimmen [27]

a) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 6x^2 + 6x - 36$

$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = -3$ und $x_2 = 2$

Hinreichende Bedingung mit Vorzeichen-Wechsel-Kriterium:

$f'(-3{,}001) = 0{,}03 > 0$ und

$f'(-2{,}999) = -0{,}03 < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

$f'(1{,}999) = -0{,}03 < 0$ und

$f'(2{,}001) = 0{,}03 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

Hinreichende Bedingung mit zweiter Ableitung:

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(-3) = -30 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(2) = 30 > 0 \Rightarrow$ Minimum

Funktionswerte bestimmen:

$f(-3) = 81 \Rightarrow$ Maximum: $P(-3 \mid 81)$

$f(2) = -44 \Rightarrow$ Minimum: $P(2 \mid -44)$

b) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = x^3 - 16x$

$f'(x) = 0 \rightarrow x_1 = -4, x_2 = 0$ und $x_3 = 4$

Hinreichende Bedingung mit Vorzeichen-Wechsel-Kriterium:

$f'(-4{,}001) = -0{,}03 < 0$ und

$f'(-3{,}999) = 0{,}03 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

$f'(-0.001) = 0{,}02 > 0$ und

$f'(0{,}001) = -0{,}02 < 0$

$\Rightarrow$ Maximum

$f'(3{,}999) = -0{,}03 < 0$ und

$f'(4{,}001) = 0{,}03 > 0$

$\Rightarrow$ Minimum

Hinreichende Bedingung mit zweiter Ableitung:

$f''(x) = 3x^2 - 16$

$f''(-4) = 32 > 0 \Rightarrow$ Minimum

$f''(0) = -16 < 0 \Rightarrow$ Maximum

$f''(4) = 32 > 0 \Rightarrow$ Minimum

Funktionswerte bestimmen:

$f(-4) = -59 \Rightarrow$ Minimum: $P(-4 \mid -59)$

$f(0) = 5 \Rightarrow$ Maximum: $P(0 \mid 5)$

$f(4) = -59 \Rightarrow$ Minimum: $P(4 \mid -59)$

c) Notwendige Bedingung: $f'(x) = 0$

$f'(x) = x^3 - 2x^2$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

Hinreichende Bedingung mit Vorzeichen-Wechsel-Kriterium:

$f'(-0{,}001) = -0{,}000002 < 0$ und

$f'(0{,}001) = -0{,}000002 < 0$

$\Rightarrow$ Sattelpunkt

$f'(1{,}999) = -0{,}004 < 0$ und

$f'(2{,}001) = 0{,}004 > 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$\Rightarrow$ Minimum

Hinreichende Bedingung mit zweiter Ableitung:

$f''(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(0) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

$f''(2) = 4 > 0 \Rightarrow$ Minimum

Funktionswerte bestimmen:

$f(0) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt: $P(0 \mid 0)$

$f(2) = -\frac{4}{3} \Rightarrow$ Minimum: $P(2 \mid -\frac{4}{3})$

(15) Aufgabe: Planung einer Parkhausauffahrt [27]

a) $\frac{Höhendifferenz}{horizontale\ Länge} = \frac{4\text{m}}{12\text{m}} = \frac{1}{3} = 33,\overline{3}\%$

b) Der Punkt, an dem die Steigung maximal ist, entspricht dem Maximum der 1. Ableitung.

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = -\frac{1}{36}x + \frac{1}{6}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = 6$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = -\frac{1}{36} < 0 \Rightarrow$ Maximum der ersten Ableitung

Funktionswert bestimmen:

$f(6) = 2 \Rightarrow$ Punkt, an dem die Steigung maximal ist: $P(6 \mid 2)$

Steigung bestimmen:

$f'(6) = 0{,}5 = 50\%$

c) Die Auffahrt wäre nicht geeignet, da die maximale Steigung weit über 35% liegt. Die Ausmaße des Autos wurden in dieser Aufgabe nicht betrachtet.

(16) Übungsaufgabe: Wendepunkte berechnen [29]

a) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 12x + 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x = -0{,}5$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = 12 > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Funktionswert bestimmen:

$f(-0{,}5) = 18{,}5$

$\Rightarrow$ Wendepunkt: $P(-0{,}5 \mid 18{,}5)$

Steigung berechnen:

$f'(-0{,}5) = -37{,}5$

b) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 3x^2 - 16$

$f''(x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = -2{,}31$ und $x_2 = 2{,}31$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = 6x$

$f'''(-2{,}31) = -13{,}86 < 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt

$f'''(2{,}31) = 13{,}86 > 0$

$\Rightarrow$ Wendepunkt

Funktionswerte bestimmen:

$f(-2{,}31) = -30{,}57$

$\Rightarrow$Wendepunkt: $P(-2{,}31 \mid -30{,}57)$

$f(2{,}31) = -30{,}57$

$\Rightarrow$Wendepunkt: $P(2{,}31 \mid -30{,}57)$

Steigungen berechnen:

$f'(-2{,}31) = 24{,}63$

$f'(2{,}31) = -24{,}63$

c) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = 3x^2 - 4x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = \frac{4}{3}$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = 6x - 4$

$f'''(0) = -4 < 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

$f'''\left(\frac{4}{3}\right) = 4 > 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

Funktionswerte bestimmen:

$f(0) = 0 \Rightarrow$ Wendepunkt: $P(0|0)$

$f\left(\frac{4}{3}\right) = -\frac{64}{81}$

$\Rightarrow$ Wendepunkt: $P(\frac{4}{3}| -\frac{64}{81})$

Steigungen berechnen:

$f'(0) = 0$

$f'\left(\frac{4}{3}\right) = -1{,}19$

d) Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0$

$f''(x) = \frac{6}{25}x^2 - \frac{22}{25}x + \frac{14}{25}$

$f''(x) = 0 \Rightarrow x_1 = 0{,}82$ und $x_2 = 2{,}85$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) = \frac{12}{25}x - \frac{22}{25}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$f'''(0{,}82) = -0{,}4864 < 0 \Longrightarrow$ Wendepunkt

$f'''(2{,}85) = 0{,}488 > 0 \Longrightarrow$ Wendepunkt

Funktionswerte bestimmen:

$f(0{,}82) = 0{,}2$

$\Longrightarrow$ Wendepunkt: $P(0{,}82|0{,}2)$

$f(2{,}85) = 0{,}28$

$\Longrightarrow$ Wendepunkt: $P(\,2{,}85|0{,}28)$

Steigungen berechnen:

$f'(0{,}82) = 0{,}21$

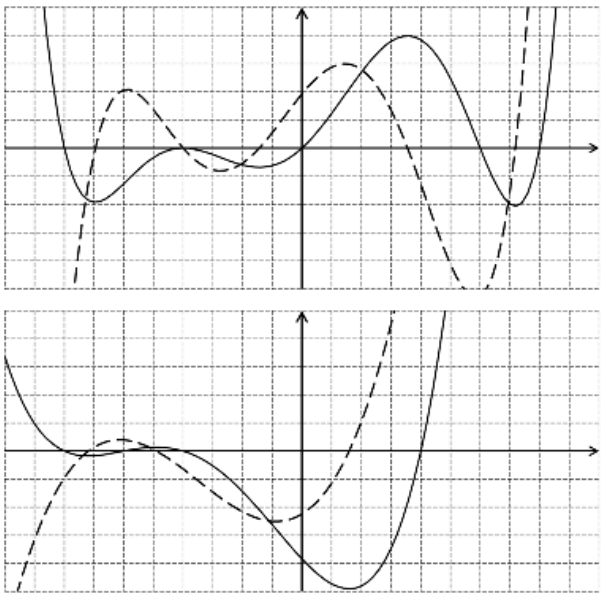
$f'(2{,}85) = -0{,}13$

(17) Übungsaufgabe: Ableitungen zuordnen [31]

a) A → 5, B → 4, C → 2, D → 3, E → 1

b) Bei den Funktionen in den Abbildungen A und B handelt es sich in beiden Fällen um Funktionen 3. Grades, d.h. die Ableitungsfunktion muss jeweils eine quadratische Funktion sein. Folglich kommen nur die Funktionen in den Abbildungen (4) und (5) in Frage. Beide Funktionen A und B besitzen die gleichen x-Werte an den Extremstellen, die in der Ableitung zu Nullstellen werden. Dies allein genügt also nicht, um sie zuordnen zu können. Betrachtet werden muss, ob die Funktion zwischen den beiden Extremstellen ansteigt (Funktion A) oder fällt (Funktion B). Steigt die Funktion an, so liegt der Graph der Ableitungsfunktion zwischen den beiden Nullstellen oberhalb der x-Achse. Dies ist in Abbildung (5) der Fall. Analog muss der Graph der Ableitungsfunktion zwischen den beiden Nullstellen unterhalb der x -Achse verlaufen, wenn es die zugehörige Ableitungsfunktion zu der Funktion B ist.

(18) Übungsaufgabe: Ableitungen zeichnen [32]



(19) Aufgabe: Produktion von x-Phones [33]

a) $k(0) = 600\,000$

Die Fixkosten betragen 600 000 €.

b) Ansatz: $g(x) = e(x) - k(x)$ →

$e(x) = g(x) + k(x)$

$e(x) = -\frac{1}{1800000}x^3 + \frac{1}{75}x^2 + 240x$

$\quad -600000 + \frac{1}{1800000}x^3 - \frac{1}{75}x^2 + 160x$

$\quad +600000$

$e(x) = 400x$

Der Preis pro x-Phone beträgt damit 400€.

c) $g(12000) = 3\,240\,000$ [€]

d) Ansatz: $g(x) = 0$

Es ergeben sich die Lösungen

$x_1 \approx -13600{,}9$, $x_2 \approx 2245{,}98$ und

$x_3 \approx 35354{,}9$.

Die erste Lösung entfällt, da keine negative Anzahl an x-Phones produziert werden kann.

Der Wert 2245,98 muss aufgerundet werden, da das Unternehmen bis 2245 Produktionseinheiten noch Verluste macht und ab einer Produktionsmenge von 2246 Gewinn erwirtschaftet.

Ohne CAS: $g(2245) = -285{,}7$ und $g(2246) = 5{,}8$. Somit ist bestätigt, dass ab

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

2246 x-Phones ein Gewinn erwirtschaftet wird.

e) Gesucht ist das Maximum:

Notwendige Bedingung: $g'(x) = 0$

$$g'(x) = -\frac{1}{600000}x^2 + \frac{2}{75}x + 240$$

Löse die Gleichung

$$-\frac{1}{600000}x^2 + \frac{2}{75}x + 240 = 0$$

Es ergeben sich die folgenden Kandidaten für Extremstellen: $x_1 = -6422{,}2$ und $x_2 = 22422{,}2$

Die erste der beiden Lösungen entfällt, da keine negative Anzahl an x-Phones produziert werden kann.

Hinreichende Bedingung: $g''(x) < 0$

$$g''(x) = -\frac{1}{300000}x + \frac{2}{75}$$

$g''(22422{,}2) = -0{,}048 < 0$ → Maximum an der Stelle $x_2 = 22422{,}2$

Da das Ergebnis nicht ganzzahlig ist, prüfe nun, ob der maximale Gewinn bei $x = 22422$ oder $x = 22423$ erzielt wird:

$g(22422) \approx 5222020{,}73$

$g(22423) \approx 5222020{,}72$

Der maximale Gewinn beträgt 5 222 020,73 Euro und wird bei 22422 Produktionseinheiten erzielt.

f) Gesucht ist der Wendepunkt:

Notwendige Bedingung: $g''(x) = 0$

$$g''(x) = -\frac{1}{300000}x + \frac{2}{75}$$

Löse die Gleichung $-\frac{1}{300000}x + \frac{2}{75} = 0$.

Die Gleichung hat die folgende Lösung: $x = 8000$.

Hinreichende Bedingung: $g'''(x) \neq 0$

$$g'''(x) = -\frac{1}{300000}$$

$$g'''(8000) = -\frac{1}{300000} \neq 0$$

Setze $x = 8000$ in die Funktion $g'(x)$ ein, um die zugehörige Gewinnrate zu bestimmen.

$g'(8000) = 346{,}\overline{6}$

Die maximale Gewinnrate beträgt $346{,}67$ € pro x-Phone $\left[\frac{€}{\text{x-Phone}}\right]$.

(20) Aufgabe: Kundenzählung im Schnellrestaurant [34]

a) $b(0) = 10$ und $b(11{,}5) = 23{,}45$

Um 10:00 Uhr befinden sich 10 Besucher im Burger-Restaurant und um 21:30 Uhr zwischen 23 und 24 Besucher.

b) Notwendige Bedingung: $b'(t) = 0$

$$b'(t) = -\frac{8}{27}t^3 + \frac{136}{27}t^2 - \frac{232}{9}t + 40$$

Aus der Gleichung $b'(t) = 0$ ergeben sich die folgenden Lösungen:

$t_1 = 3$, $t_2 = 5$ und $t_3 = 9$

Die drei Kandidaten für Extremstellen sind somit bestätigt.

Hinreichende Bedingung: $b''(t) < 0$ (Maximum) und $b''(t) > 0$ (Minimum)

$$b''(t) = -\frac{8}{9}t^2 + \frac{272}{27}t - \frac{232}{9}$$

$b''(3) = -\frac{32}{9} < 0$ $\Rightarrow$ Maximum

$b''(5) = \frac{64}{27} > 0$ $\Rightarrow$ Minimum

$b''(9) = -\frac{64}{9} < 0$ $\Rightarrow$ Maximum

Ohne CAS:

Überprüfen der notwendigen Bedingung $b'(t) = 0$:

$$b'(t) = -\frac{8}{27}t^3 + \frac{136}{27}t^2 - \frac{232}{9}t + 40$$

$b'(3) = 0$

$b'(5) = 0$

$b'(9) = 0$

Überprüfung der hinreichenden Bedingung siehe oben.

c) $b(3) = 53{,}\overline{3}$

$b(9) = 64$

Die maximale Besucherzahl beträgt 64 Besucher. Auch zur Öffnung und Schließung des Burger-Restaurants befinden sich weniger Besucher in der Burger-Bude (siehe a)).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

d) $b(5) = 51{,}358$

Die minimale Besucheranzahl beträgt 10 Besucher und wird bereits um 10:00 Uhr erreicht (siehe a)).

Lösung: Einstieg in die Integralrechnung

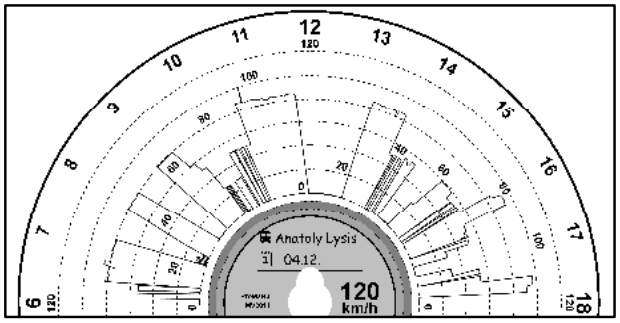
(1) Aufgabe zum Einstieg [36]

Abgebildet sind ein Fahrtenschreiber, ein LKW und ein Schild einer Polizeikontrolle. Mögliche Fragestellungen beziehen sich auf den Fahrtenschreiber, die abgebildete LKW-Fahrt und Untersuchungen bezüglich des Fahrtenschreibers bei einer Polizeikontrolle.

Es bietet sich an, die Fahrt des LKW zu beschreiben und hier unterschiedliche Geschwindigkeiten zu untersuchen und Hypothesen über die Fahrt zu treffen.

Lösung: Von der Geschwindigkeit zum zurückgelegten Weg

(2) Aufgabe: Auswertung eines Fahrtenschreibers 1 [37]



6:00 bis 9:30: Landstraßen mit kleineren Ortschaften, evtl. Ampeln und kurzer Pause

9:30 bis 10:30: Stadtverkehr, Ampeln und evtl. Stau

10:30 bis 11:45: Autobahn mit kurzem Überholmanöver

11:45 bis 13:00: Pause, eventuell auf einer Autobahnraststätte

13:00 bis 13:45: Autobahn

13:45 bis 15:45: Stadtverkehr mit Pause

15:45 bis 18:00: Landstraßenfahrt mit Stadtverkehr in der Mitte

(3) Aufgabe: Auswertung eines Fahrtenschreibers 2 [38]

a) Die Höchstgeschwindigkeit lässt sich am Hochpunkt des Graphen ablesen und beträgt ca. 90 $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) Das Fahrzeug stand von ca. 6,4 bis 6,45 (06:24 bis 06:27); 7,3 bis 7,4 (07:18 bis 07:24); 8,1 bis 8,7 (08:06 bis 08:42); 9,5 bis 9,8 (09:30 bis 09:48).

c) Vermutlich gab es zwischen 7,1 und 7,3 (07:06 bis 07:18) einen Stau, da das Fahrzeug dort langsam fuhr und auch stand.

d) Von 8,1 bis 8,7 (08:06 bis 08:42) hat der Fahrer eine längere Pause gemacht und eine kürzere von 9,5 bis 9,8 (09:30 bis 09:48).

e) Einige Vermutungen:

5,7 bis 6,3 (05:42 bis 06:18): Industriegebiet

6,4 bis 7,1 (06:24 bis 07:06): Landstraße

7,1 bis 7,4 (07:06 bis 07:24): stockender Verkehr

7,4 bis 8,1 (07:24 bis 08:06): Landstraße

8,7 bis 9,5 (08:42 bis 09:30): Stadtverkehr

(4) Aufgabe: Kundenbeschwerde beim Velocity-CityKurier [38]

Der Spediteur könnte die zurückgelegte Strecke auf der Fahrt vor der Pause berechnen, indem er für beide Fahrten die Geschwindigkeit mit der Zeit multipliziert:

$s_1 = 50\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{h} = 50\ \text{km}$ und
$s_2 = 70\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 1\text{h} = 70\ \text{km}$.

Somit ist der Fahrer vor neun Uhr nur ungefähr 120 km weit gefahren und konnte nicht beim 140 km weit entfernten Kunden pünktlich angekommen sein.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufg.: Bestimmen der Einheit [39]

a) $\frac{\text{l}}{\text{min}} \cdot \text{min} = \text{l}$ → Die Einheit der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $v(t)$ und der t-Achse ist Liter.

b) $\frac{\text{mg}}{\text{min}} \cdot \text{min} = \text{mg}$ → Die Einheit der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion $f(t)$ und der t-Achse ist Milligramm.

(6) Aufgabe: Pumpspeicherwerk Geesthacht [39]

a) Hilfreiche Formulierungen:

…zu Beginn…

…wird den Berg hochgepumpt…

…mit einer Durchflussgeschwindigkeit von…

…erreicht die maximale Durchfluss-geschwindigkeit von…

…wird konstant mit einer Durchfluss-geschwindigkeit von 100 000 $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ den Berg hochgepumpt…

…wird weniger Wasser pro Stunde hoch-gepumpt…

…wird weder Wasser hochgepumpt noch läuft Wasser den Berg hinunter…

…die Durchflussgeschwindigkeit nimmt ab…

…fließt den Berg hinunter…

…fließen 200 000 m^3 pro Stunde den Berg hinunter…

Lösungsvorschlag:

Zu Beginn des Tages werden 100 000 $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$ in das Speicherbecken hochgepumpt. Ab 2 Uhr nachts wird dann wesentlich mehr Wasser in das Speicherbecken gepumpt (400 000 $\frac{\text{m}^3}{\text{h}}$). Ab 10 Uhr morgens liegen die Pumpen still und um 17 Uhr fließt dann Wasser den Berg hinunter, um Strom zu erzeugen. Dies endet um 22 Uhr.

b) Die Fläche wird in mehrere Rechtecke zerlegt:

0 bis 2 Uhr: $100\,000\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 2\text{h} = 200\,000\ \text{m}^3$

2 bis 8 Uhr: $400\,000\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 6\text{h} = 2\,400\,000\ \text{m}^3$

8 bis 10 Uhr: $200\,000\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 2\text{h} = 400\,000\ \text{m}^3$

Insgesamt wurden 3 000 000 m^3 Wasser den Berg hochgepumpt.

c) Den Berg hinunter floss das Wasser nur von 17 bis 22 Uhr, also:

$V = 200\,000\frac{\text{m}^3}{\text{h}} \cdot 5\text{h} = 1\,000\,000\ \text{m}^3$.

Somit flossen 1 000 000 m^3 Wasser den Berg hinab.

d) Zu dem Bestand um Mitternacht muss das hinzugefügte Wasser addiert werden und dann das abgepumpte Wasser subtrahiert werden:

$560\,000\text{m}^3 + 3\,000\,000\text{m}^3$

$-1\,000\,000\text{m}^3 = 2\,560\,000\text{m}^3$

24 Stunden später sind demnach 2 560 000 m^3 im Becken vorhanden.

(7) Aufgabe: Download [41]

a) Hilfreiche Formulierungen:

…zu Beginn…

…die Downloadgeschwindigkeit wächst gleichmäßig…

…mit einer Downloadgeschwindigkeit von…

…erreicht die maximale Download-geschwindigkeit von…

…die Downloadgeschwindigkeit bleibt konstant…

…wird konstant mit einer Download-geschwindigkeit von 300 $\frac{kByte}{s}$ herunter-geladen…

…der Download endet nach 180 s…

Lösungsvorschlag:

In den ersten 25 s beginnt der Download zunächst langsam und wird immer schneller. Dann wird das Video für 50 s mit einer konstanten Downloadgeschwindig-keit von 300 $\frac{\text{kByte}}{\text{s}}$ heruntergeladen und zum Zeitpunkt $t = 75\,\text{s}$ erhöht sich die Downloadgeschwindigkeit auf ca. 550 $\frac{\text{kByte}}{\text{s}}$. Der Download endet nach 180 s.

b) Um die Größe des Videos zu berechnen, betrachtet man die drei Abschnitte:

0 s bis 25 s: Die Fläche des Dreiecks berechnet man mit

$\frac{1}{2} \cdot 25\,\text{s} \cdot 300\,\frac{\text{kByte}}{\text{s}} = 3\,750\,\text{kByte}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

25 s bis 75 s: Die Fläche des Rechtecks berechnet man mit

$50\ \text{s} \cdot 300\ \frac{\text{kByte}}{\text{s}} = 15\,000\ \text{kByte}$

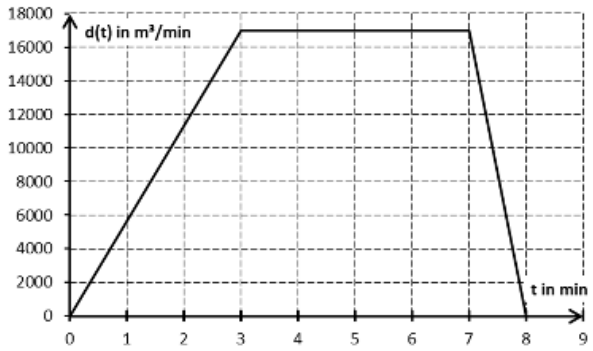
75 s bis 180 s: Die Fläche des Rechtecks berechnet man mit

$105\ \text{s} \cdot 550\ \frac{\text{kByte}}{\text{s}} = 57\,750\ \text{kByte}$

Die Größe des gesamten Videos beträgt demnach 76 500 kByte.

(8) Aufgabe: Gatún-Schleusen im Panamakanal [41]

a)



b) 0 bis 3 min:

$\frac{1}{2} \cdot \left(3\ \text{min} \cdot 17.000\ \frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) = 25\,500\ \text{m}^3$

3 bis 7 min:

$4\ \text{min} \cdot 17.000\ \frac{\text{m}^3}{\text{min}} = 68\,000\ \text{m}^3$

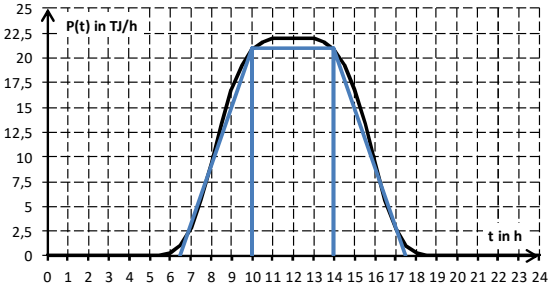
7 bis 8 min:

$\frac{1}{2} \cdot \left(1\ \text{min} \cdot 17.000\ \frac{\text{m}^3}{\text{min}}\right) = 8\,500\ \text{m}^3$

Insgesamt ist demnach eine Menge von 102 000 m^3 Wasser zugeflossen.

(9) Aufgabe: Solarenergie in Deutschland [42]

Beispielhafte Zerlegung:



6,5 bis 10 h: $\frac{1}{2} \cdot \left(3{,}5\ \text{h} \cdot 21\ \frac{\text{TJ}}{\text{h}}\right) = 36{,}75\ \text{TJ}$

10 bis 14 h: $4\ \text{h} \cdot 21\ \frac{\text{TJ}}{\text{h}} = 84\ \text{TJ}$

14 bis 17,5 h: $\frac{1}{2} \cdot \left(3{,}5\ \text{h} \cdot 21\ \frac{\text{TJ}}{\text{h}}\right) = 36{,}75\ \text{TJ}$

Insgesamt wurde näherungsweise eine Energiemenge von 157,5 TJ gehandelt.

(10) Übungsaufgabe: Herzminutenvolumen [43]

Durch Zählen der Kästchen in der Grafik ergeben sich circa 38 ganze Kästchen und 5 halbe Kästchen, die jeweils 25 Liter angeben. Insgesamt werden in dem Untersuchungszeitraum von einer Stunde demnach 1012,5 Liter vom Herzen durch den Körper gepumpt. Dieses entspricht ungefähr 4,6 gefüllten Badewannen.

(11) Übungsaufgabe: Die Kirche São Francisco de Assisi [44]

Durch Zählen ergibt sich, dass die Fläche aus ungefähr 117 Kästchen besteht, die jeweils 0,5 m^2 groß sind. Somit ist die Fläche ungefähr 58,5 m^2 groß. Insgesamt wird also näherungsweise eine Menge von $58{,}5\ \text{m}^2 \cdot 0{,}3\ \frac{\text{l}}{\text{m}^2} = 17{,}55\ \text{l}$ des Schutzanstriches benötigt.

Lösung: Von der Näherung zur Berechnung

(1) Aufgabe: ABS-Bremsweg abschätzen [45]

Die drei Verfahren unterscheiden sich in der Breite der zum Auslegen der Fläche verwendeten Rechtecke. In der ersten Abbildung wird eine Breite von 1,5 s verwendet, während in der zweiten eine Breite von 1 s genutzt wird und in der dritten Abbildung ist nur noch eine Breite von 0,5 s gewählt wurde. Je geringer die Breite der Rechtecke gewählt wurde, umso genauer wird die Abschätzung der betrachteten Fläche, da weniger Fläche oberhalb der Rechtecke unbeachtet bleibt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Bestimmen einer Stammfunktion [48]

	Funktion f(x)	Stammfunktion F(x)
a)	$\boldsymbol{f(x) = 3x^2}$	$F(x) = x^3$
b)	$\boldsymbol{f(x) = 6x^5}$	$F(x) = x^6$
c)	$f(x) = 4x^3$	$\boldsymbol{F(x) = x^4}$
d)	$\boldsymbol{f(x) = 6x}$	$F(x) = 3x^2$
e)	$\boldsymbol{f(x) = 7}$	$F(x) = 7x$
f)	$f(x) = 10x^4$	$\boldsymbol{F(x) = 2x^5}$
g)	$\boldsymbol{f(x) = 3x^2 + 16x^3}$	$F(x) = x^3 + 4x^4$
h)	$f(x) = 42$	$\boldsymbol{F(x) = 42x}$
i)	$f(x) = 9x^2 - 6x^5$	$\boldsymbol{F(x) = 3x^3 - x^6}$
j)	$f(x) = x^3$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{4}x^4}$
k)	$f(x) = 10x^4 + x^2$	$\boldsymbol{F(x) = 2x^5 + \frac{1}{3}x^3}$
l)	$f(x) = x^5 + 17$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{1}{6}x^6 + 17x}$
m)	$f(x) = a \cdot x^b$	$\boldsymbol{F(x) = \frac{a}{b+1}x^{b+1}}$

Allgemeine Regel: Für jeden Summanden wird der Exponent um Eins erhöht und der zugehörige Koeffizient wird durch den neuen Exponenten dividiert (siehe Information).

(3) Übungsaufgaben: Bilden von Stammfunktionen [49]

a) $F(x) = \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3$

b) $F(x) = \frac{1}{7}x^7 + x^6$

c) $F(x) = -\frac{5}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^2$

d) $F(x) = \frac{2}{6}x^6 - x^3 = \frac{1}{3}x^6 - x^3$

e) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x$

f) $F(x) = -\frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{3}x^3 - 9x$

g) Der Exponent wurde richtig um 1 erhöht. Der Fehler liegt bei den Koeffizienten. Hier wurde der Koeffizient mit dem ursprünglichen Exponenten multipliziert, so wie es bei Ableitungen gemacht wird. Diese Stammfunktion würde abgeleitet nicht wieder die Funktion aus d) ergeben.

h) Die Stammfunktion ist für die ersten zwei Summanden richtig berechnet. Der letzte Summand wurde in der Stammfunktion weggelassen, obwohl er beibehalten werden müsste und mit x multipliziert werden müsste. Diese Stammfunktion würde abgeleitet nicht wieder die Funktion aus f) ergeben.

(4) Übungsaufgaben: Stammfunktionen grafisch zuordnen [50]

In allen Fällen lässt sich die Zuordnung begründen dadurch, dass die Nullstellen der Funktion jeweils die Extremstellen der Stammfunktion sind.

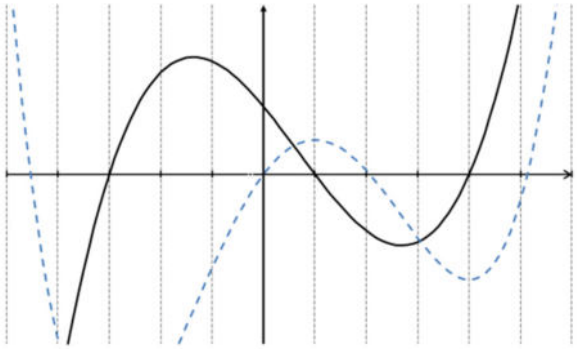
Funktion A – Stammfunktion 2

Funktion B – Stammfunktion 1

Funktion C – Stammfunktion 4

Funktion D – Stammfunktion 3

(5) Übungsaufgaben: Stammfunktion skizzieren [51]



(6) Aufgabe: ABS – Bremsweg berechnen [51]

Eine Stammfunktion lautet:

$V(t) = s(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 36t$

Um den zurückgelegten Bremsweg zu berechnen, wird $t = 6$ eingesetzt. $s(6) = 144$. Somit beträgt der Bremsweg 144 m.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Lösung: Auf dem Weg zum Hauptsatz

(1) Aufgabe: Schadstoffausstoß [52]

a) Eine Stammfunktion lautet

$E(t) = \frac{1}{4}t^4 - 3t^3 + 5{,}5t^2 + 101t$

Um den Emissionswert der ersten Stunde zu berechnen, wird $t = 1\ \text{h}$ eingesetzt. Es ergibt sich $E(1) = 103{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$. Somit wird der Grenzwert in der ersten Stunde überschritten.

b) Um den Schadstoffausstoß in den ersten beiden Stunden zu berechnen, wird $t = 2\ \text{h}$ eingesetzt. Es ergibt sich:

$E(2) = 204\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$

c) Da in den ersten beiden Stunden $204\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$ Schadstoffe ausgestoßen wurden und in der ersten Stunde $103{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$, lässt sich der Ausstoß in der zweiten Stunde aus der Differenz berechnen: $204\frac{\text{mg}}{\text{m}^3} - 103{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3} = 100{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$. Somit wurde der Grenzwert in der zweiten Stunde ebenfalls überschritten.

d) Dritte Stunde: $87{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$

Vierte Stunde: $72{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$

Fünfte Stunde: $59{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$

Sechste Stunde: $56{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$

e) Berechnen des Mittelwerts der stündlichen Emissionswerte in den ersten sechs Stunden:

$$\frac{103{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}+100{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}+87{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}+72{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}+59{,}75\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}+56{,}25\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}}{6}$$

$$= 80\frac{\text{mg}}{\text{m}^3}$$

Demnach wird der 6-Stunden-Mittelwert nicht überschritten.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Sagt die 0 zur 8: "Schicker Gürtel!"

(2) Übungsaufgaben: Wert von Integralen berechnen [55]

a) $\int_1^2 4x^3 + 6x\,dx = [x^4 + 3x^2]_1^2$

$= (2^4 + 3 \cdot 2^2) - (1^4 + 3 \cdot 1^2) = 24$

b) $\int_{-2}^4 2x + 8\,dx = [x^2 + 8x]_{-2}^4$

$= (4^2 + 8 \cdot 4) - ((-2)^2 + 8 \cdot (-2)) = 60$

c) $\int_{-4}^{-2} 3x^2 + x + 5\,dx = \left[x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x\right]_{-4}^{-2}$

$= \left((-2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-2)^2 + 5 \cdot (-2)\right) -$

$\left((-4)^3 + \frac{1}{2} \cdot (-4)^2 + 5 \cdot (-4)\right) = 60$

d) $\int_2^5 -x^2 + 10\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 10x\right]_2^5$

$= \left(-\frac{1}{3} \cdot 5^3 + 10 \cdot 5\right) - \left(-\frac{1}{3} \cdot 2^3 + 10 \cdot 2\right)$

$= -9$

e) Es befinden sich drei Fehler in der Berechnung:

- erster Koeffizient in der Stammfunktion
- 2 und 5 hinter der Klammer
- Fehlende Klammern beim Einsetzen

$\int_2^5 -x^2 + 10\,dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 10x\right]_2^5$

$= -\frac{1}{2} \cdot 5^3 + 10 \cdot 5 - \left(-\frac{1}{2} \cdot 2^3 + 10 \cdot 2\right)$

$= 11{,}5$

f) $\int_{-1}^1 x^5\,dx = \left[\frac{1}{6}x^6\right]_{-1}^1$

$= \left(\frac{1}{6} \cdot 1^6\right) - \left(\frac{1}{6} \cdot (-1)^6\right) = 0$

g) $\int_{-2}^2 x^3 - 4x\,dx = \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_{-2}^2$

$= \left(\frac{1}{4} \cdot 2^4 - 2 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1}{4} \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2\right)$

$= 0$

h) $\int_{-13}^{13} x^{13}\,dx = \left[\frac{1}{14}x^{14}\right]_{-13}^{13}$

$= \left(\frac{1}{14} \cdot 13^{14}\right) - \left(\frac{1}{14} \cdot (-13)^{14}\right) = 0$

Zu f) bis h): Bei diesen Funktionen handelt es sich um punktsymmetrische Funktionen (alle Exponenten sind ungerade). Außerdem sind die Grenzen bis auf das Vorzeichen identisch. Ist beides der Fall, ergibt das Integral aus geometrischen Gründen immer den Wert Null.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Dieses liegt an der Eigenschaft punktsymmetrischer Funktionen, für die gilt: $f(a) = -f(-a)$

(3) Aufgabe: Berliner Bogen [57]

a) Zu zeigen: Breite und Höhe stimmen mit der Funktion überein.

Höhe berechnen:

$b(0) = 36$

Breite berechnen:

$-\frac{36}{1225}x^2 + 36 = 0$, es ergibt sich

$x_1 = -35$ und $x_2 = 35$, damit beträgt die Breite des Gebäudes (also die Entfernung der Nullstellen voneinander) 70 m.

Die Breite und die Höhe stimmen mit den Maßen aus dem Text überein.

b) Um den überbauten Rauminhalt zu berechnen, muss die Frontfläche mit der Tiefe multipliziert werden.

Frontfläche:

$$\int_{-35}^{35} -\frac{36}{1225}x^2 + 36\,dx$$

$$= \left[-\frac{12}{1225}x^3 + 36x\right]_{-35}^{35} = 1680\ \text{m}^2$$

Somit ergibt sich für den gesamten Rauminhalt:

$1680\ \text{m}^2 \cdot 140\ \text{m} = 235.200\ \text{m}^3$

c) Für die Dachfläche muss zunächst die Länge des vorderen Bogens auf dem Intervall $[-35; 35]$ berechnet werden:

$$l = \int_{-35}^{35} \sqrt{1 + (-\frac{72}{1225}x)^2}\ dx = 105{,}05\ \text{m}$$

Für die gesamte Dachfläche ergibt sich damit: $105{,}05\ \text{m} \cdot 140\ \text{m} = 14.707\ \text{m}^2$.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Jesus sprach: "Das Himmelreich ist wie $-3x^2 + 12x + 10$."

Matthäus war ratlos: "Was meint unser Heiland damit?"

Petrus antwortete daraufhin: "Ach, das ist nur wieder eine seiner Parabeln!"

(4) Aufgabe: Wasserrutschbahn [58]

a) Berechnung der Fläche des Querschnitts:

$$\int_{-0,5}^{0,5} -12x^4 + 6x^2 - 0{,}75\ dx$$

$$= \left[-\frac{12}{5}x^5 + 2x^3 - 0{,}75x\right]_{-0,5}^{0,5}$$

$$= \left(-\frac{12}{5} \cdot 0{,}5^5 + 2 \cdot 0{,}5^3 - 0{,}75 \cdot 0{,}5\right)$$

$$-\left(-\frac{12}{5} \cdot (-0{,}5)^5 + 2 \cdot (-0{,}5)^3 - 0{,}75 \cdot (-0{,}5)\right)$$

$$= -\frac{2}{5}$$

Somit beträgt die Fläche des Querschnitts 0,4 m^2 (das negative Vorzeichen kann außer Acht gelassen werden, da es sich um eine Fläche handelt). Bei einer Länge von 2 m pro Streckenelement ergibt sich damit ein Wasservolumen von

$V = 0{,}4\ \text{m}^2 \cdot 2\ \text{m} = 0{,}8\ \text{m}^3 = 800\ \text{l}$

$\Rightarrow m = 800\ \text{kg}$

Das Wasser in einem Streckenelement wiegt demnach 10 Mal so viel, wie ein typischer Badegast.

b) Das Ergebnis ist negativ, da die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse unterhalb der x-Achse liegt.

c) $l = \int_{-0,5}^{0,5} \sqrt{1 + (-48x^3 + 12x)^2}\ dx = 1{,}86$.
Die Länge des Bogens beträgt somit 1,86 m. Für die Größe der Folie ergibt sich dann $1{,}86\ \text{m} \cdot 2\ \text{m} = 3{,}72\ \text{m}^2$.

(5) Aufgabe: Cosinus°Cola [59]

a) Durch Abzählen der Kästchen ergibt sich, dass die relevante Fläche aus ca. 21 Kästchen besteht, die jeweils 25 m^3 entsprechen. Somit kann die Abschätzung lauten, dass $21 \cdot 25\ \text{m}^3 = 525\ \text{m}^3$ Cosinus°Cola im April abgefüllt wurden.

b) $\int_0^{30} -0{,}001t^3 + 0{,}055t^2 - 0{,}796t + 19{,}92\ dt = [-0{,}00025t^4 + 0{,}018\overline{3}t^3 - 0{,}398t^2 + 19{,}92t]_0^{30} = 531{,}9$. Insgesamt wurden im April demnach 531,9 m^3 Cosinus°Cola abgefüllt. Das entspricht einer Menge von 531 900 l bzw. Flaschen.

c) $c(30) = 18{,}54$ ist richtig berechnet, aber die Einheit von $c(t)$ ist die Abfüllmenge pro Tag in $\frac{\text{m}^3}{\text{Tag}}$. Die 18,54 bezeichnet also

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

die Abfüllmenge am 30. Tag und nicht die gesamte Abfüllmenge des Monats.

d) $\int_7^{14} -0{,}001t^3 + 0{,}055t^2 - 0{,}796t + 19{,}92\ dt = [-0{,}00025t^4 + 0{,}018\bar{3}t^3 - 0{,}398t^2 + 19{,}92t]_7^{14} = 115{,}95$. In der zweiten Woche wurden 115,95 m^3 Cosinus°Cola abgefüllt.

e) $\frac{1}{7} \cdot \int_0^7 -0{,}001t^3 + 0{,}055t^2 - 0{,}796t + 19{,}92\ dt = \frac{1}{7} \cdot [-0{,}00025t^4 + 0{,}018\bar{3}t^3 - 0{,}398t^2 + 19{,}92t]_0^7 = 17{,}95$. In der ersten Woche wurden durchschnittlich 17,95 m^3 Cosinus°Cola pro Tag abgefüllt.

Lösung: Anwendungen der Integralrechnung

(1) Aufgabe: Magnetschwebebahn [60]

a) Hilfreiche Formulierungen:

…wird schneller…

…beschleunigt…

…die Geschwindigkeit nimmt zu…

…die maximale Geschwindigkeit wird nach 1,5 Minuten erreicht…

…wird langsamer…

…bremst ab…

…kommt zum Stillstand…

…steht still…

…bewegt sich nicht…

…fährt rückwärts…

…fährt schneller werdend rückwärts…

…erreicht die maximale Rückfahrgeschwindigkeit…

Lösungsvorschlag:

Innerhalb der ersten 1,5 Minuten beschleunigt die Bahn ihre Fahrt und wird immer schneller bis sie die Höchstgeschwindigkeit von ca. 4,2 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ erreicht hat. Dann bremst die Bahn langsam ab und kommt nach 4 Minuten zum Stillstand, um dann direkt umzukehren. Sie fährt nun in die entgegengesetzte Richtung und beschleunigt, bis sie ungefähr zum Zeitpunkt $t = 5{,}2$ ihre höchste Rückfahrgeschwindigkeit von ca. 1,2 $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ erreicht. Danach bremst die Bahn wieder ab und kommt nach 6 Minuten zum Stehen.

b) $\int_0^4 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t\ dt$

$= [0{,}0625t^4 - 0{,}8\bar{3}t^3 + 3t^2]_0^4 = 10{,}67$

Zwischen dem Startpunkt und dem Umkehrpunkt liegen somit 10,67 km.

c) Die bis zum Umkehrpunkt gefahrene Strecke wurde bereits in b) berechnet. Hinzu kommt noch die daraufhin rückwärts zurückgelegte Strecke:

$\int_4^6 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t\ dt$

$= [0{,}0625t^4 - 0{,}8\bar{3}t^3 + 3t^2]_4^6 = -1{,}67$

Somit ist die Strecke, die die Bahn auf dem Rückweg zurückgelegt hat 1,67 km lang. Insgesamt hat die Bahn demnach $10{,}67\ \mathrm{km} + 1{,}67\ \mathrm{km} = 12{,}34\ \mathrm{km}$ zurückgelegt.

d) $\int_0^3 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t\ dt$

$= [0{,}0625t^4 - 0{,}8\bar{3}t^3 + 3t^2]_0^3 = 9{,}56$

Nach 3 Minuten ist die Bahn 9,56 km vom Start entfernt.

Zur Berechnung der Entfernung nach 5 Minuten, kann man die Strecke zerlegen. Nach 4 Minuten ist die Bahn 10,67 km vom Start entfernt (siehe b)). Nun muss man nur berechnen, welche Strecke die Bahn zwischen der vierten und fünften Minute rückwärts zurücklegt:

$\int_4^5 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t\ dt$

$= [0{,}0625t^4 - 0{,}8\bar{3}t^3 + 3t^2]_4^5 = -0{,}77$

Somit ist die Bahn nach 5 Minuten $10{,}67\ \mathrm{km} - 0{,}77\ \mathrm{km} = 9{,}9\ \mathrm{km}$ vom Start entfernt.

e) Um die insgesamt gefahrene Strecke zu berechnen, müssen die beiden Fahrten addiert werden: $10{,}67\ \mathrm{km} + 0{,}77\ \mathrm{km} = 11{,}44\ \mathrm{km}$. Insgesamt ist die Bahn nach 5 Minuten 11,44 km gefahren.

f) $\int_0^5 0{,}25t^3 - 2{,}5t^2 + 6t\ dt$

$= [0{,}0625t^4 - 0{,}8\bar{3}t^3 + 3t^2]_0^5 = 9{,}9$

Berechnet man das Integral von 0 bis 5 ergibt sich die Entfernung vom Startpunkt. Das bedeutet, dass die rückwärts gefahrene Strecke auf diese Weise direkt abgezogen wird.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

g) Zu berechnen sind die Extremstellen des Graphen:

Notwendige Bedingung: $v'(t) = 0$

$v'(t) = 0{,}75t^2 - 5t + 6 = 0$

$t_1 = 1{,}57$ und $t_2 = 5{,}1$

Hinreichende Bedingung: $v''(t) \neq 0$

$v''(t) = 1{,}5t - 5$

$v''(1{,}57) = 1{,}5 \cdot 1{,}57 - 5 = -2{,}65 < 0$

$\Longrightarrow$ Hochpunkt bei (1,57 | 4,23)

$v''(5{,}1) = 1{,}5 \cdot 5{,}1 - 5 = 2{,}65 > 0$

$\Longrightarrow$ Tiefpunkt bei (5,1 | -1,26)

Die Höchstgeschwindigkeit auf dem Hinweg beträgt somit 4,23 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$ und die Höchstgeschwindigkeit auf dem Rückweg beträgt 1,26 $\frac{\text{km}}{\text{min}}$.

(2) Aufgabe: Die Pegelstände der Elbe in Cuxhaven [62]

a) <u>Hilfreiche Formulierungen:</u>

…der Pegelstand steigt in den ersten sechs Stunden…

…in den ersten sechs Stunden ist Flut…

…der Pegelstand steigt immer schneller…

…die Änderungsrate des Pegelstands nimmt zu…

…die größte Pegelstandsänderung findet nach 2,5 Stunden statt…

…der Pegelstand steigt immer langsamer…

…die Änderungsrate des Pegelstands nimmt ab…

…nach sechs Stunden ist Hochwasser…

…der Pegelstand erreicht sein Maximum nach sechs Stunden…

…in den kommenden sechs Stunden ist Ebbe…

…der Pegelstand sinkt immer schneller…

…die größte Pegelstandsabnahme findet nach 9,5 Stunden statt…

…der Pegelstand sinkt immer langsamer…

…nach zwölf Stunden ist Niedrigwasser…

<u>Lösungsvorschlag:</u>

In den ersten sechs Stunden herrscht Flut, da der Wasserpegel steigt. Dabei steigt der Pegel zunächst langsam, nach 2,5 Stunden steigt er am stärksten und danach wieder langsamer. Nach sechs Stunden steigt der Pegel nicht mehr und es herrscht Hochwasser. Danach folgt Ebbe, wobei der Wasserpegel zunächst immer stärker sinkt, bis er nach ca. 9,5 Stunden am stärksten sinkt, um dann wieder langsamer zu sinken und nach 12 Stunden sich nicht mehr zu verändern, da zu diesem Zeitpunkt Niedrigwasser herrscht.

b) Nach sechs Stunden ist Hochwasser:

$$\int_0^6 \frac{1}{100}t^3 - \frac{9}{50}t^2 + \frac{18}{25}t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{400}t^4 - \frac{3}{50}t^3 + \frac{9}{25}t^2\right]_0^6 = 3{,}24$$

Somit ist der Pegelstand nach sechs Stunden um 3,24 m gestiegen, liegt also nun bei 6,74 m.

Nach acht Stunden:

$$\int_0^8 \frac{1}{100}t^3 - \frac{9}{50}t^2 + \frac{18}{25}t\,dt$$

$$= \left[\frac{1}{400}t^4 - \frac{3}{50}t^3 + \frac{9}{25}t^2\right]_0^8 = 2{,}56$$

Der Pegelstand nach acht Stunden liegt demnach 2,56 m über dem ursprünglichen Niedrigwasserstand. Somit beträgt der Pegelstand dann 6,06 m.

c) Durch Ausprobieren lässt sich herausfinden, dass für $t = 2$ und für $t = 10$ der Pegelstand einen Meter über dem Niedrigwasserspiegel liegt und somit der Pegelstand 4,5 m beträgt. Alternativ kann die folgende Gleichung gelöst werden: $\int_0^x \frac{1}{100}t^3 - \frac{9}{50}t^2 + \frac{18}{25}t\,dt = 1$, damit ergibt sich $t_1 = 2$ und $t_2 = 10$.

$t_3 = -1{,}48$ und $t_4 = 13{,}48$ liegen außerhalb des betrachteten zwölfstündigen Zeitbereiches.

d) Die Aussage ist nicht richtig, weil sie den Graphen so interpretiert als wäre der absolute Pegelstand auf der $p(t)$ −Achse abgetragen. Tatsächlich ist aber die Veränderung des Pegelstandes dargestellt. Das bedeutet, dass beispielsweise der Hochpunkt nicht der Zeitpunkt des Hochwassers ist, sondern der

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zeitpunkt, an dem der Pegelstand am meisten steigt.

(3) Aufgabe: Schwimmbad [63]

a) Bei ca. $t = 0{,}75$ befindet sich ein Hochpunkt des Graphen. Das bedeutet, dass hier das Bakterienwachstum am größten ist. Danach nimmt die Wachstumsgeschwindigkeit immer weiter ab, was vermuten lässt, dass zu diesem Zeitpunkt das Mittel seine Wirkung zeigt.

b) Hilfreiche Formulierungen:

…die Bakterienzunahme erreicht ihr Maximum nach ca. 0,75 Stunden…

…die Bakterienzunahme verringert sich…

…die Bakterienzunahme sinkt…

…die Bakterien vermehren sich nicht…

…die Bakterienzunahme endet nach drei Stunden…

…die Anzahl der Bakterien nimmt (immer stärker) ab…

…die Bakterienabnahme nimmt zu…

…die Bakterienabnahme erreicht ihr Maximum…

…der Rückgang der Bakterienanzahl ist am größten…

……die Anzahl der Bakterien nimmt (weniger stark) ab…

…die Bakterienabnahme nimmt ab…

…nach acht Stunden steigt die Bakterienanzahl wieder…

Lösungsvorschlag:

Nach der Zugabe des Mittels sinkt die Bakterienzunahme bis sie sich nach 3 Stunden nicht mehr vermehren und ihr Bestand danach sogar zurückgeht, da Bakterien sterben. Zum Zeitpunkt $t = 6$ ist der Rückgang der Bakterienanzahl am größten. Danach wird der Rückgang wieder geringer. Das Mittel lässt in seiner Wirkung offenbar nach. Nach 8 Stunden beginnt die Bakterienanzahl dann wieder zu steigen.

c) $\int_0^{0{,}75} 0{,}5t^3 - 5t^2 + 6{,}5t + 12 \; dt$

$= [0{,}125t^4 - 1{,}\bar{6}t^3 + 3{,}25t^2 + 12t]_0^{0{,}75}$

$= 10{,}16$

Innerhalb der ersten 45 Minuten ist der Bakterienbestand somit um 10,16 $\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ gestiegen. Da der Anfangsbestand $85\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ betrug, ist nun mit einer Konzentration von $95{,}16\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ zu rechnen und der Grenzwert damit noch nicht erreicht.

d) Nach drei Stunden ist die höchste Bakterienkonzentration zu erwarten, da bis zu diesem Zeitpunkt der Bakterienbestand stets gewachsen ist. Wenn zu diesem Zeitpunkt der Grenzwert nicht überschritten wurde, bleibt die Konzentration die gesamte Zeit unter dem Grenzwert:

$\int_0^3 0{,}5t^3 - 5t^2 + 6{,}5t + 12 \; dt$

$= [0{,}125t^4 - 1{,}\bar{6}t^3 + 3{,}25t^2 + 12t]_0^3$

$= 30{,}38$

Die Konzentration beträgt zu diesem Zeitpunkt 115,38 $\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ und liegt damit über dem Grenzwert. Die Aussage des Mitglieds der Geschäftsleitung ist somit falsch.

e) Zum Zeitpunkt der zweiten Nullstelle findet wiederum kein Bakterienwachstum statt. Vorher nahm die Gesamtanzahl der Bakterien ab, da das Wachstum negativ war, nach der Nullstelle nimmt die Anzahl wieder zu, da nun wieder Bakterien hinzukommen. Das bedeutet, dass das Mittel nun nicht mehr wirksam ist und die Bakterien sich wieder vermehren.

Die Bakterienkonzentration zu diesem Zeitpunkt berechnet sich durch:

$\int_0^8 0{,}5x^3 - 5x^2 + 6{,}5x + 12 \; dx = -37{,}\bar{3}$

Die 85 $\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ müssen noch hinzuaddiert werden, so dass sich eine Bakterienkonzentration von $47{,}\bar{6}\,\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ ergibt.

f) Nach der achten Stunde steigt der Graph der Änderungsrate immer stärker an, was bedeutet, dass die Bakterienanzahl immer schneller zunimmt. Dieses ist auf lange Sicht unrealistisch, da die Bakterienanzahl nicht unendlich wachsen kann.

g) $\int_3^8 0{,}5x^3 - 5x^2 + 6{,}5x + 12 \; dx$

$= [0{,}125x^4 - 1{,}\bar{6}x^3 + 3{,}25x^2 + 12x]_3^8$

$= -67{,}71$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das bedeutet, dass innerhalb der ersten 8 Stunden insgesamt $67{,}71\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ abgebaut wurden.

h) Zu lösen ist die folgende Gleichung:

$\int_0^a 0{,}5x^3 - 5x^2 + 6{,}5x + 12\ dx = -30$

Es ergibt sich $a_1 = 7{,}11$ und $a_2 = 8{,}75$. Das bedeutet, dass nach 7 Stunden und 6 Minuten zum ersten Mal $30\frac{\text{GC}}{\text{ml}}$ weniger vorhanden sind als zu Beginn der Messung. Nach 8 Stunden und 45 Minuten tritt dieses ein zweites Mal auf, da dazwischen die Bakterienanzahl noch weiter sinkt, um dann wieder zu steigen.

(4) Aufgabe: Wasserpegelstände an den Landungsbrücken [64]

a) Pegelstand um 3 Uhr:

$\int_0^3 \frac{1}{90}\cdot t^3 - \frac{1}{5}\cdot t^2 + \frac{4}{5}\cdot t - \frac{1}{50}dt$

$= \left[\frac{1}{360}t^4 - \frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{50}t\right]_0^3$

$= 1{,}965\ \text{m}$

Somit beträgt der Pegelstand um 3 Uhr: $1{,}965\ \text{m} + 0{,}5\ \text{m} = 2{,}465\ \text{m}$.

Pegelstand um 8 Uhr:

$\int_0^8 \frac{1}{90}\cdot t^3 - \frac{1}{5}\cdot t^2 + \frac{4}{5}\cdot t - \frac{1}{50}dt$

$= \left[\frac{1}{360}t^4 - \frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{50}t\right]_0^8 = 2{,}684\ \text{m}$

Somit beträgt der Pegelstand um 8 Uhr: $2{,}684\ \text{m} + 0{,}5\ \text{m} = 3{,}184\ \text{m}$

b) Berechnung des Zeitpunkts des nächstens Hoch- bzw. Niedrigwassers durch Berechnung der Nullstellen:

$p(t) = 0$, es ergibt sich:

$t_1 = 0{,}025$, $t_2 = 5{,}95$ und $t_3 = 12{,}025$.

Pegelstand bei Hochwasser:

$\int_0^{5{,}95} \frac{1}{90}\cdot t^3 - \frac{1}{5}\cdot t^2 + \frac{4}{5}\cdot t - \frac{1}{50}dt$

$= \left[\frac{1}{360}t^4 - \frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{50}t\right]_0^{5{,}95}$

$= 3{,}4805\ \text{m}$

Somit beträgt der Pegelstand bei Hochwasser $3{,}4805\ \text{m} + 0{,}5\ \text{m} = 3{,}9805\ \text{m}$.

Pegelstand bei Niedrigwasser:

$\int_0^{12{,}025} \frac{1}{90}\cdot t^3 - \frac{1}{5}\cdot t^2 + \frac{4}{5}\cdot t - \frac{1}{50}dt$

$= \left[\frac{1}{360}t^4 - \frac{1}{15}t^3 + \frac{2}{5}t^2 - \frac{1}{50}t\right]_0^{12{,}025}$

$= -0{,}24\ \text{m}$

Somit beträgt der Pegelstand bei Niedrigwasser $-0{,}24\ \text{m} + 0{,}5\ \text{m} = 0{,}26\ \text{m}$.

c) Zu berechnen sind die Zeitpunkte zu denen das Integral $1{,}2\ \text{m} - 0{,}5\ \text{m} = 0{,}7\ \text{m}$ beträgt. Somit muss die folgende Gleichung gelöst werden:

$\int_0^a \frac{1}{90}\cdot t^3 - \frac{1}{5}\cdot t^2 + \frac{4}{5}\cdot t - \frac{1}{50}dt = 0{,}7$

Es ergibt sich: $a_1 = -1{,}18$, $a_2 = 1{,}55$, $a_3 = 10{,}24$ und $a_4 = 13{,}39$. Da nur a_2 und a_3 im betrachteten Zeitraum liegen, gilt, dass zwischen 01:33 Stunden nach Messbeginn und 10:14 Stunden nach Messbeginn die Mindesttiefe gegeben ist.

Lösung: Flächen zwischen zwei Graphen

(1) Aufgabe: Kletterberg auf dem Spielplatz [65]

Um den Flächeninhalt der Vorderfläche zu berechnen, muss zunächst der Flächeninhalt der Fläche unter dem oberen Bogen berechnet werden, um dann den des unteren Bogens abzuziehen:

Oberer Bogen:

$\int_{-2}^{2} \frac{1}{8}x^4 - x^2 + 2\ dx = \left[\frac{1}{40}x^5 - \frac{1}{3}x^3 + 2x\right]_{-2}^{2}$

$= 4{,}2\overline{6}$

Unterer Bogen

$\int_{-1}^{1} -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}dx = \left[-\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{1} = 2$

Damit beträgt der Flächeninhalt des Bogens:

$4{,}2\overline{6}\ \text{m}^2 - 2\ \text{m}^2 = 2{,}2\overline{6}\ \text{m}^2$.

Zusatzaufgabe: Das Volumen berechnet sich durch:

$2{,}2\overline{6}\ \text{m}^2 \cdot 4\ \text{m} = 9{,}0\overline{6}\ \text{m}^3$. Dann ergibt sich für die Masse: $9{,}0\overline{6}\ \text{m}^3 \cdot 1{,}5\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 13{,}6\ \text{kg}$.

(2) Aufgabe: Sandkiste auf dem Spielplatz [66]

Zunächst müssen die Schnittpunkte der beiden Funktionen berechnet werden. Dazu

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

muss die folgende Gleichung gelöst werden: $f(x) = g(x)$. Es ergeben sich $x_1 = 1$ und $x_2 = 5$ als Grenzen der Integrale.

Nun muss die Fläche der Sandkiste berechnet werden, indem die beiden Integrale getrennt voneinander betrachtet werden:

$$\int_1^5 -x^2 + 6x + 1\, dx = \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 + x\right]_1^5$$
$$= 34,\overline{6}$$
$$\int_1^5 x^2 - 6x + 11\, dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 11x\right]_1^5$$
$$= 13,\overline{3}$$

Somit beträgt die Fläche der Sandkiste:
$34,\overline{6}\ \text{m}^2 - 13,\overline{3}\ \text{m}^2 = 21,\overline{3}\ \text{m}^2$.

Das Volumen des Sandes beträgt damit $21,\overline{3}\ \text{m}^2 \cdot 0{,}5\ \text{m} = 10,\overline{6}\ \text{m}^3$.

(3) Übungsaufgaben: Flächen zwischen zwei Funktionen [67]

a) Zunächst müssen die Nullstellen der beiden Funktionen berechnet werden.

$f(x) = 0$ ergibt $x_1 = 1$ und $x_2 = 7$.

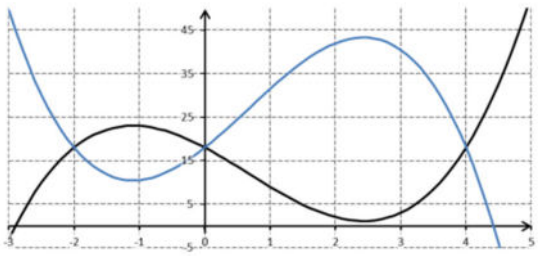
$g(x) = 0$ ergibt $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$.

Die eingefärbte Fläche ergibt sich aus der Differenz des Integrals von $f(x)$ zwischen 1 und 7 und dem Integral von $g(x)$ zwischen 2 und 5.

$$\int_1^7 x^2 - 8x + 7\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x\right]_1^7 = -36$$
$$\int_2^5 x^2 - 7x + 10\, dx$$
$$= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 10x\right]_1^7 = -4{,}5$$

Da es sich um Flächeninhalte handelt kann das Minus weggelassen werden. Für die eingefärbte Fläche ergibt sich dann ein Flächeninhalt von $36 - 4{,}5 = 31{,}5$.

b)



Zunächst werden die Schnittpunkte der beiden Funktionen durch $f(x) = g(x)$ berechnet. Dabei ergibt sich $x_1 = -2$, $x_2 = 0$ und $x_3 = 4$.

Zuerst wird die Fläche zwischen den beiden Funktionen auf dem Intervall von -2 bis 0 berechnet:

$$\int_{-2}^0 f(x) - g(x)dx =$$
$$\int_{-2}^0 (x^3 - 2x^2 - 8x + 18) - (-1{,}5x^3 + 3x^2 + 12x + 18)\, dx$$
$$= \int_{-2}^0 2{,}5x^3 - 5x^2 - 20x\, dx =$$
$$\left[\frac{5}{8}x^4 - \frac{5}{3}x^3 - 10x^2\right]_{-2}^0 = 16,\overline{6}$$

Dann wird die Fläche zwischen den beiden Funktionen auf dem Intervall von 0 bis 4 berechnet:

$$\int_0^4 g(x) - f(x)\, dx = \int_0^4 (-1{,}5x^3 + 3x^2 + 12x + 18) - (x^3 - 2x^2 - 8x + 18)\, dx$$
$$= \int_0^4 -2{,}5x^3 + 5x^2 + 20x\, dx$$
$$= \left[-\frac{5}{8}x^4 + \frac{5}{3}x^3 + 10x^2\right]_0^4 = 106,\overline{6}$$
$$16{,}67 + 106{,}67 = 123{,}34$$

(4) Aufgabe: Ein Musical in den Hamburger Großmarkthallen [67]

Zunächst wird die Fläche unter dem unteren Bogen berechnet:

$$\int_{-25}^{25} -\frac{4}{125} \cdot x^2 + 20\, dx = \left[-\frac{4}{375}x^3 + 20x\right]_{-25}^{25}$$
$$= 666,\overline{6}$$

Die blau eingefärbte Fläche ist somit $666,\overline{6}\ \text{m}^2$ groß.

Für die orange eingefärbte Fläche muss die Differenz der beiden Funktionen gebildet werden:

$$\int_{-25}^{25} f(x) - g(x)dx = \int_{-25}^{25} \left(\frac{1}{50000}x^4 - \frac{1}{36}x^2 + 21\right) - \left(-\frac{4}{125} \cdot x^2 + 20\right) dx$$
$$= \int_{-25}^{25} \frac{1}{50000}x^4 + \frac{19}{4500}x^2 + 1\, dx$$
$$= \left[-\frac{1}{250000}x^5 + \frac{19}{13500}x^3 + x\right]_{-25}^{25} = 172{,}11$$

Die orange eingefärbte Fläche ist somit $172{,}11\ \text{m}^2$ groß.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Erlöserkirche in Hamburg-Farmsen [68]

Berechnung der Fläche des äußeren Bogens:

Dazu zunächst Berechnung der Nullstellen:

$f(x) = 0$ ergibt $x_1 = -6{,}5$ und $x_2 = 6{,}5$

$g(x) = 0$ ergibt $x_1 = -6$ und $x_2 = 6$

Berechnung der Flächeninhalte:

$\int_{-6{,}5}^{6{,}5} f(x)\,dx = 108{,}\overline{3}$

$\int_{-6}^{6} g(x)dx = 96$

Die Fläche des äußeren Bogens beträgt somit:

$108{,}\overline{3}\ \text{m}^2 - 96\ \text{m}^2 = 12{,}\overline{3}\ \text{m}^2$.

Berechnung der oberen weißen Fläche

Dazu zunächst Berechnung der Schnittpunkte der beiden linearen Funktionen mit den beiden Parabeln:

$i(x) = g(x)$ ergibt $x_1 = -4$ und $x_2 = 6$

$i(x) = h(x)$ ergibt $x_1 = -3$ und $x_2 = 6$

$j(x) = g(x)$ ergibt $x_1 = 4$ und $x_2 = -6$

$j(x) = h(x)$ ergibt $x_1 = 3$ und $x_2 = -6$

$\int_{-4}^{4} g(x)dx = 81{,}\overline{7}$

Von dieser Fläche müssen die folgenden Flächeninhalte abgezogen werden:

$\int_{-4}^{-3} i(x)\,dx = 6{,}\overline{3}$

$\int_{-3}^{3} h(x)\,dx = 44$

$\int_{3}^{4} j(x)\,dx = 6{,}\overline{3}$

So ergibt sich für die obere weiße Fläche ein Flächeninhalt von:

$81{,}\overline{7}\ \text{m}^2 - (6{,}\overline{3}\ \text{m}^2 + 6{,}\overline{3}\ \text{m}^2 + 44\ \text{m}^2)$

$= 25{,}\overline{1}\ \text{m}^2$

Berechnung der unteren großen Fläche

Die untere große Fläche lässt sich berechnen, indem die Sichel von der Fläche unter $g(x)$ abgezogen wird: $96\ \text{m}^2 - 25{,}\overline{1}\ \text{m}^2 = 70{,}\overline{9}\ \text{m}^2$.

(6) Aufgabe: Gini-Koeffizient [69]

a) Das Dreieck A+B hat eine Fläche von 0,5 (da $A_\triangle = \frac{1\cdot 1}{2}$). A ergibt sich, indem das Integral von $f(x)$ auf dem Intervall von 0 bis 1 von 0,5 abgezogen wird:

$\int_0^1 \frac{5}{48}x^3 + \frac{11}{16}x^2 + \frac{5}{24}x\,dx$

$= \left[\frac{5}{192}x^4 + \frac{11}{48}x^3 + \frac{5}{48}x^2\right]_0^1 = 0{,}3594$

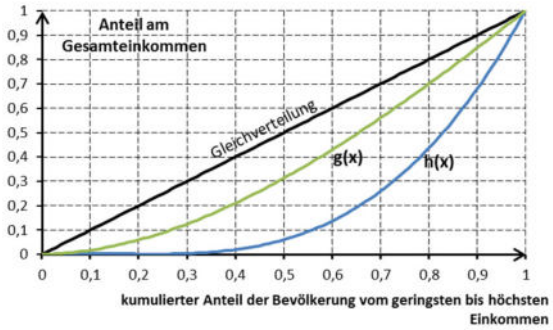
Damit ergibt sich:

$A = 0{,}5 - 0{,}3594 = 0{,}1406.$

b) A+B ergibt immer ein Dreieck mit einer Grundseite der Länge 1 und einer Höhe der Länge 1. Damit ergibt sich mithilfe der Formel zur Berechnung von Flächeninhalten von Dreiecken: $A_\triangle = \frac{1\cdot 1}{2} = 0{,}5$.

c) $G = \frac{0{,}1406}{0{,}5} = 0{,}28$

d)



e) *Für das Land mit $h(x)$*

$\int_0^1 \frac{83}{48}x^3 - \frac{67}{80}x^2 + \frac{13}{120}x\,dx$

$= \left[\frac{83}{192}x^4 - \frac{7}{40}x^3 + \frac{13}{240}x^2\right]_0^1 = 0{,}2073$

Damit ergibt sich:

$A = 0{,}5 - 0{,}2073 = 0{,}2927$

Der Gini-Koeffizient ergibt sich:

$G = \frac{0{,}2927}{0{,}5} = 0{,}5854$

Für das Land mit $g(x)$

$\int_0^1 -\frac{5}{12}x^3 + \frac{11}{8}x^2 + \frac{1}{24}x\,dx$

$= \left[-\frac{5}{48}x^4 + \frac{11}{42}x^3 + \frac{1}{48}x^2\right]_0^1 = 0{,}375$

Damit ergibt sich $A = 0{,}5 - 0{,}375 = 0{,}125$

Der Gini-Koeffizient ergibt sich:

$G = \frac{0{,}125}{0{,}5} = 0{,}25$

f) Bei dem Land mit $h(x)$ als Lorenz-Kurve handelt es sich vermutlich um ein Land mit einer starken Ungleichverteilung, wie beispielsweise Brasilien oder Südafrika. Bei dem Land mit $g(x)$ als Lorenz-Kurve handelt es sich um ein Land, in dem die

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einkommen wesentlich gerechter verteilt sind.

g) Bei absoluter Gleichverteilung liegt die Lorenz-Kurve auf der linearen Funktion, die die Gleichverteilung darstellt und somit ist die Fläche $A = 0$ und damit folgt auch, dass $G = 0$ ist.

Im extremsten Fall von völliger Ungleichverteilung erhält eine Person das gesamte Einkommen und alle anderen nichts, so dass die Lorenz-Kurve immer gleich 0 ist, bis auf den y-Wert für die einzige Person mit allem Einkommen. Dann ist $A = 0{,}5$ und für G folgt $G = 1$.

Lösung: Interpolation

(1) Übungsaufgabe: Lösen eines Gleichungssystems [75]

a) $a = 3 \quad b = -2 \quad c = 4$

h) $x = -9 \quad y = -3 \quad z = 3$

i) $x_1 = 1 \quad x_2 = -4 \quad x_3 = 7$

(2) Aufgabe: Funktionsgrad bestimmen [80]

a) Bei $f(x)$ handelt es sich um eine Funktion 2. Grades:
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

b) Bei $g(x)$ handelt es sich im eine Funktion 4. Grades:
$g(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

c) Bei $h(x)$ handelt es sich im eine Funktion 1. Grades:
$h(x) = a \cdot x + b$

d) Bei $i(x)$ handelt es sich im eine Funktion 3. Grades:
$i(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

(3) Übungsaufgabe: Funktionsgleichung bestimmen [76]

a) Ansatz:
$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$
Bedingungen:
1) $f(2) = 2$
2) $f(5) = 2$
3) $f(6) = 6$
Lösung: $f(x) = x^2 - 7x + 12$

b) Ansatz:
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Bedingungen:
1) $f(-2) = -12$
2) $f(0) = 2$
3) $f(3) = 8$
4) $f(4) = 30$
Lösung: $f(x) = x^3 - 2 \cdot x^2 - x + 2$

c) Ansatz:
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Bedingungen:
1) $f(2) = 10$
2) $f(4) = -10$
3) $f'(2) = 0$
4) $f'(4) = 0$
Lösung: $f(x) = 5x^3 - 45x^2 + 120x - 90$

d) Ansatz:
$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$
Bedingungen:
1) $f(-2) = -4$
2) $f(0) = 0$
3) $f'(0) = 0$
4) $f(-1) = 0$
5) $f'(-1) = 3$
Lösung: $f(x) = 2x^4 + 7x^3 + 5x^2$

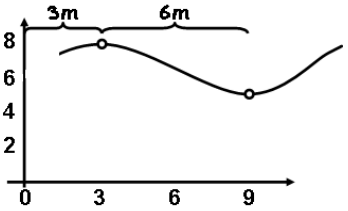
e) Ansatz:
$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$
Bedingungen:
1) $f(-2) = 0$
2) $f'(-2) = -5$
3) $f''(-2) = 0$
4) $f(-3) = 0$
Lösung: $f(x) = 5x^3 + 30x^2 + 55x + 30$

(4) Aufgabe: Glaserarbeiten [76]

a)

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



b) Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Bedingungen die an den Graphen gestellt werden:

1) $f(3) = 8$
2) $f'(3) = 0$
3) $f(9) = 5$
4) $f'(9) = 0$

Funktionsgleichung:

$f(x) = \frac{1}{36}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x + 5$

c) Die erste Scheibe befindet sich im Intervall $[0; 0{,}8]$, die zweite im Intervall $[0{,}8; 1{,}6]$ usw., d.h. die 8. Scheibe liegt im Intervall $[5{,}6; 6{,}4]$. Gesucht ist nun die Höhe der rechten Kante. Nun berechnet man $f(6{,}4) \approx 6{,}20$.

Ferner ist $f(5{,}6) \approx 6{,}80$.

Der Höhenunterschied beträgt

$6{,}80\ \text{m} - 6{,}20\ \text{m} = 0{,}60\ \text{m}$.

Somit ist die gesuchte Kante

$150\ \text{cm} - 60\ \text{cm} = 90\ \text{cm}$ lang.

d) Man berechnet zuerst $\int_{5{,}6}^{6{,}4} f(x)\,dx = 5{,}2$.

Somit ist die berechnete Fläche $5{,}2\ \text{m}^2$ groß. Danach ist der Flächeninhalt der unteren Scheibe zu berechnen:

$0{,}8\ \text{m} \cdot (6{,}80\ \text{m} - 1{,}5\ \text{m}) = 4{,}24\ \text{m}^2$

Der Flächeninhalt der Scheibe hat den Wert: $5{,}2\ \text{m}^2 - 4{,}24\ \text{m}^2 = 0{,}96\ \text{m}^2$.

(5) Aufgabe: Schornsteinhaube [77]

a) Legt man die x-Achse auf die angedeutete Schornsteinkante und die y-Achse durch den Hochpunkt, so liegen die Tiefpunkte bei $x = -15$ und $x = 15$ und der Hochpunkt bei $x = 0$. Aus der Eigenschaft „Tiefpunkt“ mit einer Höhe von 10 cm lassen sich je zwei Bedingungen herleiten:

$h(-15) = 10$ und $h'(-15) = 0$ sowie die beiden Bedingungen $h(15) = 10$ und $h'(15) = 0$. Darüberhinaus liegt an der Stelle $x = 0$ ein Hochpunkt. Daraus ergibt sich die fünfte Bedingung: $h'(0) = 0$

b) Ansatz:

$h(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

Mit den in a) genannten Bedingungen ergibt sich eine Funktionsgleichung, in der ein Parameter frei wählbar ist:

$h(x) = \frac{e - 10}{50625} \cdot x^4 - \frac{(2e - 20)}{225} \cdot x^2 + e$

Setzt man nun verschiedene Werte für e ein und lässt sich dies zeichnen ist festzustellen, dass der Parameter e Einfluss auf die Höhe des Hoch- bzw. Tiefpunkts an der Stelle $x = 0$ hat.

c) Löst man die Gleichung $h(0) = 20$ nach e, so erhält man $e = 20$ und somit die Funktionsgleichung:

$h(x) = \frac{2}{10125}x^4 - \frac{4}{45}x^2 + 20$

d) Berechne zuerst die Länge des Kupferblechs:
$\int_{-17}^{17} \sqrt{1 + (h'(x))^2}\,dx \approx 41{,}4\ \text{cm}$. Mit einer Tiefe von 40 cm erhält man den gesuchten Flächeninhalt:

$41{,}4\ \text{cm} \cdot 40\ \text{cm} = 1656\ \text{cm}^2$.

(6) Aufgabe: Skatepark [79]

a) An die Funktion müssen die folgenden Bedingungen gestellt werden:

1) $f(0) = 0{,}1$
2) $f'(0) = 0$
3) $f(2) = 1{,}6$
4) $f'(2) = 2{,}25$

Das sind vier Bedingungen. Eine quadratische Funktion bietet lediglich die Gelegenheit drei der vier Bedingungen zur Modellierung einer Funktion zu nutzen, doch wie bereits in Aufgabe 5 festgestellt, ist es in Kontext-Aufgaben sinnvoll, alle Bedingungen bei der Modellierung zu berücksichtigen. Eine Funktion 3. Grades eignet sich somit viel besser als eine Funktion 2. Grades.

b) Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Mit den Bedingungen aus a) erhält man die folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = 0{,}1875x^3 + 0{,}1$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

c) Zuerst berechnet man:

$\int_0^2 f(x)dx = 0{,}95\ [\mathrm{m}^2]$.

Somit ergibt sich durch Multiplikation mit der Tiefe der Rampe das folgende Volumen: $0{,}95\ \mathrm{m}^2 \cdot 5\ \mathrm{m} = 4{,}75\ \mathrm{m}^3$.

Mit Hilfe der Dichte lässt sich nun das Gewicht des Bauelements berechnen: $4{,}75\ \mathrm{m}^3 \cdot 2{,}4\ \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{m}^3} = 11{,}4\ \mathrm{t}$

(7) Übungsaufgaben: Funktionen bestimmen [80]

a) Bedingungen:

1) $f(2) = 4032$
2) $f(-3) = -4368$
3) $f(6) = -4224$
4) $f(-5) = 0$
5) $f(10) = 0$

Mit fünf Bedingungen ergibt sich folgender Ansatz:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

Löst man nun das zugehörige Gleichungssystem, so erhält man die folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = 10x^4 - 88x^3 - 346x^2 + 2080x + 1800$

b) Bedingungen:

1) $f(4) = 256$
2) $f'(4) = 0$
3) $f(12) = 0$
4) $f'(12) = 0$

Mit vier Bedingungen ergibt sich folgender Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Löst man nun das zugehörige Gleichungssystem, so erhält man die folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = x^3 - 24x^2 + 144x$

c) Bedingungen:

1) $f(4) = 5$
2) $f'(4) = 0$
3) $f''(4) = 0$
4) $f(0) = -\frac{49}{3}$

Mit vier Bedingungen ergibt sich folgender Ansatz: $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Löst man nun das zugehörige Gleichungssystem, so erhält man die folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 16x - \frac{49}{3}$

(8) Übungsaufgaben: Sprung-, knick- und krümmungssprungfreie Fortsetzung [81]

a) Bedingungen an die folgende Funktion: $k(x) = a \cdot x + b$:

1) Sprungfrei:

$k(2) = f(2) = 2 \cdot 2^2 + 11 \cdot 2 = 30$

$\Rightarrow a \cdot 2 + b = 30$

2) Knickfrei:

$k'(2) = f'(2) = 4 \cdot 2 + 11 = 19$

$\Rightarrow a = 19$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$\left|\begin{matrix} a \cdot 2 + b = 30 \\ a = 19 \end{matrix}\right|$

Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich:

$k(x) = 19 \cdot x - 8$

b) Bedingungen an die folgende Funktion: $k(x) = a \cdot x + b$:

1) Sprungfrei:

$k(1) = g(1) = -1^2 + 4 \cdot 1 - 7 = -4$

$\Rightarrow a \cdot 1 + b = -4$

2) Knickfrei:

$k'(1) = f'(1) = -2 \cdot 1 + 4 = 2$

$\Rightarrow a = 2$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$\left|\begin{matrix} a \cdot 1 + b = -4 \\ a = 2 \end{matrix}\right|$

Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich:

$k(x) = 2 \cdot x - 6$

c) Bedingungen an die folgende Funktion: $k(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

1) Sprungfrei:

$k(2) = h(2)$

$= 2^3 - 7 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 - 8 = 0$

$\Rightarrow a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0$

2) Knickfrei:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$k'(2) = h'(2)$

$= 3 \cdot 2^2 - 14 \cdot 2 + 14 = -2$

$\Rightarrow 2 \cdot a \cdot 2 + b = -2$

3) Krümmungssprungfrei:

$k''(2) = h''(2) = 6 \cdot 2 - 14 = -2$

$\Rightarrow 2 \cdot a = -2$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c = 0 \\ 2 \cdot a \cdot 2 + b = -2 \\ 2 \cdot a = -2 \end{array} \right|$$

Durch Lösen des Gleichungssystems ergibt sich:

$k(x) = -x^2 + 2 \cdot x$

(9) Aufgabe: Neubau einer Bahntrasse [81]

a) Für einen sprungfreien Übergang müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Linker Anschluss: $n(0) = 0{,}01$

Rechter Anschluss: $n(0{,}5) = 0{,}4$

b) Für einen knickfreien Übergang müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

Linker Anschluss: $n'(0) = 0{,}36$

Rechter Anschluss: $n'(0{,}5) = 0$

Sprungfreie Übergänge haben lediglich die Eigenschaft, dass die Bahnschienen aneinander anschließen würden, jedoch sind ohne weitere Zusatzbedingungen die Übergänge nicht zu befahren, da dort „Knicke“ entstehen würden. Durch die Zusatzbedingungen stimmen die Steigungen der beiden Funktionen überein und es entsteht ein „glatter“ Übergang.

c) Bei $n(x)$ handelt es sich somit um eine Funktion 3. Grades:

$n(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Mit den Bedingungen aus den Aufgabenteilen a) und b) ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$n(x) = -4{,}8x^3 + 3{,}24x^2 + 0{,}36x + 0{,}01$

d) Eine knickfreie Verbindung der beiden Gleise liefert die folgenden Bedingungen:

1) $v(1{,}6) = 0{,}4$
2) $v'(1{,}6) = 0$
3) $v(2{,}6) = 0{,}01$
4) $v'(2{,}6) = w'(2{,}6) = -0{,}4$

Bei $v_1(x)$ handelt es sich somit um eine Funktion 3. Grades:

$v_1(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Mit den oben genannten Bedingungen ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$v_1(x) = 0{,}38x^3 - 2{,}594x^2 + 5{,}3824x - 3{,}12768$

e) Eine krümmungssprungfreie Verbindung liefert die folgenden sechs Bedingungen:

1) $v(1{,}6) = 0{,}4$
2) $v'(1{,}6) = 0$
3) $v(2{,}6) = 0{,}01$
4) $v'(2{,}6) = w'(2{,}6) = -0{,}4$
5) $v''(1{,}6) = 0$
6) $v''(2{,}6) = w''(2{,}6) = 8$

Bei $v_2(x)$ handelt es sich im eine Funktion 5. Grades:

$v_2(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

Mit den oben genannten Bedingungen ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$v_2(x) = 2{,}86x^5 - 27{,}83x^4 + 106{,}596x^3 - 201{,}3376x^2 + 187{,}87328x - 68{,}9927936$

(10) Übungsaufgaben: Sprung-, knick- und krümmungssprungfreie Verbindung [82]

a) Für die knickfreie Verbindung wird eine Funktion dritten Grades benötigt:

$v(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Bedingungen an die Funktion $v(x)$:

1) Sprungfrei an der Stelle $x = 2$:

$g(2) = v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = -3$

$\Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c \cdot 2 + d = -3$

2) Sprungfrei an der Stelle $x = 5$:

$h(5) = v(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$

$\Rightarrow a \cdot 5^3 + b \cdot 5^2 + c \cdot 5 + d = 5$

3) Knickfrei an der Stelle $x = 2$:

$g'(2) = v'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 + c = 0$

4) Knickfrei an der Stelle $x = 5$:

$h'(5) = v'(5) = 2 \cdot 5 - 10 = 0$

$\Rightarrow 3 \cdot a \cdot 5^2 + 2 \cdot b \cdot 5 + c = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches „**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“ (von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Durch Lösen des Gleichungssystems mit vier Gleichungen ergibt sich:

$a = -\frac{16}{27}$, $b = \frac{56}{9}$, $c = -\frac{160}{9}$, $d = \frac{335}{27}$

$v(x) = -\frac{16}{27} \cdot x^3 + \frac{56}{9} \cdot x^2 - \frac{160}{9} \cdot x + \frac{335}{27}$

b) Für die krümmungssprungfreie Verbindung werden zwei weitere Bedingungen benötigt, um die Funktion 5. Grades $v(x)$ zu bestimmen:

$v(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

1) Sprungfrei an der Stelle $x = 2$:

$g(2) = v(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 - 7 = -3$

$\Rightarrow a \cdot 2^5 + b \cdot 2^4 + c \cdot 2^3 + d \cdot 2^2 + e \cdot 2 + f = -3$

2) Sprungfrei an der Stelle $x = 5$:

$h(5) = v(5) = 5^2 - 10 \cdot 5 + 30 = 5$

$\Rightarrow a \cdot 5^5 + b \cdot 5^4 + c \cdot 5^3 + d \cdot 5^2 + e \cdot 5 + f = 5$

3) Knickfrei an der Stelle $x = 2$:

$g'(2) = v'(2) = -2 \cdot 2 + 4 = 0$

$\Rightarrow 5 \cdot a \cdot 2^4 + 4 \cdot b \cdot 2^3 + 3 \cdot c \cdot 2^2 + 2 \cdot d \cdot 2 + e = 0$

4) Knickfrei an der Stelle $x = 5$:

$h'(5) = v'(5) = 2 \cdot 5 - 10 = 0$

$\Rightarrow 5 \cdot a \cdot 5^4 + 4 \cdot b \cdot 5 + 3 \cdot c \cdot 5^2 + 2 \cdot d \cdot 5 + e = 0$

5) Krümmungssprungfrei an der Stelle $x = 2$:

$g''(2) = v''(2) = -2$

$\Rightarrow 20 \cdot a \cdot 2^3 + 12 \cdot b \cdot 2^2 + 6 \cdot c \cdot 2 + 2 \cdot d = -2$

6) Krümmungssprungfrei an der Stelle $x = 5$:

$h''(5) = v''(5) = 2$

$\Rightarrow 20 \cdot a \cdot 5^3 + 12 \cdot b \cdot 5^2 + 6 \cdot c \cdot 5 + 2 \cdot d = 2$

Durch Lösen des Gleichungssystems mit sechs Gleichungen ergibt sich:

$a = \frac{22}{81}$, $b = -\frac{385}{81}$ $c = \frac{2548}{81}$, $d = -\frac{7889}{81}$, $e = \frac{11540}{81}$ und $f = -\frac{6695}{81}$

$v(x) = \frac{1}{81} \cdot (22 \cdot x^5 - 385 \cdot x^4 + 2548 \cdot x^3 - 7889 \cdot x^2 + 11540 \cdot x - 6695)$

(11) Aufgabe: Tretboot [83]

Nach Betrachtung der Skizze liegt der Ansatz einer quartischen Funktion (Funktion 4. Grades) nahe. Im Folgenden wird die Funktion so modelliert, dass der Koordinatenursprung unterhalb der Mitte des Bootes liegt und die x –Achse durch die beiden tiefsten Punkte des Bootes geht.

Ansatz:

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

Bei der Wahl der Bedingungen ist zu beachten, dass die Eigenschaften einer symmetrischen Funktion beachtet werden müssen. Somit wählt man beispielsweise folgende Bedingungen:

1) $f(0) = 0{,}5$
2) $f'(0) = 0$
3) $f(0{,}5) = 0$
4) $f(-0{,}5) = 0$
5) $f'(0{,}5) = 0$

Funktionsgleichung: $f(x) = 8x^4 - 4x^2 + 0{,}5$

Nun berechnet man den Funktionswert an der Stelle $x = \frac{0{,}3}{2} = 0{,}15$, dabei gibt der Wert $0{,}3$ die Breite des Schaufelrades in m an: $f(0{,}15) = 0{,}4141\ [\mathrm{m}]$

Das Schaufelrad wird auf einer Höhe von 25 cm befestigt, damit ist das Schaufelrad ohne Berücksichtigung des Mindestabstands $(0{,}4141\ \mathrm{m} - 0{,}25\ \mathrm{m}) \cdot 2 = 0{,}3282\ \mathrm{m}$ hoch.

Da das Schaufelrad einen Mindestabstand von 5 cm zum Schiffsrumpf laut Vorgabe einhalten soll ergibt sich die Höhe des Schaufelrades wie folgt: $0{,}3282\ \mathrm{m} - 0{,}05\ \mathrm{m} \cdot 2 = 0{,}2282\ \mathrm{m}$

(12) Aufgabe: Tunnel [84]

Zur Bearbeitung vieler Fragestellungen wird man zunächst einmal eine Funktionsgleichung benötigen, welche den Tunnel mathematisch beschreibt. Diese soll im Folgenden beispielhaft modelliert werden:

Zum Abschätzen von Längen orientieren wir uns an der Breite des Fahrzeugs. Diese nehmen wir mit 1,9 m an. Für die maximale Breite des Tunnels ergibt sich so circa ein Wert von 8 m und für die Höhe ungefähr 5,5 m.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das Koordinatensystem wählen wir so, dass der Ursprung auf Fahrbahnhöhe in der Mitte des Tunnels liegt (ungefähr Mittelstreifen).

Geht man im ersten Ansatz von einer quadratischen Funktion ($q(x) = ax^2 + bx + c$) aus, so ergeben sich die folgenden drei Bedingungen:

$q(-4) = 0$

$q(0) = 5{,}5$

$q(4) = 0$

Es ergibt sich die Funktionsgleichung:

$q(x) = -\frac{11}{32}x^2 + \frac{11}{2}$

Der gezeichnete Graph der Funktion $q(x)$ weicht zu stark von den Vorgaben ab.

Im zweiten Ansatz soll der Tunnel nun mit einer quartischen Funktion (4. Grades) modelliert werden. Da diese symmetrisch zur gewählten $x-$Achse sein soll, lautet die allgemeine Funktionsgleichung: $t(x) = ax^4 + bx^2 + c$.

Wir lesen einen weiteren Punkt aus dem Foto ab und stellen so wieder drei Bedingungen auf:

$t(-4) = 0$

$t(-2) = 5$

$t(0) = 5{,}5$

Es ergibt sich die Funktionsgleichung:

$t(x) = -\frac{7}{384}x^4 - \frac{5}{96}x^2 + \frac{11}{2}$

Der Graph der Funktion beschreibt den Sachkontext hinreichend genau, um hiermit nun weitere Fragestellungen zu bearbeiten. Betrachtet werden könnte zum Beispiel das herausgeschlagene Gesteinsvolumen oder die maximale Durchfahrtshöhe eines LKWs.

(13) Aufgabe: Enercon Gebäude [84]

Mögliche Fragestellung:

Wie groß ist die zu reinigende Glasfläche des Gebäudes?

Hinweise zur Lösung:

Zunächst muss ein geeignetes Koordinatensystem gewählt und eine Achsenskalierung gemäß den Angaben aus der vorangegangenen Text vorgenommen werden.

Es müssen insgesamt drei Funktionen modelliert werden, zum einen eine Funktion $d_1(x)$, die das geschwungene Dach beschreibt, eine weitere Funktion $d_2(x)$, die das waagerecht verlaufene Dach mathematisch beschreibt und zum anderen eine Funktion $b(x)$, die den geschwungenen Boden des Gebäudes modelliert.

Bei der Funktion $d_1(x)$ handelt es sich mindestens um eine Funktion 3. Grades (2 Extremstellen sind zu erkennen). Dies gilt auch für die Funktion $b(x)$. Bei der Funktion $d_2(x)$ handelt es sich um eine konstante Funktion. Individuelle Lösungen sind an dieser Stelle denkbar.

Nachdem die Funktionen durch Interpolation ermittelt wurden, muss mit Hilfe der Integration der Flächeninhalt der Glasfläche berechnet werden. Man beachte, dass das Gebäude von beiden Seiten eine Glaswand besitzt.

Weitere sinnvolle Fragestellungen sind denkbar.

(14) Aufgabe: Sprungschanze [85]

a) Eine krümmungssprungfreie Verbindung liefert die folgenden Bedingungen:

1) Höhe am Schanzentisch:
   $u(90) = 90$
2) Höhe am Anschluss an linearen Anlauf:
   $u(30) = 150 - 30 \cdot tan(36)$
3) Steigung am Anschluss an linearen Anlauf:
   $u'(30) = -tan(36) = -0{,}73$
4) Steigung am Anschluss an Schanzentisch:
   $u'(90) = -tan(11) = -0{,}19$
5) Krümmungsverhalten am Anschluss an linearen Anlauf:
   $u''(30) = 0$
6) Krümmungsverhalten am Anschluss an Schanzentisch:
   $u''(90) = 0$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt die Funktion: $u(x) = -8{,}16 \cdot 10^{-8} \cdot x^5 + 2{,}32 \cdot 10^{-5} \cdot x^4 - 2{,}4 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 + 0{,}11x^2 - 3{,}17x + 170{,}13$.

b) Zu betrachten ist die Bogenlänge des Übergangsbogens und des linearen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Anlaufs, so dass sich ab dem Schanzentisch 80 bzw. 95 m ergeben. Zunächst wird die Länge des Übergangsbogens berechnet: $\int_{30}^{90} \sqrt{1+\left(u'(x)\right)^2}dx = 72{,}07\ \text{m}$.

Um nun zu berechnen, wo der Anlauf beginnen muss, wird die Funktion für den linearen Anlauf ($l(x) = 150 - \tan(36) \cdot x$) betrachtet.

Für eine Anlauflänge von 80m muss der lineare Anlauf noch $80\ \text{m} - 72{,}07\ \text{m} = 7{,}93\ \text{m}$ lang sein. Zu lösen ist die Gleichung $\int_a^{30} \sqrt{1+\left(l'(x)\right)^2}dx = 7{,}93$. Es ergibt sich $a = 23{,}58$. Die zugehörige Höhe beträgt $l(23{,}58) = 132{,}86\ \text{m}$.

Für eine Anlauflänge von 80m muss der lineare Anlauf noch $95\ \text{m} - 72{,}07\ \text{m} = 22{,}93\ \text{m}$ lang sein. Zu lösen ist die folgende Gleichung:

$$\int_a^{30} \sqrt{1+\left(l'(x)\right)^2}dx = 22{,}93$$

Es ergibt sich $a = 11{,}45$. Die zugehörige Höhe beträgt $l(11{,}45) = 141{,}68\ \text{m}$.

Somit beträgt die Höhe des Startpunktes je nach Windbedingungen zwischen 132,86 m und 141,68 m.

c) Die folgenden Bedingungen gelten für die Aufsprungbahn:

1) Höhe unterhalb des Schanzentischs:
   $b(97) = 90 - 7 \cdot tan(11) - 5 = 83{,}64$
2) Steigung unterhalb des Schanzentischs:
   $b'(97) = -tan(11) = -0{,}19$
3) Steigung am K-Punkt:
   $b'(210) = -tan(34) = -0{,}67$
4) notwendige Bedingung eines Wendepunktes im K-Punkt:
   $b''(210) = 0$
5) Höhe am Ende der Aufsprungbahn:
   $b(250) = 0$
6) Steigung am Ende der Aufsprungbahn:
   $b'(250) = 0$

Das Lösen des Gleichungssystems ergibt die Funktion: $b(x) = 5{,}5 \cdot 10^{-9} \cdot x^5 - 4{,}65 \cdot 10^{-6} \cdot x^4 + 1{,}54 \cdot 10^{-3} \cdot x^3 - 0{,}25x^2 + 19{,}66x - 496{,}8$.

d) Der Hillsizepunkt ist damit der Punkt, an dem die Steigung $-tan(32)$ beträgt. Somit ist die Gleichung $b'(x) = -\tan(32)$ zu lösen. Verwenden Sie bei den Funktionen $b(x)$ und $b'(x)$ alle vom CAS angegebenen Nachkommastellen. Es ergibt sich:

$x_1 = 189{,}21$ und $x_2 = 223{,}71$

Der zweite Wert liegt unterhalb des K-Punktes und ist somit der Hillsizepunkt. Da die Hillsize die kürzeste Verbindung zum Schanzentisch beschreibt, muss diese mithilfe des Satzes des Pythagoras berechnet werden. Die horizontale Entfernung (Länge der ersten Kathete) beträgt $223{,}71\ \text{m} - 97\ \text{m} = 126{,}71\ \text{m}$. Für die vertikale Entfernung wird die Höhe des Schanzentisches mit $90 - 7 \cdot tan(11) = 87{,}64\ \text{m}$ berechnet. Die vertikale Entfernung (Länge der zweiten Kathete) beträgt dann $87{,}64\ \text{m} - 10{,}29\ \text{m} = 77{,}35\ \text{m}$. Somit beträgt die kürzeste Verbindung $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 148{,}45\ \text{m}$. Dieser Wert zeigt, dass es sich um eine Großschanze handelt.

e) Um die Sprungweite zu berechnen, muss die Gleichung $b(x) = s(x)$ gelöst werden. Es ergibt sich: $x = 212{,}63\ \text{m}$. Der Springer ist somit $212{,}63 - 210 = 2{,}63\ \text{m}$ hinter dem K-Punkt gelandet.

Lösung: Rotationskörper

(1) Aufgabe: Schokopraline [89]

a) Geeignet ist eine Funktion 3. Grades, da die Silhouette der Schokopraline einen Wendepunkt aufweist.

Ansatz:

$$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$$
$$f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$$
$$f''(x) = 6 \cdot a \cdot x + 2 \cdot b$$

Mögliche Bedingungen:

$$f(1{,}5) = 0{,}5$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$f'(1{,}5) = 0$

$f''(1{,}5) = 0$

$f(0) = 1$

$f(x) = -\frac{4}{27} \cdot x^3 + \frac{2}{3} \cdot x^2 - x + 1$

b) $\int_0^3 \pi \cdot f(x)^2 dx = \frac{6}{7} \cdot \pi \approx 2{,}7$

$2{,}7\ \text{cm}^3 \cdot 1300\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$= 0{,}0000027\ \text{m}^3 \cdot 1300\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$= 0{,}00351\text{kg} = 3{,}51\text{g}$

(2) Aufgabe: Kreisel [90]

Insgesamt sind 4 verschiedene Funktionen gesucht:

$0 \le x \le 3$	$f(x) = 1{,}5 \cdot x$
$3 \le x \le 3{,}5$	$g(x) = 7$
$3{,}5 \le x \le 6$	$h(x) = -\frac{6}{25} \cdot x^2 + \frac{42}{25} \cdot x + \frac{3}{50}$
$6 \le x \le 14$	$i(x) = 1$

Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $i(x)$ sind recht schnell ermittelt. Die Funktion $h(x)$ ähnelt dem Ausschnitt einer Parabel. Aus diesem Grund wurde eine quadratische Funktion gewählt mit $h(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Mögliche Bedingungen sind:

$h(3{,}5) = 3$, $h'(3{,}5) = 0$ und $h(6) = 1{,}5$.

Berechnung des Volumens:

$\int_0^3 \pi \cdot f(x)^2 dx = \frac{81}{4} \cdot \pi$

$\int_3^{3{,}5} \pi \cdot g(x)^2 dx = \frac{49}{2} \cdot \pi$

$\int_{3{,}5}^6 \pi \cdot h(x)^2 dx = \frac{129}{8} \cdot \pi$

$\int_6^{14} \pi \cdot i(x)^2 dx = 8 \cdot \pi$

$V = \frac{81}{4} \cdot \pi + \frac{49}{2} \cdot \pi + \frac{129}{8} \cdot \pi + 8 \cdot \pi = \frac{551}{8} \cdot \pi$

$\approx 216{,}4$

$216{,}4\ \text{cm}^3 \cdot 690\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} = 0{,}0002164\ \text{m}^3 \cdot 690\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

$= 0{,}149316\ \text{kg} = 149{,}316\ \text{g}$

(3) Aufgabe: Weinkaraffe [91]

a) Ansatz 1: Funktion 3. Grades

Die Karaffen-Silhouette soll mit Hilfe einer Funktion 3. Grades modelliert werden.

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

Es sind vier Bedingungen zu formulieren um die vier Parameter a, b, c und d bestimmen zu können:

$f(0) = 6$

$f(3{,}5) = 11{,}5$

$f(14) = 2{,}2$

$f(19{,}6) = 3{,}2$

Auf diese Weise ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f(x) = 0{,}01232729116 \cdot x^3$
$-0{,}3912377995 \cdot x^2 + 2{,}78975155 \cdot x + 6$

Zeichnet man den Graphen der Funktion in die Skizze ein, so lassen sich deutliche Abweichungen zu der tatsächlichen Karaffen-Silhouette erkennen.

Das Rotationsvolumen beträgt:

$V = \pi \cdot \int_0^{19{,}6} f(x)^2 dx = 3538{,}08\ [\text{cm}^3]$

Ansatz 2: Funktion 5. Grades

Die Karaffen-Silhouette soll mit Hilfe einer Funktion 5. Grades modelliert werden.

Die allgemeine Funktionsgleichung lautet:

$g(x) = a \cdot x^5 + b \cdot x^4 + c \cdot x^3 + d \cdot x^2 + e \cdot x + f$

Es sind sechs Bedingungen zu formulieren um die Parameter a, b, c, d, e und f bestimmen zu können:

$g(0) = 6$

$g(3{,}5) = 11{,}5$

$g(14) = 2{,}2$

$g(19{,}6) = 3{,}2$

$g'(3{,}5) = 0$

$g'(14) = 0$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$g(x) = -2{,}488342423 \cdot 10^{-5} \cdot x^5 +$
$1{,}582538292 \cdot 10^{-4} \cdot x^4 +$
$0{,}03095156575 \cdot x^3 - 0{,}667188873 \cdot x^2 +$
$3{,}524381883 \cdot x + 6$

Zeichnet man diese Funktion in die Skizze ein, so fällt auf, dass diese Funktion die Karaffen-Silhouette wesentlich besser als die Funktion 3. Grades beschreibt, jedoch immer noch recht ungenau ist.

Das Rotationsvolumen beträgt:

$V = \pi \cdot \int_0^{19{,}6} g(x)^2 dx = 2964{,}65\ \text{cm}^3$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) Die Karaffen-Silhouette soll mit Hilfe der Spline-Interpolation, also der abschnittsweisen Interpolation unter Verwendung von Polynomen 3. Grades, modelliert werden.

Die allgemeine Funktionsgleichung einer ganzrationalen Funktion 3. Grades lautet $f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$ mit der 1. Ableitung $f'(x) = 3 \cdot a \cdot x^2 + 2 \cdot b \cdot x + c$

Es werden die folgenden fünf Abschnitte betrachtet:

$0 \leq x \leq 3{,}3$

$3{,}3 \leq x \leq 5$

$5 \leq x \leq 6$

$6 \leq x \leq 14$

$14 \leq x \leq 19{,}6$

Abschnitt 1

Die folgenden Bedingungen dienen als Grundlage:

$f_1(0) = 6$

$f_1(3{,}3) = 11{,}5$

$f_1'(3{,}3) = 0$

$f_1'(1{,}5) = 1{,}5$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f_1(x) = \frac{175}{1188} \cdot x^3 - \frac{65}{44} \cdot x^2 + \frac{79}{16} \cdot x + 6$

Abschnitt 2

Die folgenden Bedingungen dienen als Grundlage:

$f_2(3{,}3) = 11{,}5$

$f_2(5) = 7{,}5$

$f_2'(3{,}3) = 0$

$f_2'(5) = -4$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f_2(x) = \frac{1200}{4913} \cdot x^3 - \frac{20720}{4913} \cdot x^2 + \frac{97548}{4913} \cdot x - \frac{165785}{9826}$

Abschnitt 3

Die folgenden Bedingungen dienen als Grundlage:

$f_3(5) = 7{,}5$

$f_3(6) = 5{,}5$

$f_3'(5) = -4$

$f_3'(6) = -1{,}4$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f_3(x) = -\frac{7}{5} \cdot x^3 + \frac{122}{5} \cdot x^2 - 143 \cdot x + \frac{575}{2}$

Abschnitt 4

Die folgenden Bedingungen dienen als Grundlage:

$f_4(6) = 5{,}5$

$f_4(14) = 2{,}2$

$f_4'(6) = -1{,}4$

$f_4'(14) = 0$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f_4(x) = -\frac{23}{2560} \cdot 10^{-3} \cdot x^3 + \frac{457}{1280} \cdot x^2 - \frac{3017}{640} \cdot x + \frac{7319}{320}$

Abschnitt 5

Die folgenden Bedingungen dienen als Grundlage:

$f_5(14) = 2{,}2$

$f_5(19{,}6) = 3{,}2$

$f_5'(14) = 0$

$f_5'(19{,}6) = 0{,}25$

Es ergibt sich folgende Funktionsgleichung:

$f_5(x) = -\frac{75}{21952} \cdot x^3 + \frac{305}{1568} \cdot x^2 - \frac{55}{16} \cdot x + \frac{863}{40}$

c) Volumenberechnung:

$$V = \pi \cdot \int_0^{3{,}3} f_1(x)^2 dx + \pi \cdot \int_{3{,}3}^{5} f_2(x)^2 dx + \pi \cdot \int_5^6 f_3(x)^2 dx + \pi \cdot \int_6^{14} f_4(x)^2 dx + \pi \cdot \int_{14}^{19{,}6} f_5(x)^2 dx$$

$V = 1084{,}47 + 549{,}12 + 124{,}97 + 235{,}26 + 119{,}11 = 2112{,}93 \text{ cm}^3 = 2112{,}93 \text{ ml} = 2{,}11 \text{ l}$

(4) Aufgabe: Heißluftballon [92]

Tipps:

I. **Modellieren** Sie den Ballon.

II. **Berechnen** Sie das Luftvolumen innerhalb der Ballonhülle.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

III. **Berechnen** Sie die Masse bei 0°C und bei 100°C (Masse = Volumen · Dichte).

IV. **Berechnen** Sie die Differenz der Massen, um das maximale Startgewicht zu ermitteln.

V. **Berechnen** Sie die das personen-unabhängige Gewicht (Korb, Mindest-ausrüstung).

VI. **Berechnen** Sie die Mantelfläche und damit das Gewicht des Ballonstoffs.

VII. **Berechnen** Sie nun die zulässige Personenanzahl, wenn man von einem durchschnittlichen Gewicht von 80kg pro Person ausgeht.

Kontrollergebnisse:

Zu II. ca. $3650\ m^3$

Zu VI. ca. $1200\ m^2$

Zu VII. ca. 10 Personen

Lösung: Regression

(1) Aufgabe: Medikament [100]

a) Exponentielle Regression:

$c(t) = 9{,}898 \cdot e^{-0{,}398 \cdot t}$

$(r^2 = 0{,}995, MSe = 4{,}098 \cdot 10^{-3})$

ODER

$c(t) = 9{,}898 \cdot 0{,}672^t$

$(r^2 = 0{,}995, MSe = 4{,}098 \cdot 10^{-3})$

b) $c(2) = 4{,}47$

$c(5) = 1{,}35$

c) Lösen der Gleichung $c(t) = 0{,}1$ ergibt $t = 11{,}55$ h. Nach 11 Stunden und 33 Minuten ist die Konzentration des Medikamentes unter die Nachweisgrenze gesunken.

(2) Aufgabe: Baumwachstum [100]

Exponentielle Regression:

$g(x) = 0{,}7383 \cdot e^{0{,}0105 \cdot x}$

$(r^2 = 0{,}7, MSe = 0{,}2075)$

ODER

$g(x) = 0{,}7383 \cdot 1{,}0106^x$

$(r^2 = 0{,}7, MSe = 0{,}2075)$

Logistische Regression:

$f(x) = \frac{3{,}9533}{1+26{,}5164 \cdot e^{-0{,}0507 \cdot x}}$

$(MSe = 1{,}9478 \cdot 10^{-5})$

Hinsichtlich der mathematischen Kennwerte zeigt sich, dass die logistische Regression genauer ist, da der MSe-Wert wesentlich näher an 0 liegt. Auch im Kontext erscheint logistisches Wachstum sinnvoller, da der Baum in seinem Wachstum beschränkt ist.

(3) Aufgabe: Sonnenscheindauer [101]

a) Die Daten für die Regression müssen aus der Tabelle abgelesen werden.

Quadratische Funktion:

$h(x) = -0{,}000225x^2 + 0{,}079x - 0{,}1925$

$(r^2 = 0{,}939, MSe = 0{,}4003)$

Funktion vierten Grades:

$f(x) = 6{,}82 \cdot 10^{-9} \cdot x^4 - 4{,}77 \cdot 10^{-6} \cdot x^3 + 8{,}4 \cdot 10^{-4} \cdot x^2 - 2{,}77 \cdot 10^{-3} \cdot x + 1{,}25$

$(r^2 = 0{,}9905, MSe = 0{,}0797)$

Sinus Regression (im Gradmaß):

$g(x) = 3{,}2497 \cdot sin(0{,}935x - 72{,}3477) + 4{,}0997$

$(MSe = 0{,}065)$

b) Der MSe-Wert der Sinus Regression ist kleiner, weswegen diese Funktion als genauer angesehen werden kann (wenn auch nur geringfügig). Insbesondere im Hinblick auf den weiteren Verlauf erscheint die Wahl einer Sinus-Regression sinnvoller, da es sich um einen periodischen Vorgang handelt.

c) $\int_0^{360} g(x)dx = 1556{,}19$

Demnach gab es im gesamten Jahr ca. 1556 Sonnenstunden in Hamburg.

(4) Aufgabe: Elektrischer Widerstand von Silizium [101]

a) Quadratische Regression:

$f(x) = 11{,}05x^2 - 2031{,}78x + 97112{,}4$

$(r^2 = 0{,}996, MSe = 1490310{,}1)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches „**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“ (von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Exponentielle Regression:

$g(x) = 142024{,}11 \cdot e^{-0{,}0382 \cdot x}$

$(r^2 = 0{,}975, MSe = 0{,}0295)$

ODER

$g(x) = 142024{,}11 \cdot 0{,}9625^x$

$(r^2 = 0{,}975, MSe = 0{,}0295)$

b) Hinsichtlich der Genauigkeitswerte zeigt sich, dass der r^2-Wert der quadratischen Regression näher an 1 liegt und diese damit genauer ist. Der MSe-Wert deutet jedoch darauf hin, dass die exponentielle Regression genauer ist, da dieser für die exponentielle Regression geringer ist. Zudem hat $f(x)$ einen Tiefpunkt bei 91,96℃ und steigt danach wieder an. Dies erscheint im Kontext nicht sinnvoll, da der Widerstand bei steigender Temperatur immer weiter sinken sollte. Gewählt wird also die Exponentialfunktion.

c)

Temp.	Messw.	$g(x)$	Proz. Abw.
30	47 000	45 150	3,94%
40	32 000	30 815	3,7%
60	16 000	14 354	10,29%
70	8 000	9 796	22,45%
80	6 000	6 686	11,43%
90	4 000	4 563	14,08%
100	4 000	3 114	22,14%

Damit beträgt die maximale Abweichung der errechneten Werte von den Messwerten 22,45%. Dieses wurde berechnet durch die folgende Formel:

$1 - \frac{\text{Funktionswert}}{\text{Messwert}}$.

d) $g(50) = 21018{,}2$

$g(120) = 1448{,}51$

Bei 50℃ beträgt der Widerstand 21018,2 Ω und bei 120℃ beträgt er 1448,51 Ω.

(5) Aufgabe: Bevölkerung in Hamburg [102]

Unter Nutzung aller Daten ergeben sich folgende Funktionen:

Lineare Regression:

$f(x) = 15144{,}007x - 28730621$

$(r^2 = 0{,}9654, MSe = 117578590)$

Exponentielle Regression:

$g(x) = 0{,}0918208 \cdot 1{,}0083635^x$

$(r^2 = 0{,}964, MSe = 3{,}7044 \cdot 10^{-5})$

Da der r^2-Wert bei beiden Regressionen sehr ähnlich ist, kann nur der MSe-Wert verglichen werden. Dieser zeigt, dass die exponentielle Regression genauer ist. Im Kontext von Bevölkerungsentwicklungen erscheint es zudem sinnvoll, von exponentiellem Wachstum auszugehen, da der Zuwachs abhängig ist von der Anzahl der Menschen. Mit dem exponentiellen Modell ergibt sich beispielsweise für 2050 eine Bevölkerung von ca. $g(2050) = 2\,387\,982$ Einwohnern in Hamburg. 2 Millionen Einwohner werden nach diesem Modell im Jahr 2028 erreicht ($g(x) = 2\,000\,000$ ergibt $x = 2028{,}71$).

(6) Aufgabe: Verbreitung eines viralen Videos im Internet [102]

a) Logistische Regression:

$f(x) = \frac{717{,}83}{1 + 88{,}26 \cdot e^{-0{,}0567 \cdot x}}$

$(MSe = 74{,}53)$

Exponentielle Regression:

$g(x) = 4{,}288 \cdot e^{0{,}055 \cdot x}$

$(r^2 = 0{,}894, MSe = 0{,}426)$

ODER

$g(x) = 4{,}288 \cdot 1.0565^x$

$(r^2 = 0{,}894, MSe = 0{,}426)$

b) Der MSe-Wert der exponentiellen Regression ist kleiner als derjenige der logistischen Regression, weswegen die exponentielle Regression geeigneter erscheint. Der Verlauf der beiden Funktionen zeigt jedoch deutlich, dass die exponentielle Funktion zu schnell ansteigt und besonders von den letzten Zugriffszahlen zu stark abweicht. Zudem ist die Annahme einer Begrenzung der Zugriffe im Sachkontext sinnvoll.

c) Zu lösen ist die Gleichung $f(x) = 1000$ Diese Gleichung hat keine Lösung, da die Funktion nach oben beschränkt ist (der

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Grenzwert liegt bei: $\lim_{x\to\infty} \frac{717{,}83}{1+88{,}26\cdot e^{-0{,}0567\cdot x}} = 717{,}83$). Das bedeutet, dass mit dieser Modellierung eine Milliarde Zugriffe nie erreicht wird. Alternativ kann die exponentielle Regressionsfunktion verwendet werden. Das Lösen der Gleichung $g(x) = 1000$ führt zu dem Ergebnis $x = 99{,}12$. Das bedeutet, dass mit der Modellierung die Grenze von einer Milliarde Zugriffen bereits am 25. Oktober erreicht wurde. In der Realität lag der Wert zu diesem Zeitpunkt noch zwischen 530 und 590.

d) Tatsächlich wurde diese Grenze am 21. Dezember 2012 überschritten, also ca. zwei Monate später als in der Berechnung.

(7) Aufgabe: LEGO®-Steine [103]

Mögliche Fragestellungen lauten:

- Sollte man eher einen großen Legokasten kaufen oder viele kleine, um für wenig Geld möglichst viele Steine zu kaufen?
- Bei welcher Packungsgröße ist das Preis-Stein-Verhältnis am besten?

(8) Aufgabe: Regression und Interpolation [103]

Regression	Interpolation
…berechnet eine Näherung für viele Datenpunkte	…erfüllt alle gestellten Bedingungen genau
…basiert nur auf gegebenen Punkten (Wertepaaren)	…ermöglicht es, neben Punkten auch andere Bedingungen (Extrem- und Wendestellen, Steigungswerte, …) zu formulieren
…ist geeignet für große Datenmengen	…ist nur bei Vorliegen von wenigen Bedingungen sinnvoll, da jede neue Bedingung den Funktionsgrad erhöht
…erlaubt es, verschiedene Funktionsklassen zu betrachten (ganzrational, exponentielle, trigonometrisch, …)	

Lösung: Einstieg in trigonometrische Funktionen

(1) Aufgabe zum Einstieg [104]

Zu sehen ist eine Stimmgabel (Schwingung, Schallwellen), der Herzrhythmus auf einem EKG (wiederkehrendes Muster), ein Pendel (Schwingung) und ein Riesenrad (Betrachtung einer Gondel). Hierbei geht es immer um periodisch wiederkehrende Vorgänge, die sich wellenförmig darstellen lassen. Auch das geschwungene Dach einer U-Bahn-Station hat eine Wellenform.

Lösung: Trigonometrische Funktionen

(2) Aufgabe: Wattwanderung vor Cuxhaven 1 [105]

Hilfreiche Formulierungen:

…schneidet die y-Achse bei $y = 1$…
…wiederholt sich im Abstand von…
…verläuft periodisch…
…hat einen wellenförmigen Verlauf…
…hat ein Maximum bei…
…hat ein Minimum bei…
…hat die Nullstellen bei…
…hat eine Periodenlänge von…
…hat eine Amplitude von…
…der Graph steigt im Bereich…
…der Graph fällt im Bereich…
…hat eine größere Amplitude…
…hat eine kleinere Amplitude…
…hat eine größere Periodenlänge…
…hat eine kleinere Periodenlänge…
…der Graph ist nach oben verschoben…
…hat eine andere Achsenskalierung…

Lösungsvorschlag:
Der Graph schneidet die y-Achse bei $f(0°) = 1$. An dieser Stelle hat der Graph ein Maximum. Danach fällt der Graph und schneidet bei $x =$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$90°$ die x-Achse. Es handelt sich dabei um eine Nullstelle. Bei $x = 180°$ erreicht der Graph ein Minimum mit $f(180°) = -1$, um dann wieder zu steigen, die x-Achse bei $x = 270°$ erneut zu schneiden und bei $x = 360°$ wieder ein Maximum mit $f(360°) = 1$ zu erreichen. Danach wiederholt sich der Verlauf.

Der periodische Verlauf entspricht dem Verlauf von Ebbe und Flut, wobei die Achsenskalierungen an den Kontext angepasst wurden. Die Amplitude ist allerdings mit 1 zu gering, da sie 1,65 betragen müsste (die Hälfte des Unterschieds zwischen Hoch- und Niedrigwasser) und die Periodenlänge muss 12,5 Stunden betragen und nicht 360°. Außerdem muss die Funktion entlang der y-Achse nach oben verschoben werden, da der Graph des Wasserstandverlaufes nicht unterhalb der x-Achse verläuft.

Parameter a

Der Parameter a gibt die Amplitude der Funktion an. Für die Wattwanderung müsste $a = 1{,}65$ sein.

Parameter d

Der Parameter d verschiebt die Funktion entlang der y-Achse nach oben oder unten. Für die Wattwanderung müsste $d = 1{,}95$ sein.

Parameter b

Der Parameter b verändert die Periodenlänge. Für die Wattwanderung müsste $b = \frac{360}{12{,}5}$ sein.

Der Wasserstand um 18 Uhr lässt sich mithilfe der folgenden Funktion berechnen:

$$f(t) = 1{,}65 \cdot cos\left(\frac{360}{12{,}5} \cdot t\right) + 1{,}95$$

$$f(18) = 0{,}42 \text{ m}$$

(3) Aufgabe: Wattwanderung vor Cuxhaven 2 [107]

a) Die Periodenlänge und die Amplitude des Wasserstandsdiagramms sind die gleichen wie die aus Aufgabe 1, die Funktion ist lediglich parallel zur x-Achse verschoben.

b) Die Parameter a, b und d bleiben unverändert, weil die Funktion lediglich auf der x -Achse verschoben ist. Sowohl die Verschiebung auf der y-Achse (Parameter d), die Amplitude (Parameter a) und die Periodenlänge (Parameter b) sind gleichgeblieben.

c) Der Parameter c verschiebt den Graphen der Funktion entlang der x-Achse.

$c_1 = 1$ verschiebt den Graphen um eine Einheit nach links.

$c_2 = 0$ verschiebt den Graphen nicht.

$c_3 = -2$ verschiebt den Graphen um zwei Einheiten nach rechts.

(4) Übungsaufgabe: Umrechnung von Bogen- und Gradmaß [111]

Winkel im Gradmaß	120°	60°	45°	1°
Winkel im Bogenmaß	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{180}\pi$

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Warum können Seeräuber nicht im Bogenmaß rechnen? – Weil sie Pi raten.

(5) Übungsaufgabe: Modellieren von Funktionen [114]

a) $f(x) = 2 \cdot sin\,(x)$
$g(x) = sin(x) - 1{,}5$

b) $f(x) = sin(2 \cdot x)$
$g(x) = 2 \cdot sin\,(4 \cdot x)$

c) $f(x) = sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

$g(x) = sin\left(4 \cdot \left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2$

$= sin\left(4 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 2 = -sin(4 \cdot x) + 2$

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Mündliche Abiturprüfung in Mathematik.

Lehrer: „Skizzieren Sie eine Sinus-Funktion!“

Der Prüfling zeichnet etwas Kurviges an die Tafel.

Lehrer: „Na, das sieht doch schon ganz gut aus.“

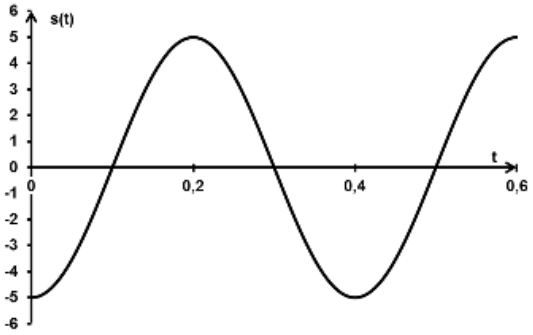
Prüfling: „Das ist doch nur die x-Achse, ich bin so aufgeregt.“

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Harmonische Schwingung eines Federpendels [115]

a)



b) Im Bogenmaß gilt für eine Sinus-Funktion:

$a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{5-(-5)}{2} = \frac{10}{2} = 5$

$b = \frac{2\pi}{0{,}4} = \frac{\pi}{0{,}2} = 5\pi$

$c = -x_{min} - \frac{p}{4} = -0 - \frac{0{,}4}{4} = -0{,}1$

$d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} = \frac{5+(-5)}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$s(t) = 5 \cdot sin\,(5\pi \cdot (x - 0{,}1))$

Bei einer Cosinus-Funktion ergibt sich lediglich ein anderes c:

$c = -x_{max} = -0{,}2$

c) $s(3{,}75) = 5 \cdot sin\big(5\pi \cdot (3{,}75 - 0{,}1)\big) = 3{,}54$

Zum Zeitpunkt $t = 3{,}75$ ist das Pendel um 3,54 cm nach oben ausgelenkt.

d) Zu lösen ist:

$s(t) = 5 \cdot sin\big(5\pi \cdot (t - 0{,}1)\big) = 2$

Es ergibt sich $t_1 = 0{,}126 + 0{,}4k$ und $t_2 = 0{,}274 + 0{,}4k$ mit $k \in \mathbb{N}$. Das bedeutet, dass dieser Ausschlag zum ersten Mal nach 0,126 s auftritt und zum zweiten Mal nach 0,274 s. Und dann immer in 0,4 s-Schritten nach dem ersten bzw. zweiten Auftreten.

(7) Übungsaufgaben: Gleichungen lösen [116]

a) $sin\big(x - 2\big) = 0{,}2$ ergibt

$x_1 = 4{,}94 + 2\pi \cdot k = 4{,}94 + 6{,}28k$ und $x_2 = 2{,}2 + 2\pi \cdot k = 2{,}2 + 6{,}28k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Lösungen sind beispielsweise 2,2; 4,94; 8,48; 11,22; …

b) $sin\big(2x + 3\big) = -0{,}4$ ergibt

$x_1 = -1{,}71 + \pi \cdot k = -1{,}71 + 3{,}14k$ und $x_2 = 0{,}28 + \pi \cdot k = 0{,}28 + 3{,}14k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Lösungen sind beispielsweise 0,28; 1,43; 3,42; …

c) $4 \cdot cos\left(\frac{1}{3}x - 1\right) + 3 = 2{,}9$ ergibt $x_1 = -1{,}79 + 6\pi \cdot k = -1{,}79 + 18{,}85k$ und $x_2 = 7{,}79 + 6\pi \cdot k = 7{,}79 + 18{,}85k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Lösungen sind beispielsweise 7,79; 17,06; 26,64; …

(8) Aufgabe: Ableitungen verketteter Funktionen [117]

In Ihrer Antwort sollte erkennbar sein, dass…

- die trigonometrische Funktion abgeleitet wird (aus Sinus wird zum Beispiel Cosinus);
- der Term in der Klammer (das *Argument* der trigonometrischen Funktion) unverändert erhalten bleibt;
- das Argument außerdem abgeleitet und mit der Ableitung der trigonometrischen Funktion multipliziert wird.

Die genaue Erklärung finden Sie in der "Information: Ableitung verketteter Funktionen" (Seite 118).

(9) Übungsaufgabe: Ableitung bestimmen [118]

a) $f(x) = 2 \cdot sin\,(3x - 4)$
$\rightarrow f'(x) = 6 \cdot cos\,(3x - 4)$

b) $f(x) = -cos(4x)$
$\rightarrow f'(x) = 4 \cdot sin(4x)$

c) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot cos(-2x^3 - \pi) + 6$
$\rightarrow f'(x) = 4x^2 \cdot sin(-2x^3 - \pi)$

d) $f(x) = -7 \cdot cos(x^6) + 3x$
$\rightarrow f'(x) = 42x^5 \cdot sin(x^6) + 3$

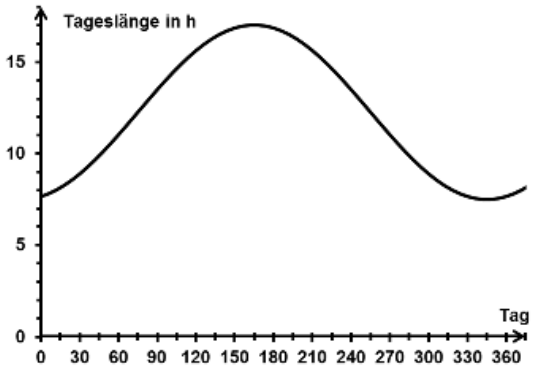
e) Hier wurden die Ableitungen der einzelnen Funktionen gebildet und dann einfach eingesetzt, ohne die Regel zu beachten. So ist sowohl der Koeffizient vorne als auch der Eintrag in der Klammer falsch.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(10) Aufgabe: Tageslängen in Hamburg [119]

a)



b) Im Bogenmaß gilt bei einer Sinus-Funktion:

$a = \frac{y_{max}-y_{min}}{2} = \frac{17{,}03-7{,}5}{2} = 4{,}765$

$b = \frac{2\pi}{360} = \frac{\pi}{180}$

$c = -x_{max} + \frac{p}{4} = -165 + \frac{360}{4} = -75$

$d = \frac{y_{max}+y_{min}}{2} = \frac{17{,}03+7{,}5}{2} = 12{,}265$

$f(t) = 4{,}765 \cdot sin\left(\frac{\pi}{180} \cdot (t-75)\right)$

$+12{,}265$

Bei einer Cosinus-Funktion ergibt sich lediglich ein anderes c:

$c = -x_{max} = -165$

c) a gibt die Amplitude an. Verdoppelt man die Amplitude, so ist dies die Differenz zwischen der Tageslänge am kürzesten und am längsten Tag.

b nimmt Einfluss auf die Periodenlänge und bedeutet, dass sich dieser Tageslängen-Zyklus alle 360 Tage wiederholt.

d gibt die mittlere (durchschnittliche) Tageslänge an.

d) Zu lösen ist:

$f(t) = 8$

Es ergibt sich:

$t_1 = 11{,}48 + 360k$ und $t_2 = 318{,}52 + 360k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Das bedeutet, dass die Tageslänge zwischen $t_1 = 11{,}48$ und $t_2 = 318{,}52$ über 8 Stunden beträgt. Also beträgt die Tageslänge an etwa 307 Tagen mehr als 8 Stunden.

e) Die Wendestelle ist zu berechnen:

Notwendige Bedingung: $f''(t_W) = 0$

Es ergibt sich: $t_W = 180k + 75$

Hinreichende Bedingung $f'''(t_W) \neq 0$

$f'''(75) \neq 0$ ist auch erfüllt

Am 75. Tag ist der Mensch also besonders belastet. Da sich bei der unveränderten Sinus-Funktion die gesuchte Wendestelle bei $t = 0$ befindet und die vorliegende Funktion um 75 Einheiten nach rechts verschoben wurde, ist damit auch die Wendestelle um 75 Einheiten nach rechts verschoben.

f) $\frac{1}{90} \cdot \int_{150}^{240} f(t)\,dt = 15{,}98$

Das bedeutet, dass die durchschnittliche Tageslänge im Sommer bei 15,98 Stunden liegt.

(11) Übungsaufgabe: Berechnen von Integralwerten von trigonometrischen Funktionen [120]

a) $\int_{-1}^{3} 4 \cdot sin\big(2 \cdot (x+3)\big)\,dx$

$= [-2 \cdot cos(2x+6)]_{-1}^{3} = -2{,}99$

b) $\int_{2}^{4} 9 \cdot cos\big(3 \cdot (x-7)\big)\,dx$

$= [3 \cdot sin(3x-21)]_{2}^{4} = 0{,}71$

c) $\int_{0}^{\pi} -10 \cdot sin(5x) + 2\,dx$

$= [2 \cdot cos(5x) + 2x]_{0}^{\pi} = 2{,}28$

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

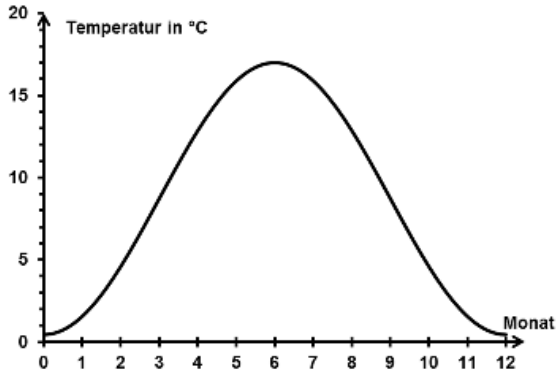
Ein paar Sinus-Funktionen feiern eine Party. Kommt eine Cosinus-Funktion vorbei und will mitfeiern. Die Sinus-Funktionen beraten sich und sagen dann: „Aber nur wenn du dich integrierst.“

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(12) Aufgabe: Klima in Hamburg [120]

a)



b) Im Bogenmaß gilt für eine Sinus-Funktion:

$a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2} = \frac{17-0{,}45}{2} = 8{,}275$

$b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$

$c = -x_{max} + \frac{p}{4} = -6 + \frac{12}{4} = -3$

$d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2} = \frac{17+0{,}45}{2} = 8{,}725$

$f(t) = 8{,}275 \cdot sin\left(\frac{\pi}{6} \cdot (t-3)\right) + 8{,}725$

Bei einer Cosinus-Funktion ergibt sich lediglich ein anderes c:

$c = -x_{max} = -6$

Da sich der Verlauf der Durchschnittstemperaturen im Jahresrhythmus wiederholt, ist eine trigonometrische Funktion zur Modellierung geeignet. Da der Temperaturverlauf mit einem Minimum beginnt, wählen wir eine Sinus-Funktion.

c) Zu lösen ist:

$f(t) = 15$

Es ergibt sich: $t_1 = 7{,}36 + 12k$ und $t_2 = 4{,}64 + 12k$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Für $k = 0$ ergeben sich die relevanten Werte:

$t_1 = 4{,}64$ und $t_2 = 7{,}36$

Somit liegt der Zeitraum mit mehr als 15℃ zwischen Mitte Mai und Mitte August.

d) $\frac{1}{12} \cdot \int_0^{12} f(t)dt = 8{,}725.$

Die Jahresdurchschnittstemperatur beträgt folglich 8,7℃. Dieser Wert lässt sich auch am Parameter d direkt ablesen.

e) Das Modell beschreibt die gegebenen Wertepaare um das Minimum $(t = 0)$ und das Maximum $(t = 6)$ herum sehr gut, die Werte dazwischen immer noch ausreichend exakt.

Da es sich bei den Werten um Durchschnittswerte aus der Vergangenheit handelt, ist davon auszugehen, dass diese auch für die Zukunft gelten - solange sich das Klima nicht verändert! Das Modell beachtet zwar die Schwankungen innerhalb eines Jahres, jedoch bleiben jegliche Veränderungen über mehrere Jahre hinweg unbeachtet.

Lösung: Exponentialfunktionen

(1) Aufgabe zum Einstieg [122]

In dem Bild sieht man verschiedene Beispiele für Zerfalls- und Wachstumsprozesse: Ein kleines Bäumchen, welches zu einem Mammutbaum heranwächst; eine Bakterienkolonie, die sich in einer Petrischale vermehrt; radioaktiv zerfallende Atomkerne. Außerdem gibt es einen gelben und einen lila gepunkteten Graphen, die ein andauerndes Wachstum bzw. ein Wachstum, welches sich einer Grenze nähert, zeigen. Auf diesem Graph stehen Menschen(-symbole), die mit steigendem Graphen immer größer („mehr“) werden.

Mögliche Fragen: Wann erreicht ein Mammutbaum eine bestimmte Höhe? Wie schnell wächst er nach 50 und nach 250 Jahren? Wann sind die Atome auf 10% ihrer Anfangsmenge zerfallen? Wann hat sich die Anzahl der Bakterien auf ein gefährliches Maß erhöht?

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches „**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“ (von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Ausbreitung von Ebola [123]

a) Nach 1 Woche: $3000 \cdot 1{,}2 = 3600$

Nach 2 Wochen: $3600 \cdot 1{,}2 = 4320$

Nach 3 Wochen: $4320 \cdot 1{,}2 = 5184$

Nach 4 Wochen: $5180 \cdot 1{,}2 = 6220{,}8$

Nach 5 Wochen: $6220{,}8 \cdot 1{,}2 = 7464{,}96$

Nach 6 Wochen: $7464{,}96 \cdot 1{,}2 = 8957{,}95$

Nach 10 Wochen: $18575{,}21$

b) Nach 81 Wochen würde bei gleichbleibendem Wachstum eine Anzahl von ca. 8 Milliarden Menschen erreicht werden.

c) Was nicht beachtet wurde: regionale Begrenzung, Heilungen, Medikamente, Immunität…

(3) Aufgabe: Graphen zuordnen [124]

a) 1. Graph $(a(x))$: $g(x)$

2. Graph $(b(x))$: $f(x)$

3. Graph $(c(x))$: $e(x)$

4. Graph $(d(x))$: $h(x)$

b) Hilfreiche Formulierungen:

…der Graph schneidet die y-Achse bei y=…

…der Graph hat seinen y-Achsen-Abschnitt bei y=…

…der Graph steigt…

…ist eine Wachstumsfunktion…

…der Graph ist streng monoton steigend…

…die Steigung nimmt zu…

…wird steiler…

…der Graph fällt…

…ist eine Zerfallsfunktion…

…der Graph ist streng monoton fallend…

…das Gefälle nimmt ab…

…wird flacher…

…der Graph nähert sich der x-Achse ohne diese jemals zu erreichen…

…der Graph nähert sich asymptotisch der x-Achse…

…die x-Achse ist eine Asymptote des Graphen…

…der Graph hat keine Nullstelle…

Wenn b größer als…ist, dann …

Je größer b ist, desto…

Liegt b zwischen… und…, dann…

Lösungsvorschlag:

b beeinflusst die Steigung des Graphen. Ist b größer als 1, so handelt es sich um einen Wachstumsprozess. Je größer b ist, desto steiler ist der Graph der Funktion. Liegt b zwischen 0 und 1, so handelt es sich um einen Zerfallsprozess. Je näher b an der 0 liegt, desto flacher verläuft der Graph der Funktion. Alle Funktionen schneiden die y-Achse bei $y = 2$ und nähern sich asymptotisch der x-Achse. Der Parameter b hat somit keinen Einfluss auf den Schnittpunkt mit der y-Achse.

(4) Übungsaufgabe: Parameter aus dem Kontext bestimmen [125]

a) Der Anfangsbestand beträgt $a = 150$. Da die Bakterien sich pro Stunde verdoppeln beträgt $b = 2$.

→ $f(t) = 150 \cdot 2^t$

$f(3) = 1200$ [Bakterien];

Nach drei Stunden befinden sich 1200 Bakterien in der Petrischale.

$f(4{,}5) = 3394{,}11$ [Bakterien]

Nach viereinhalb Stunden befinden sich ca. 3395 Bakterien in der Petrischale.

b) Der eingezahlte Betrag ist der Anfangsbestand, also $a = 1000$. Der Wachstumsfaktor lässt sich mithilfe des Prozentsatzes von 3% berechnen zu $b = 1 + \frac{3}{100} = 1{,}03$

→ $f(t) = 1000 \cdot 1{,}03^t$

$f(18) = 1702{,}43$ [€]

Nach 18 Jahren beträgt das Guthaben 1702,43 €.

c) Der Anfangsbestand beträgt $a = 3$. Da sich der Stoff halbiert, gilt $b = 0{,}5$ wenn t in 87,5 Tagen angegeben wird.

→ $f(t) = 3 \cdot 0{,}5^t$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Für 365 Tage ist $x = \frac{365}{87{,}5} = 4{,}17$

$f(4{,}17) = 0{,}17$ [g]

Nach einem Jahr sind noch 0,17 g des Stoffs vorhanden.

(5) Aufgabe: Entwicklung der Weltbevölkerung [125]

a) $213{,}4 \cdot b = 218{,}5$

Es ergibt sich $b = 218{,}5 : 213{,}4 = 1{,}024$

$213{,}4 \cdot 1{,}024^9 = 264{,}18$

b) Mit t in Jahren:

$120{,}3 \cdot b^2 = 126{,}5$

Es ergibt sich

$b = \sqrt{126{,}5 : 120{,}3} = \sqrt{1{,}0515} = 1{,}0254$

$120{,}3 \cdot 1{,}0254^9 = 150{,}77$

Alternative: Mit t in 2 Jahres-Schritten:

$b = 126{,}5 : 120{,}3 = 1{,}0515$

$120{,}3 \cdot 1{,}0515^{4{,}5} = 150{,}8$

c) Mit t in Jahren:

$50 \cdot b^4 = 54$

Es ergibt sich

$b = \sqrt[4]{54 : 50} = \sqrt[4]{1{,}08} = 1{,}0194$

$50 \cdot 1{,}0194^{12} = 62{,}97$

Alternative: Mit t in 4 Jahres-Schritten:

$b = 54 : 50 = 1{,}08$

$50 \cdot 1{,}08^3 = 62{,}98$

(6) Aufgabe: Abbau eines Lokalanästhetikums [127]

a) Ansatz: $f(t) = a \cdot b^t$

Bedingungen: $f(0) = 80$ und $f(0{,}5) = 70$

Die Lösung des zugehörigen Gleichungssystems ergibt:

$f(t) = 80 \cdot 0{,}765625^t$

b) Ansatz: Löse $f(t) = 40$ nach t. Es ergibt sich $t = 2{,}59544$

Nach 2 Stunden knapp 36 Minuten kehrt das Empfindungsvermögen wieder zurück.

(7) Übungsaufgabe: exponentielle Gleichungen lösen [127]

a) $x = 4$

b) $x = 10$

c) $x = 3$

d) $x = log_4(22) = 2{,}2297$

e) $x = log_2(5) = 2{,}3219$

f) $x = log_{11}(51) = 1{,}6397$

(8) Übungsaufgabe: Falten bis zum Mond [128]

Ansatz: $f(x) = 0{,}1 \cdot 2^x$, dabei entspricht der Parameter $a = 0{,}1$ der Papierdicke von einem Blatt Papier in mm und $b = 2$ stellt mathematisch das Knicken und die damit verbundene Verdopplung der Papierdicke dar.

Löse nun $f(x) = 384.400.000.000$ nach x:

$x = \log_2\left(\frac{384.400.000.000}{0.1}\right) = 41{,}8$

Nach 42 Faltungen ist die Papierdicke größer als die Entfernung von Mond und Erde.

(9) Übungsaufgabe: Anwendung der Logarithmusgesetze [128]

a) $log_a\left(\frac{c \cdot d}{e}\right) = log_a(c) + log_a(d) - log_a(e)$

b) $log_a(f^3 \cdot g^5) = 3 \cdot log_a(f) + 5 \cdot log_a(g)$

c) $log_a\left(\sqrt{\frac{a}{h}}\right) = log_a\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}}{h}\right) = \frac{1}{2} \cdot (1 - log_a(h))$

(10) Aufgabe: Wie alt ist der Ötzi? [129]

a) Ansatz: $f(t) = a \cdot b^t$

Aus dem Text folgt: $a = 1{,}2 \cdot 10^{-12}$

Darüber hinaus gilt: $f(5730) = 0{,}6 \cdot 10^{-12}$

$0{,}6 \cdot 10^{-12} = 1{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot b^{5730}$

Es ergibt sich: $b = 0{,}9998790392$

$f(t) = 1{,}2 \cdot 10^{-12} \cdot 0{,}999879^t$

b) Löse $f(t) = 6{,}9239 \cdot 10^{-13}$

$t = \log_{0{,}999879}\left(\frac{6{,}9239 * 10^{-13}}{1{,}2 * 10^{-12}}\right) \approx 4544$

Der Ötzi ist somit im Jahr 1991 bereits vor 4544 Jahren gestorben. Er ist demnach im Jahr 2553 vor Christus gestorben.

c) $f(7020 + 2030) = 4{,}014008604 \cdot 10^{-13}$

Die Mumie müsste im Jahr 2030 eine ^{14}C-Konzentration von $4{,}014008604 \cdot 10^{-13}$ aufweisen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(11) Übungsaufg.: Basiswechsel [131]

a) $1{,}03 = e^{\ln(1{,}03)} = e^{0{,}0295588}$

$f(x) = 1000 \cdot e^{0{,}0295588 \cdot x}$

b) $0{,}5 = e^{\ln(o{,}5)} = e^{-0{,}6931}$

$f(x) = 3 \cdot e^{-0{,}6931 \cdot x}$

c) $1{,}028 = e^{\ln(1{,}028)} = e^{0{,}0276}$

$f(x) = 173{,}6 \cdot e^{0{,}0276 \cdot x}$

(12) Aufgabe: Atmosphärisches CO_2 auf Hawaii [132]

a) Berechne $f(1960) = 310{,}42$

$1 - \frac{310{,}42}{316{,}91} = 0{,}02048 = 2{,}048\%$

b) Löse die Gleichung $f(t) = 440$ nach t:

$$\begin{aligned} 0{,}064 \cdot e^{0{,}00433 \cdot t} &= 440 && |:0{,}064 \\ e^{0{,}00433 \cdot t} &= 6875 && |ln \\ 0{,}00433t &= 8{,}8357 && |:0{,}00433 \\ t &= 2040{,}57 \end{aligned}$$

Im Jahr 2040 wird der Wert erreicht.

c) $e^{0{,}00433} = 1{,}004339$

Die jährliche prozentuale Zunahme beträgt $0{,}4339\%$.

d) $f'(t) = 0{,}00433 \cdot 0{,}064 \cdot e^{0{,}00433 \cdot t}$ ist die erste Ableitung der Funktion. Diese beschreibt die Geschwindigkeit, mit der sich der CO_2-Gehalt im Verlauf der Zeit verändert (in der Einheit $\frac{\text{ppm}}{\text{Jahr}}$).

(13) Aufgabe: Ableitungen von e-Funktionen [132]

a) $f'(x) = 1{,}2 \cdot 3 \cdot e^{1{,}2x} = 3{,}6 \cdot e^{1{,}2x}$

b) $f'(x) = 2 \cdot (-5) \cdot e^{2x+3} = -10 \cdot e^{2x+3}$

c) $f'(x) = (-0{,}5) \cdot (-2) \cdot e^{-0{,}5x} = e^{-0{,}5x}$

d) $f'(x) = (2x) \cdot 2 \cdot e^{x^2} = 4x \cdot e^{x^2}$

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Es treffen sich zwei Funktionen.

Sagt die eine: "Geh gefälligst aus dem Weg oder ich leite Dich ab!"

Da meint die andere ganz gelassen: "Mach doch! Ich bin e^x."

(14) Übungsaufgabe: Ableiten mithilfe der Produktregel [133]

a) $f'(x) = 2x \cdot e^{-0{,}5x} + x^2 \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

b) $f'(x) = sin(x) \cdot e^{2x-3} - cos(x) \cdot 2 \cdot e^{2x-3}$

c) $f'(x) = cos(x) \cdot x^3 + sin(x) \cdot 3 \cdot x^2$

d) Hier wurden die beiden Funktionen abgeleitet und die Ableitungen wieder als Produkt hingeschrieben. So würde man es machen, wenn die beiden Funktionen addiert oder subtrahiert werden würden. Da es sich aber um eine Multiplikation handelt, muss die Produktregel angewendet werden.

(15) Aufgabe: Liegezeitbestimmung einer Leiche [133]

a) $f(0) = 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot 0} + 15{,}5$

$= 11{,}2 \cdot e^0 + 15{,}5 = 11{,}2 \cdot 1 + 15{,}5$

$= 11{,}2 + 15{,}5 = 26{,}7$

$f(2) = 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot 2} + 15{,}5 = 24{,}4$

b) Der Parameter c gibt in diesem Fall die Raumtemperatur an. Der Körper und somit auch die Leber können nicht kälter werden als ihre Umgebung.

c) Für eine Funktion $a \cdot e^{b \cdot t}$ gibt der Parameter a den Anfangsbestand zum Zeitpunkt $t = 0$ an. Durch den Summanden c wird die gesamte Funktion entlang der y -Achse nach oben verschoben, so dass sich ein neuer Anfangsbestand von $a + c$ ergibt.

d) Ansatz: Bestimmen Sie die Lösungen der Gleichungen $f(t) = 36{,}4$ und $f(t) = 37{,}3$.

Beispiel: $11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot x} + 15{,}5 = 36{,}4$

$$\begin{aligned} 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot x} &= 20{,}9 \\ e^{-0{,}1149 \cdot x} &= 1{,}87 \\ -0{,}1149 \cdot x &= 0{,}63 \\ x &= -5{,}44 \end{aligned}$$

Es ergibt sich: $t = -5{,}44$ und $t = -5{,}796$

Vor etwa 5 Stunden und 26 Minuten bis ca. 5 Stunden und 48 Minuten ist der Tod eingetreten.

e) Ansatz:

$f'(t) = -0{,}1149 \cdot 11{,}2 \cdot e^{-0{,}1149 \cdot t} = -0{,}1$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Es ergibt sich $t = 22{,}235$. Nach 22 Stunden und 14 Minuten ist die Bestimmung des Todeszeitpunkts nicht mehr zuverlässig.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Mathematiker sterben nicht; sie verlieren nur einige ihrer Funktionen.

(16) Übungsaufgabe: Grenzwert bestimmen [135]

a) $\lim\limits_{x\to\infty} 20 + e^{-0{,}5\cdot x} = 20$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2{,}71828\ldots = e$

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker/innen

Es gilt

$$\lim_{x\to 8} \frac{1}{8-x} = \infty$$

und daher auch

$$\lim_{x\to 3} \frac{1}{3-x} = \infty .$$

Genauso sinnvoll ist

$$\lim_{8\to 9} \sqrt{8} = 3$$

(17) Übungsaufgabe: Lebensmittelsicherheit [135]

a) $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = 20$

Der Grenzwert gibt hier die Raumtemperatur an, da die Temperatur des Essens sich der Raumtemperatur immer weiter annähert.

b) Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $f(t) = 65$.

$$\begin{aligned} 60\cdot e^{-0{,}002\cdot t} + 20 &= 65 && |-20 \\ 60\cdot e^{-0{,}002\cdot t} &= 45 && |:60 \\ e^{-0{,}002\cdot t} &= 0{,}75 && |ln \\ -0{,}002\cdot t &= ln\,(0{,}75) && |:(-0{,}002) \\ t &= 143{,}84 \end{aligned}$$

Es ergibt sich: $t = 143{,}84$ min.

Bei mehr als 2 Stunden und 23 Minuten ohne Wärmezufuhr wird es spätestens kritisch für die Speise.

(18) Übungsaufgaben: Anwendungen der e-Funktion in den Naturwissenschaften [136]

a) Ansatz: Bestimmen Sie die Lösung der Gleichung $I(s) = 0{,}05$ [%]. Es ergibt sich: $t = 15{,}2$.

b) Ansatz: $p(h) = a\cdot e^{k\cdot h}$

Bedingungen, die an die Funktion gestellt werden:

$p(0) = 1013$

$p(2962) = 693$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\left|\begin{matrix} a\cdot e^{k\cdot 0} = 1013 \\ a\cdot e^{k\cdot 693} = 693 \end{matrix}\right|$$

Es ergibt sich:

$p(h) = 1013\cdot e^{-0{,}000128\cdot h}$.

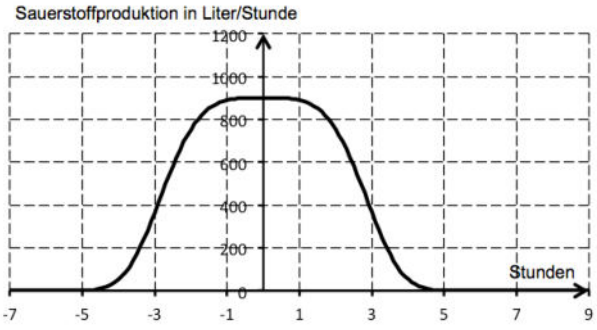
Berechnen Sie im Anschluss $p(8848)$.

Es ergibt sich: $p(8848) = 326{,}4$.

c) Wenn es sich um einen exponentiellen Zusammenhang handeln würde, der beispielsweise aus einer Verdopplung in 20 Minuten bestünde, dann müssten nach 40 Minuten die Bakterien erst vervierfacht sein und erst nach 60 Minuten dürfte die Anzahl verachtfacht sein.

(19) Aufgabe: Sauerstoffproduktion einer Kastanie [136]

a)



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) Zum Zeitpunkt $t = -5$ (dies entspricht 7 Uhr morgens) beginnt die Kastanie Sauerstoff zu produzieren. Im Zeitintervall $-1 \leq t \leq 1$ (zwischen 11 Uhr und 13 Uhr) ist die Sauerstoffproduktion nahezu konstant und liegt bei etwa 900 Litern pro Stunde $\left[\frac{\text{l}}{\text{h}}\right]$. Die maximale Sauerstoffproduktion wird dabei zum Zeitpunkt $t = 0$ (12 Uhr) erreicht. Danach nimmt die Sauerstoffproduktion wieder ab. Gegen $t = 5$ (17 Uhr) wird kaum noch Sauerstoff produziert.

c) Die Funktion ist aufgrund des Exponenten $\frac{-t^4}{90}$ achsensymmetrisch, denn dort wird die Variable t mit einer geraden Zahl (4) potenziert. Sind alle Exponenten einer Funktion gerade, so handelt es sich um eine achsensymmetrische Funktion.

d) $\int_{-7}^{9,5} s(t)\,dt = 5025{,}21$

Am Tag werden also 5025,21 l Sauerstoff produziert.

Das bedeutet, dass pro Stunde durchschnittlich

$\frac{1}{16{,}5} \cdot \int_{-7}^{9,5} s(t)\,dt = \frac{1}{16{,}5} \cdot 5025{,}21 = 304{,}56$ l produziert werden.

e) Gesucht ist der Wendepunkt.

Notwendige Bedingung: $s''(t) = 0$.

Es ergibt sich $t_1 = 0$, $t_2 = -2{,}866$ und $t_3 = 2{,}866$.

Hinreichende Bedingung: $s'''(t) \neq 0$.

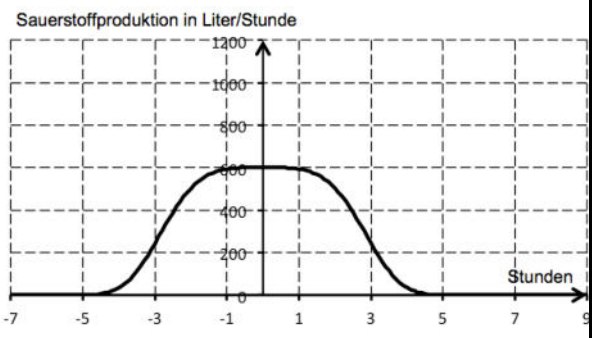
$s'''(0) = 0 \implies$ nicht eindeutig

$s'''(-2{,}866) = -649{,}83 \implies$ Wendepunkt

$s'''(2{,}866) = 649{,}83 \implies$ Wendepunkt

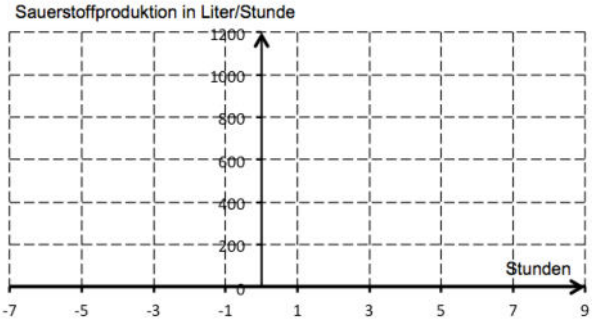
Die Zunahme ist um 9:08 Uhr maximal.

f) <u>Herbsttag:</u>



Ein Laubbaum verliert im Herbst seine Blätter. Da für die Sauerstoffproduktion die Blattoberfläche eines Baumes entscheidend ist, produziert ein Baum, der weniger Blätter hat, weniger Sauerstoff.

<u>Wintertag:</u>



Ein Laubbaum trägt in der Regel im Winter keine Blätter mehr und trägt aus diesem Grund nicht zur Sauerstoffproduktion bei.

(20) Aufgabe: Baumwachstum einer Rotbuche [137]

a) Der Parameter a hat Einfluss auf den y-Achsenabschnitt. Ist a beispielsweise 5, so ist der y-Achsenschnitt 35. Ist a beispielsweise 30, so ist der y-Achsenabschnitt 10.

b) Ansatz: $40 - a \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0} = 15$

Es ergibt sich $a = 25$.

c) $\lim\limits_{t \to \infty} h(t) = 40$. Die Rotbuche wird also maximal 40 m hoch.

d) $h_{frei}(t) = 30 - a \cdot e^{-0{,}03t}$

e) Ansatz: $30 - a \cdot e^{-0{,}03 \cdot 0} = 17$

Es ergibt sich $a = 13$.

f) Der Parameter k beeinflusst, wie schnell der Baum in die Höhe wächst. Ist k nahe 0, so steigt der Graph sehr schnell an und nähert sich bereits für kleine Werte von t dem Grenzwert an.

(21) Aufgabe: Die Entwicklung der weltweiten Ölförderung [138]

a) Zu Beginn (1900) wurde sehr wenig Öl gefördert. Dann wurde begonnen, langsam mehr und mehr Öl zu fördern. Um 2000 war der Hochpunkt der Ölförderung. Danach gab es immer weniger Ressourcen und es wurde immer

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

weniger Öl zusätzlich gefördert bis sich der Graph scheinbar einer insgesamt geförderten Ölmenge von ca. 660 Gb annähert.

b) Wie bereits in a) beschrieben, scheint der Graph sich einem Wert von etwa 660 Gb anzunähern. In dem Funktionsterm lässt sich ein genauerer Wert ablesen. Strebt die Zeit t gegen unendlich, so strebt der Term $3000 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}$ gegen 0, da es sich hier um eine Zerfallsfunktion handelt.
Somit strebt der Term gegen $\frac{657}{1+0} = 657$ für t gegen 0. Folgende mathematische Dokumentation für die Grenzwert-Argumentation ist denkbar:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{657}{1+3000 \cdot e^{-0{,}08t}}$$
$$= \frac{657}{1+\lim\limits_{t\to\infty} 3000 \cdot e^{-0{,}08t}} = \frac{657}{1+0} = 657$$

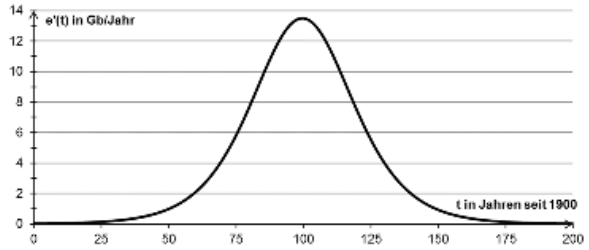
c) $e(80) = 109{,}78\ \text{Gb}$

d) Von 1990 bis 2000:
$e(100) - e(90) = 124{,}66\ \text{Gb} \approx 125\ \text{Gb}$
Von 2000 bis 2010:
$e(110) - e(100) = 124{,}96\ \text{Gb} \approx 125\ \text{Gb}$
In beiden Zeiträumen wurde ca. die gleiche Menge Öl gefördert. Dies liegt daran, dass der Wendepunkt ca. beim Jahr 2000 liegt (also die maximale jährliche Fördermenge) und somit in den zehn Jahren zuvor die jährliche Fördermenge noch steigt und in den zehn Jahren danach wird jährlich dann immer weniger gefördert. Es handelt sich dementsprechend um eine Symmetrie zu dem Jahr 2000.

e) Dieser Zeitpunkt liegt ca. beim Jahr 2000, da dort der Wendepunkt der Funktion ist.

f) Notwendige Bedingung: $e''(t) = 0$ gilt für $t = 100{,}08$.
Hinreichende Bedingung:
$e'''(100{,}08) = -0{,}01 \neq 0$
Somit befindet sich der Wendepunkt und damit das globale Ölfördermaximum zu Beginn des Jahres 2000.

g) Graph:



h) $e'(100{,}08) = 13{,}14$; Das bedeutet, dass laut Modell im Jahr 2000,08 im Jahr 13,14 Gb gefördert wurden.

(22) Übungsaufgabe: Ausbreitung eines Computervirus [140]

a) Die Ausbreitung lässt sich sinnvoll mit einer logistischen Funktion modellieren, da zu Beginn noch nicht viele Computer befallen sind. Dann nimmt der Befall exponentiell zu: Je mehr befallen sind, umso rasanter verbreitet sich das Virus. Irgendwann sind jedoch mehr als die Hälfte der weltweiten Computer befallen und es werden nicht mehr so viele neu befallen bis sich die Anzahl der befallenen Computer langsam der gesamten Anzahl an Computern annähert.

b) $c_{10}(t) = \frac{1\,000\,000\,000}{1+a \cdot e^{-k \cdot t}}$ mit den zwei Bedingungen
$c_{10}(0) = 2000$ und $c_{10}(10) = 900\,000\,000$ ergibt sich $a = 499999$ und $k = 1{,}53$, also $c_{10}(t) = \frac{1\,000\,000\,000}{1+499999 \cdot e^{-1{,}53 \cdot t}}$.
$c_{45}(t) = \frac{1\,000\,000\,000}{1+a \cdot e^{-k \cdot t}}$ mit den zwei Bedingungen
$c_{45}(0) = 2000$ und $c_{45}(45) = 900\,000\,000$ ergibt sich $a = 499999$ und $k = 0{,}34$, also $c_{10}(t) = \frac{1\,000\,000\,000}{1+499999 \cdot e^{-0{,}34 \cdot t}}$.

c) Für die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit, muss zunächst der Wendepunkt und dann die Steigung im Wendepunkt berechnet werden.
Für $c_{10}(t)$:
Notwendige Bedingung: $c_{10}''(t) = 0$ ergibt $t = 8{,}58$
Hinreichende Bedingung:
$c_{10}'''(8{,}58) = -447685759{,}09 \neq 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Also liegt ein Wendepunkt bei $t = 8{,}58$ mit einer Steigung bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit von

$c'_{10}(8{,}58) = 382\,497\,572{,}31.$

Für $c_{45}(t)$:

Notwendige Bedingung:

$c''_{45}(t) = 0$ ergibt $t = 38{,}6$

Hinreichende Bedingung:

$c'''_{45}(38{,}6) = 1452{,}99 \neq 0$

Also liegt ein Wendepunkt bei $t = 38{,}6$ mit der Steigung bzw. Ausbreitungsgeschwindigkeit $c'_{45}(38{,}6) = 84\,999\,942{,}94$.

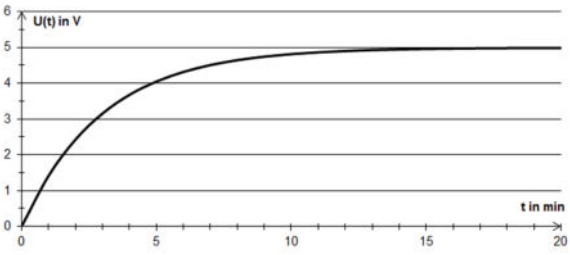
Im ersten Szenario beträgt die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit

$c'_{10}(8{,}58) = 382\,497\,572{,}31$

Das bedeutet, dass täglich ca. 382 497 572 Computer neu infiziert werden. Im zweiten Szenario ist die maximale Ausbreitungsgeschwindigkeit mit 84 999 943 Computern täglich wesentlich geringer.

(23) Übungsaufgabe: Weitere Anwendungen in den Naturwissenschaften [140]

a) Die Ladekurve des Kondensators sieht wie folgt aus:



Mathematisch betrachtet erreicht die Funktion $U(t)$ erst nach unendlich langer Zeit den Wert $5\ \mathrm{V}$. Wenn man für t den Wert $5 \cdot \tau$ einsetzt, sieht man, dass der Kondensator schon zu $99{,}3\ \%$ geladen ist (und zwar unabhängig vom Wert für τ):

$$U(5 \cdot \tau) = 5\ \mathrm{V} \cdot \left(1 - e^{-\frac{5 \cdot \tau}{\tau}}\right)$$
$$= 5\ \mathrm{V} \cdot (1 - e^{-5}) = 5\ \mathrm{V} \cdot 0{,}993$$
$$= 5\ \mathrm{V} \cdot 99{,}3\%$$

In der realen Anwendung ist der Kondensator in endlicher Zeit "vollständig geladen".

b) Die angegebene Formel ergibt sich folgendermaßen:

$$N_K(t) = N_K(0) \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$
$$\Rightarrow N_K(0) = \frac{N_K(t)}{e^{-\lambda \cdot t}} = N_K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t}$$
$$N_{Ar}(t) = 0{,}107 \cdot \left(N_K(0) - N_K(t)\right)$$
$$\Rightarrow N_{Ar}(t) = 0{,}107 \cdot \left(N_K(t) \cdot e^{\lambda \cdot t} - N_K(t)\right)$$
$$\Rightarrow N_{Ar}(t) = 0{,}107 \cdot N_K(t) \cdot \left(e^{\lambda \cdot t} - 1\right)$$
$$\Rightarrow \frac{N_{Ar}(t)}{0{,}107 \cdot N_K(t)} = e^{\lambda \cdot t} - 1$$
$$\Rightarrow \frac{N_{Ar}(t)}{0{,}107 \cdot N_K(t)} + 1 = e^{\lambda \cdot t}$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{N_{Ar}(t)}{0{,}107 \cdot N_K(t)} + 1\right) = \lambda \cdot t$$
$$\Rightarrow t = \frac{1}{\lambda} \cdot ln\left(\frac{N_{Ar}(t)}{0{,}107 \cdot N_K(t)} + 1\right)$$

Das Alter des Mondgesteins ist damit:

$$t = \frac{1}{5{,}428 \cdot 10^{-10}} \cdot ln\left(\frac{4{,}076 \cdot 10^{-6}}{0{,}107 \cdot 4{,}2 \cdot 10^{-6}} + 1\right) = 4{,}35 \cdot 10^9 a$$

(24) Aufgabe: Entwicklung einer Feldmauspopulation [141]

a) Die Feldmäuse bekommen nur alle drei Jahre Nachwuchs, weswegen in der Phase ohne Nachwuchs die Population so lange sinkt bis wieder eine Phase mit Nachwuchs beginnt und die Populationsanzahl wieder steigt. Durch das Industriegebiet sinkt jedoch die Populationsanzahl insgesamt immer weiter ab, das bedeutet, dass die maximale Populationsanzahl nach drei Jahren nicht wieder erreicht wird, sondern geringer wird. Es gibt demnach langfristig immer weniger Feldmäuse.

b) Durchschnittliche Anzahl erster drei-Jahres-Zyklus:

$\frac{1}{3} \cdot \int_0^3 f(t)dt = 1134{,}17$

Durchschnittliche Anzahl zweiter drei-Jahres-Zyklus:

$\frac{1}{3} \cdot \int_3^6 f(t)dt = 1015{,}18$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Innerhalb des zweiten drei-Jahres-Zyklus beträgt die durchschnittliche Anzahl der Feldmäuse bereits ca. 119 weniger als im ersten drei-Jahres-Zyklus.

Die dreijährliche Zerfallsrate beträgt damit $\frac{118{,}99}{1134{,}17} = 0{,}1 = 10\%$.

c) Gesucht ist der erste Wendepunkt der Funktion. Bei allen weiteren Wendepunkten ist die Abnahme der Anzahl der Feldmauspopulation nicht mehr so groß, weil es weniger Feldmäuse insgesamt gibt.

Notwendige Bedingung:

$f''(t) = 0$ ergibt $t_1 = 0{,}75 + 3 \cdot k_1$ und $t_2 = 2{,}25 + 3 \cdot k_2$ mit $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$, in unserem Fall ist nur $t = 0{,}75$ relevant.

Hinreichende Bedingung:

$f'''(0{,}75) = 2756 \neq 0$, also Wendestelle bei $t = 0{,}75$.

d) Grafisch ist ersichtlich, dass nach dem Maximum bei $(15|1017)$ der Wert von 1000 Feldmäusen an keinem Maximum mehr erreicht wird. Nach ca. 15 Jahren sollten also Gegenmaßnahmen ergriffen werden.

e) Bestimmen der Populationsanzahl zum Zeitpunkt $t = 16{,}5$ im alten Modell: $f(16{,}5) = 386{,}04$

Somit lautet die erste Bedingung für Sprungfreiheit:

$m(16{,}5) = 386{,}04$

Die zweite Bedingung ergibt sich folgendermaßen:

Wenn die Populationsanzahl in deinem drei-Jahres-Zyklus um 10 % steigen soll, müssen zu dem Zeitpunkt $t = 19{,}5$ insgesamt $1{,}1 \cdot 386{,}04 = 424{,}65$ Feldmäuse vorhanden sein.

Damit ergibt sich die zweite Gleichung $m(19{,}5) = 424{,}65$.

Das folgende Gleichungssystem wird gelöst

$$\left| \begin{array}{l} 300 \cdot cos\left(\frac{2}{3}\pi \cdot 16{,}5\right) + 900 \cdot e^{k \cdot 16{,}5} + d = 386{,}04 \\ 300 \cdot cos\left(\frac{2}{3}\pi \cdot 19{,}5\right) + 900 \cdot e^{k \cdot 19{,}5} + d = 424{,}65 \end{array} \right|$$

Damit ergibt sich $k = 0{,}01160388$ und $d = -403{,}88$.

Lösung: Gebrochenrationale Funktionen

(1) Aufgabe: Fährbetrieb auf der Elbe [143]

a) Von den Landungsbrücken zum Fischmarkt:

$v_{flussabwärts} = v_E + v_S = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$= 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$1200\text{ m} : 4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 285{,}7\text{ s}$

Vom Fischmarkt zu den Landungsbrücken:

$v_{flussaufwärts} = v_E - v_S = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}} - 1{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$= 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

$1200m : 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \approx 666{,}7\text{ s}$

b) $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{2400\text{ m}}{285{,}7\text{ s} + 666{,}7\text{ s}} = \frac{2400\text{ m}}{952{,}4\text{ s}} \approx 2{,}52\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

c) $\bar{v} = \frac{4{,}2\,\frac{\text{m}}{\text{s}} + 1{,}8\,\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2} = 3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Bei diesem Lösungsvorschlag wird nicht berücksichtigt, dass die Fahrtzeit für die vorgegebene Strecke von 1200 m unterschiedlich lange dauert.

d) $\bar{v}(3) = \frac{3^2 - 1{,}2^2}{3} = 2{,}52\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

e) $\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{3000m}{16 \cdot 60s} = 3{,}125\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

$3{,}125 = \frac{v_E^2 - 1{,}2^2}{v_E}$

$v_E = -0{,}41\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ und $v_E = 3{,}53\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Die erste Lösung entfällt, da die neue Fähre dann rückwärtsfahren würde.

f) $\bar{v}(v_E) = 0$

$v_E = -1{,}2\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$ und $v_E = 1{,}2\,\left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$

Die erste Lösung entfällt, da die Fähre dann rückwärtsfahren würde.

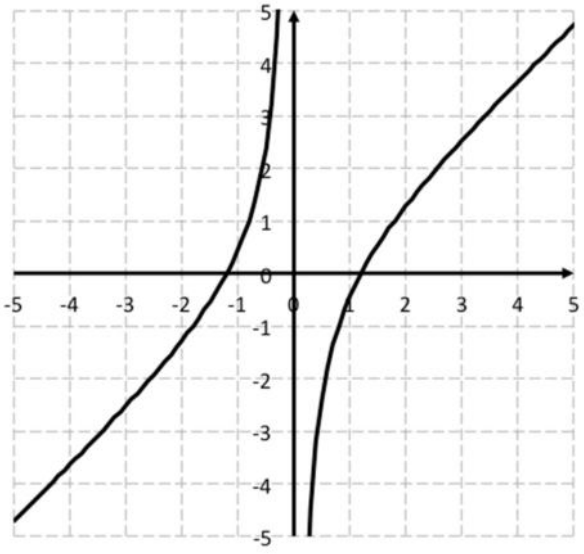
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hat eine Fähre eine Eigengeschwindigkeit von $1{,}2\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$, so ist es der Fähre nicht möglich flussaufwärts zu fahren, da die Eigengeschwindigkeit und die Strömungsgeschwindigkeit übereinstimmen.

g) $\bar{v}(0)$ kann nicht berechnet werden, da die Division durch 0 nicht definiert ist.

h)



Hilfreiche Formulierungen:

…der Graph setzt sich aus zwei Kurven zusammen…

…beide Kurven verlaufen asymptotisch zur y-Achse…

…beide Teile des Graphen sind streng monoton steigend…

…hat keine Extremstellen oder Wendestellen…

…der Graph ist nicht periodisch…

…hat eine Definitionslücke…

Lösungsvorschlag:

Der Funktionsgraph setzt sich aus zwei Teilen zusammen. Beide nähern sich der y-Achse asymptotisch an.

Im Gegensatz zu trigonometrischen Funktionen ist diese Funktion nicht periodisch.

Im Gegensatz zu allen bisher bekannten Funktionen hat diese Funktion eine Definitionslücke, also einen x-Wert, zu dem kein Funktionswert berechnet werden kann.

i) Es gilt für die Geschwindigkeiten:

Hinfahrt: $v_{flussabwärts} = v_E + v_S = \frac{s}{t_1}$

Rückfahrt: $v_{flussaufwärts} = v_E - v_S = \frac{s}{t_2}$

Folglich gilt auch:

$t_1 = \frac{s}{v_E+v_S}$ bzw. $t_2 = \frac{s}{v_E-v_S}$

Darüber hinaus ist bekannt:

$$\bar{v} = \frac{s_{gesamt}}{t_{gesamt}} = \frac{2\cdot s}{t_1+t_2}$$

Für t_{gesamt} folgt:

$$t_{gesamt} = t_1 + t_2$$
$$= \frac{s}{v_E+v_S} + \frac{s}{v_E-v_S}$$
$$= \frac{s\cdot(v_E-v_S)}{(v_E+v_S)\cdot(v_E-v_S)} + \frac{s\cdot(v_E+v_S)}{(v_E-v_S)\cdot(v_E+v_S)}$$
$$= \frac{s\cdot(v_E-v_S)}{v_E^2-v_S^2} + \frac{s\cdot(v_E+v_S)}{v_E^2-v_S^2}$$
$$= \frac{s\cdot(v_E-v_S)+s\cdot(v_E+v_S)}{v_E^2-v_S^2}$$
$$= \frac{s\cdot v_E - s\cdot v_S + s\cdot v_E + s\cdot v_S}{v_E^2-v_S^2}$$
$$= \frac{2\cdot s\cdot v_E}{v_E^2-v_S^2}$$

Für die Durchschnittsgeschwindigkeit folgt also:

$$\bar{v} = \frac{s_{gesamt}}{t_{gesamt}} = \frac{2\cdot s}{t_1+t_2} = \frac{2\cdot s}{\left(\frac{2\cdot s\cdot v_E}{v_E^2-v_S^2}\right)}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{v_E}{v_E^2-v_S^2}\right)} = \frac{v_E^2-v_S^2}{v_E}$$

(2) Aufgabe: Strahlungsleistung der Sonne [145]

a) Einsetzen:

$r = 149\,600\,000\ \text{km}$

$= 149\,600\,000\,000\ \text{m}$

$S(r) = 1367{,}17\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$

Somit beträgt die Strahlungsleistung auf der Erde $1367{,}17\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2}$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) Lösen der Gleichung:

$$S(r) = 500$$

$$\frac{3{,}845 \cdot 10^{26}}{4 \cdot \pi \cdot r^2} = 500 \quad |\cdot r^2$$

$$\frac{3{,}845 \cdot 10^{26}}{4 \cdot \pi} = 500 \cdot r^2 \quad |: 500$$

$$\frac{3{,}845 \cdot 10^{26}}{2000 \cdot \pi} = r^2 \quad |\sqrt{}$$

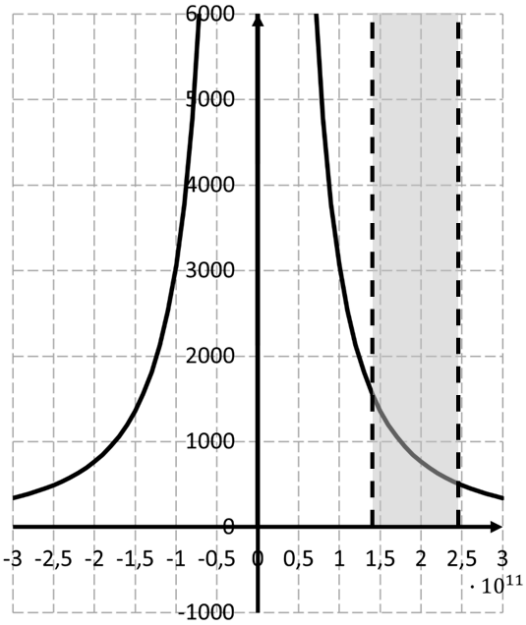
Es ergibt sich $r = -2{,}4738 \cdot 10^{11}$ und $r = 2{,}4738 \cdot 10^{11}$

Für $S(r) = 1500$ ergibt sich $r = -1{,}4282 \cdot 10^{11}$ und $r = 1{,}4282 \cdot 10^{11}$

Diese Ergebnisse bedeuten, dass der maximale Abstand $2{,}4738 \cdot 10^{11}$ m beträgt und der minimale Abstand $1{,}4282 \cdot 10^{11}$ m.

c) $D = \mathbb{R} \backslash \{0\}$

d)



(3) Übungsaufgabe: Definitionsbereich angeben [145]

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

(4) Übungsaufgabe: Polstellen und hebbare Definitionslücken [146]

a) $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 7\}$

Die Definitionslücke $x = 0$ ist hebbar, da $x = 0$ auch eine Nullstelle des Zählers ist.

$x = 7$ ist eine Polstelle.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{-4; 4\}$

Die Definitionslücken $x = -4$ und $x = 4$ sind Polstellen.

c) $D = \mathbb{R} \setminus \{42\}$

Die Definitionslücke bei $x = 42$ ist eine Polstelle.

d) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Die Definitionslücke $x = 0$ scheint hebbar zu sein, da sie auch eine Nullstelle des Zählers ist. Gekürzt ergibt sich $\frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3}$. Im gekürzten Term ist die Definitionslücke $x = 0$ jedoch eine Polstelle.

Tipp: Erst die Nullstellen des Nenners berechnen und die dann beim Zähler einsetzen

(5) Aufgabe: Schokoladenkugelproduktion [147]

a) Hier wird die insgesamt verfügbare Schokolade von 500 l = 500 000 cm^2 geteilt durch das Volumen einer Praline mit dem Radius $1 - x$, d.h. der ursprüngliche Radius von 1 wird um x verkleinert. Daraus ergibt sich dann die Anzahl der Pralinen, die hergestellt werden können.

b) $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, in diesem Kontext sinnvoll ist jedoch nur ein Definitionsbereich von circa $0{,}8 \geq x > 0$, da Pralinen mit einem Durchmesser von 0,4 cm bereits sehr klein sind und die Pralinen ja einen Durchmesser kleiner als 2 cm haben sollten.

c) Bei einem Pralinendurchmesser von 1,2 cm beträgt der Radius der Pralinen 0,6 cm und ist damit 0,4 cm kleiner als ursprünglich, also berechnet sich die Menge mit:

$p(0{,}4) = 552621{,}33$. Es lassen sich also ca. 552.621 Pralinen produzieren.

d) Dazu ist die folgende Gleichung zu lösen:

$p(x) = 1\,000\,000$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Es ergibt sich $x = 0{,}5076$, das heißt, der Radius der Pralinen muss um 0,51 cm verkleinert werden. Die Pralinen haben dann einen Radius von 0,49 cm und somit einen Durchmesser von 0,98 cm.

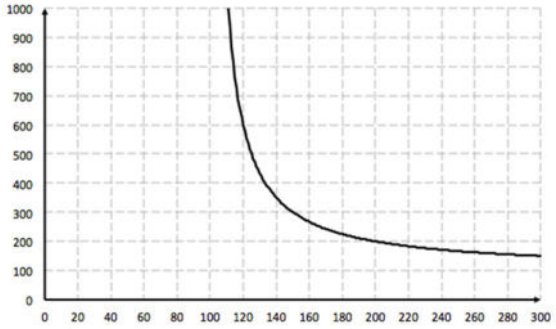
(6) Aufgabe: Bildweite einer Sammellinse [147]

a) Setze den Nenner gleich 0:

$g - f = g - 100 = 0 \rightarrow g = 100$

$D = \mathbb{R} \setminus \{100\}$

b)



c) Die Gegenstandsweite muss größer sein als die Brennweite der Linse. Nur dann ist eine Abbildung des Gegenstands möglich (siehe Abbildung).

Der Definitionsbereich kann entweder angegeben werden mit $g > 100$ oder in Intervallschreibweise $D = (100; \infty)$

d) $b(200) = \frac{200 \cdot 100}{200 - 100} = \frac{20000}{100} = 200$ [mm]

e) Ansatz: $b(g) = \frac{g \cdot 100}{g - 100} = 500$ [mm]

$$\frac{g \cdot 100}{g - 100} = 500 \qquad | \cdot (g - 100)$$

$$100g = 500 \cdot (g - 100)$$

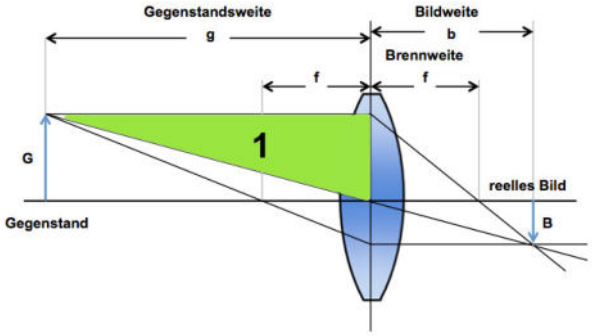
$$100g = 500g - 50000 \qquad | +50000$$

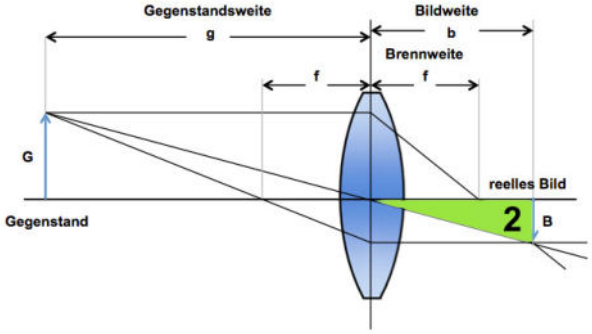
$$100g + 50000 = 500g \qquad | -100g$$

$$50000 = 400g \qquad | : 400$$

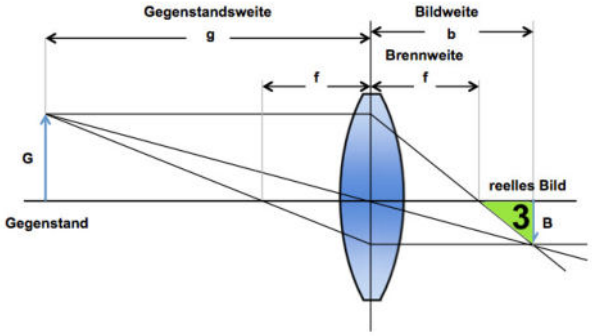
$\rightarrow g = 125$ [mm]

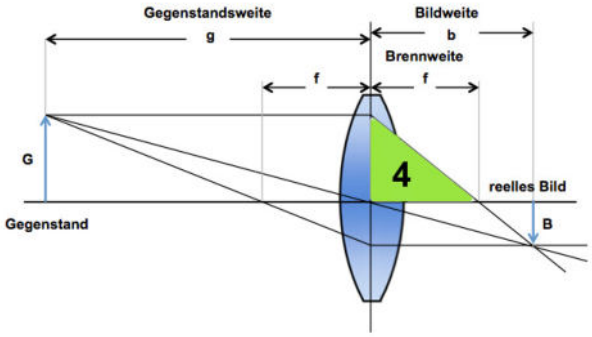
f) Für die Gleichung $\frac{B}{G} = \frac{b}{g}$ betrachte die folgenden Dreiecke:





Für die Gleichung $\frac{B}{G} = \frac{b-f}{f}$
betrachte die folgenden Dreiecke:





g)

$$\frac{b}{g} = \frac{b-f}{f} \qquad | \cdot g \cdot f$$

$$\frac{b}{g} \cdot g \cdot f = \frac{b-f}{f} \cdot g \cdot f \qquad | \text{ kürzen}$$

$$b \cdot f = (b - f) \cdot g \qquad | \text{ ausmultiplizieren}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$b \cdot f = b \cdot g - f \cdot g \quad | + f \cdot g$

$b \cdot f + f \cdot g = b \cdot g \quad | - b \cdot f$

$f \cdot g = b \cdot g - b \cdot f \quad | \; b$ ausklammern

$f \cdot g = b \cdot (g - f) \quad | : (g - f)$

$\frac{f \cdot g}{g - f} = b$ bzw. $b = \frac{g \cdot f}{g - f}$

h)

$b = \frac{g \cdot f}{g - f} \quad | \cdot (g - f)$

$b \cdot (g - f) = g \cdot f \quad |$ ausmultiplizieren

$b \cdot g - b \cdot f = f \cdot g \quad | + b \cdot f$

$b \cdot g = b \cdot f + f \cdot g \quad | - f \cdot g$

$b \cdot g - f \cdot g = b \cdot f \quad | \; g$ ausklammern

$(b - f) \cdot g = b \cdot f \quad | : (b - f)$

$g = \frac{b \cdot f}{b - f}$

(7) Übungsaufgabe: Potenz- und Bruchschreibweise umwandeln [149]

a) $f(x) = \frac{x^2}{x^5} = x^2 \cdot x^{-5} = x^{-3}$

b) $f(x) = \frac{x}{(x-7) \cdot x^2}$
$= x \cdot (x-7)^{-1} \cdot x^{-2}$
$= x^{-1} \cdot (x-7)^{-1}$

c) $f(x) = \frac{x-2}{x^2-16} = (x-2) \cdot (x^2-16)^{-1}$

d) $f(x) = \frac{(x-1)^2}{(42-x)^5}$
$= (x-1)^2 \cdot (42-x)^{-5}$

e) $f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x}$

f) $f(x) = 25 \cdot x^{-3} = \frac{25}{x^3}$

g) $f(x) = (x-2)^{-7} = \frac{1}{(x-2)^7}$

h) $f(x) = x^{-2} + 3x^4 = \frac{1}{x^2} + 3x^4$

(8) Übungsaufgabe: Ableitungen bestimmen [150]

a) $f(x) = \frac{x^2}{x+1} = x^2 \cdot (x+1)^{-1}$

In Potenzschreibweise mithilfe der Produktregel:

$f'(x) = 2x \cdot (x+1)^{-1} + x^2 \cdot (-1) \cdot (x+1)^{-2}$
$= 2x \cdot (x+1)^{-1} - x^2 \cdot (x+1)^{-2}$

In Bruchschreibweise mithilfe der Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{2x \cdot (x+1) - x^2 \cdot 1}{(x+1)^2} = \frac{2x^2 + 2x - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{x^2} = (x+1) \cdot x^{-2}$

In Potenzschreibweise mithilfe der Produktregel:

$f'(x) = (x+1) \cdot (-2) \cdot x^{-3} + 1 \cdot x^{-2}$
$= (-2x-2) \cdot x^{-3} + x^{-2} = -2x^{-2} - 2x^{-3} + x^{-2} = -x^{-2} - 2x^{-3}$

In Bruchschreibweise mithilfe der Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{1 \cdot x^2 - (x+1) \cdot 2x}{(x^2)^2} = \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2-2x}{x^4}$

c) $f(x) = (x+1)^2 \cdot x^{-6} = \frac{(x+1)^2}{x^6}$

In Potenzschreibweise mithilfe der Produktregel:

$f'(x) = 2 \cdot (x+1) \cdot x^{-6} + (x+1)^2 \cdot (-6) \cdot x^{-7} = 2x^{-5} + 2x^{-6} - 6 \cdot (x+1)^2 \cdot x^{-7}$

In Bruchschreibweise mithilfe der Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{2 \cdot (x+1) \cdot x^6 - (x+1)^2 \cdot 6 \cdot x^5}{(x^6)^2}$
$= \frac{2x^7 + 2x^6 - 6x^5 \cdot (x+1)^2}{x^{12}}$

d) $f(x) = x^6 \cdot (x+1)^{-2} = \frac{x^6}{(x+1)^2}$

In Potenzschreibweise mithilfe der Produktregel:

$f'(x) = 6x^5 \cdot (x+1)^{-2} + x^6 \cdot (-2) \cdot (x+1)^{-3}$
$= 6x^5 \cdot (x+1)^{-2} - 2x^6 \cdot (x+1)^{-3}$

In Bruchschreibweise mithilfe der Quotientenregel:

$f'(x) = \frac{6x^5 \cdot (x+1)^2 - x^6 \cdot 2 \cdot (x+1)}{((x+1)^2)^2} = \frac{6x^5 \cdot (x+1)^2 - 2x^7 - 2x^6}{(x+1)^4}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(9) Übungsaufgabe: Stammfunktionen bestimmen [151]

a) $f(x) = \frac{9}{x^4} = 9 \cdot x^{-4}$

Also lautet:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \cdot 9 \cdot x^{-3} = -3 \cdot x^{-3} = -\frac{3}{x^3}$$

b) $f(x) = -\frac{10}{x^6} = -10 \cdot x^{-6}$

$$F(x) = \frac{1}{5} \cdot 10 \cdot x^{-5} = 2 \cdot x^{-5} = \frac{2}{x^5}$$

c) $f(x) = \frac{3}{x-5} = 3 \cdot (x-5)^{-1}$

$F(x) = 3 \cdot \ln(|x-5|)$

d) $f(x) = \frac{4}{3x+1} = 4 \cdot (3x+1)$

$F(x) = \frac{4}{3} \cdot \ln(|3x+1|)$

Lösung: Wurzelfunktionen

(1) Aufg.: Beregnungssysteme [152]

a) $r(400) = \sqrt{\frac{400}{\pi}} = 11{,}28\,[\text{m}]$

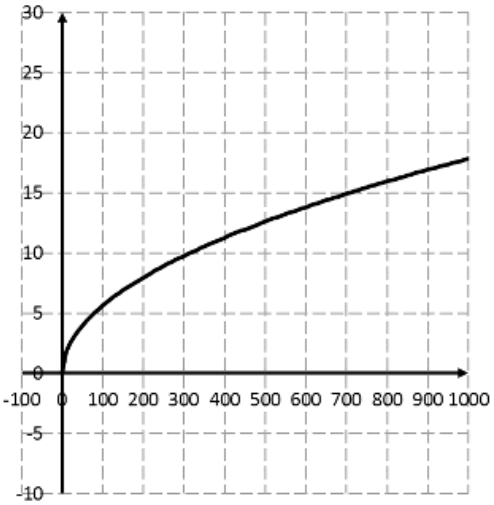
b) $r(800) = \sqrt{\frac{800}{\pi}} = 15{,}96\,[\text{m}]$

c) Der Radius erhöht sich aufgrund der Wurzel in der Funktionsgleichung lediglich um den Faktor $\sqrt{2}$:

$$\sqrt{\frac{2 \cdot A}{\pi}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

d) $D = [0;\infty) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

e)



Hilfreiche Formulierungen:

…der Graph nimmt keine Werte im negativen Bereich an…

…beginnt bei $x = 0$…

…der Graph liegt ausschließlich im ersten Quadranten…

…der Graph steigt streng monoton…

…die Steigung des Graphen nimmt ab…

…der Graph verläuft nicht asymptotisch…

…hat keine Extremstellen oder Wendestellen…

…der Graph ist nicht periodisch…

Lösungsvorschlag:

Der Funktionsgraph beginnt bei $x = 0$ und liegt ausschließlich im ersten Quadranten.

Im Gegensatz zu allen bisher bekannten Funktionsklassen gibt es hier einen Anfang des Funktionsgraphen.

Der Funktionsgraph verläuft streng monoton steigend, wobei die Steigung immer weiter abnimmt.

Im Gegensatz zu Exponentialfunktionen verläuft der Graph nicht asymptotisch.

Im Gegensatz zu trigonometrischen Funktionen ist diese Funktion nicht periodisch.

(2) Übungsaufgabe: Schreibweisen und Definitionsbereiche von Wurzelfunktionen [153]

a) $f(x) = 31 \cdot \sqrt[3]{x+12} + 4$

$= 31 \cdot (x+12)^{\frac{1}{3}} + 4$

$D = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-12} - 3 = 2 \cdot (x-12)^{\frac{1}{2}} - 3$

$D = [12;\infty)$

c) $f(x) = 4 \cdot (x+1)^{\frac{1}{6}} + 3 = 4 \cdot \sqrt[6]{x+1} + 3$

$D = [-1;\infty)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

d) $f(x) = 0{,}1 \cdot (x-2)^{\frac{4}{5}} + 10$

$= 0{,}1 \cdot \sqrt[5]{(x-2)^4} + 10$

$D = \mathbb{R}$

e) $f(x) = 15 \cdot (x+4{,}5)^{\frac{1}{2}} = 15 \cdot \sqrt{x+4{,}5}$

$D = [-4{,}5; \infty)$

f) $f(x) = \sqrt{x^2+x-2} = (x^2+x-2)^{\frac{1}{2}}$

Berechnen der Nullstellen des Radikanden mit $x^2+x-2=0$ ergibt $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$. Zwischen $x_1 = -2$ und $x_2 = 1$ nimmt der Radikand negative Werte ein. Dieser Bereich muss also im Definitionsbereich ausgeschlossen werden.

$D = \mathbb{R} \setminus]-2; 1[$

(3) Übungsaufg.: Fadenpendel [153]

a) $T(0{,}5) = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{0{,}5}{9{,}81}} = 1{,}42$ [s]

Ein Pendel mit der Länge 0,5 m schwingt für 1,42 s.

b) Ansatz: $2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{9{,}81}} = 2$

$2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{9{,}81}} = 2 \quad | : 2\pi$

$\sqrt{\frac{l}{9{,}81}} = 4\pi \quad | \,^2$

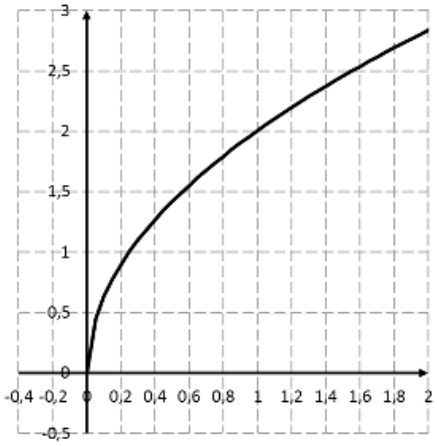
$\frac{l}{9{,}81} = 16\pi^2 \quad | \cdot 9{,}81$

→ $l = 0{,}994$ [m]

Für eine Schwingungsdauer von 2 s muss das Pendel 0,994 m lang sein.

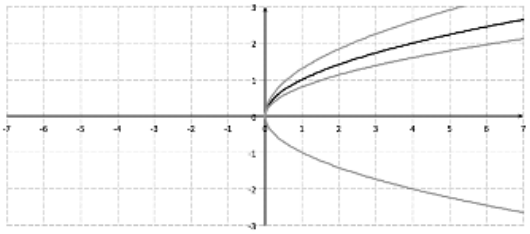
c) $D = [0; \infty) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \geq 0, x \in \mathbb{R}\}$

d)



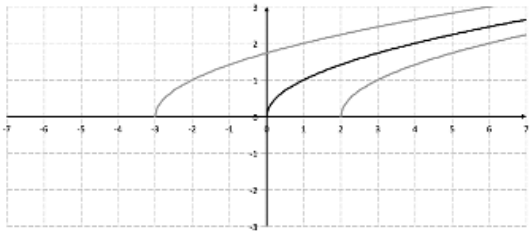
(4) Aufgabe: Parameter der Quadratwurzelfunktion [154]

Parameter a:



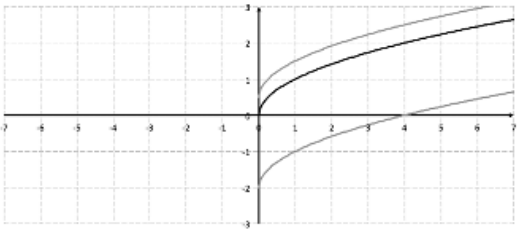
Der Graph der Funktion wird jeweils in y-Richtung gestreckt bzw. gestaucht. Ist a negativ, so wird der Graph zusätzlich an der x-Achse gespiegelt.

Parameter b:



Der Graph der Funktion wird in jeweils in x-Richtung verschoben.

Parameter c:



Der Graph der Funktion wird in jeweils in y-Richtung verschoben.

(5) Übungsaufgabe: Ableitungen von Wurzelfunktionen [155]

a) $f(x) = 0{,}5 \cdot \sqrt[4]{(x+4)^6} = 0{,}5 \cdot (x+4)^{\frac{6}{4}}$

$f'(x) = 0{,}5 \cdot \frac{6}{4} \cdot (x+4)^{\frac{6}{4}-1}$

$= 0{,}75 \cdot (x+4)^{\frac{2}{4}} = 0{,}75 \cdot (x+4)^{\frac{1}{2}}$

$= 0{,}75 \cdot \sqrt{x+4}$

b) $f(x) = 31 \cdot \sqrt[3]{x+12} + 4$

$= 31 \cdot (x+12)^{\frac{1}{3}} + 4$

$f'(x) = 31 \cdot \frac{1}{3} \cdot (x+12)^{\frac{1}{3}-1}$

$= 10{,}\overline{3} \cdot (x+12)^{-\frac{2}{3}}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

c) $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x-12} - 3 = 2 \cdot (x-12)^{\frac{1}{2}} - 3$

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot (x-12)^{\frac{1}{2}-1} = (x-12)^{-\frac{1}{2}}$

d) $f(x) = 10 \cdot (x^3+1)^{\frac{1}{5}} - 4$

$f'(x) = 3x^2 \cdot 10 \cdot \frac{1}{5} \cdot (x^3+1)^{\frac{1}{5}-1}$

$= 6x^2 \cdot (x^3+1)^{-\frac{4}{5}}$

(6) Übungsaufgabe: Stammfunktionen von Wurzelfunktionen [156]

a) $f(x) = \sqrt[5]{x^6} = x^{\frac{6}{5}}$

Also lautet:

$F(x) = \frac{1}{\frac{11}{5}} x^{\frac{11}{5}} = \frac{5}{11} x^{\frac{11}{5}} = \frac{5}{11} \cdot \sqrt[5]{x^{11}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$

Also lautet:

$F(x) = \frac{1}{\frac{5}{3}} x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5} \cdot \sqrt[3]{x^5}$

c) $f(x) = 5 \cdot \sqrt[9]{x^5} = 5 \cdot x^{\frac{5}{9}}$

Also lautet:

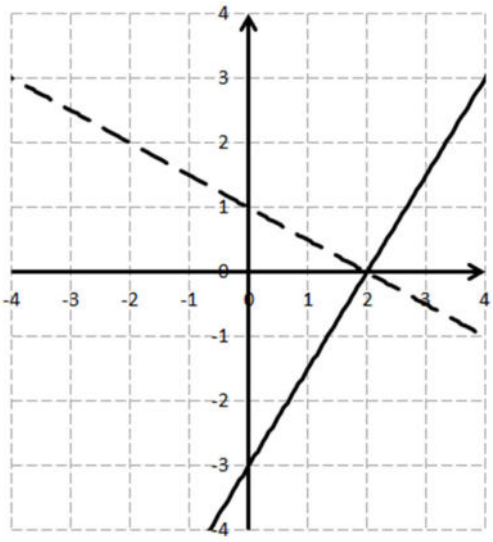
$F(x) = \frac{5}{\frac{14}{9}} x^{\frac{14}{9}} = \frac{45}{14} x^{\frac{14}{9}} = \frac{45}{14} \cdot \sqrt[9]{x^{14}}$

Übersicht über einige Funktionen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Lineare Funktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot x + b$

mit $a, b \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

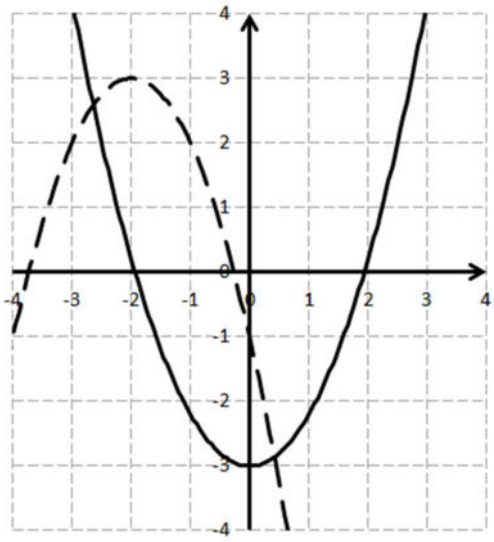
Ableitung

$f'(x) = a$

Informationen

- ganzrationale Funktion 1. Grades
- Graph: Gerade
- a entspricht der Steigung
- b entspricht dem y-Achsenabschnitt
- streng monoton wachsend für $a > 0$ und streng monoton fallend für $a < 0$

Quadratische Funktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

bzw. $f(x) = a \cdot (x - x_S)^2 + y_S$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $x_S, y_S \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

Ableitung

$f'(x) = 2a \cdot x + b$

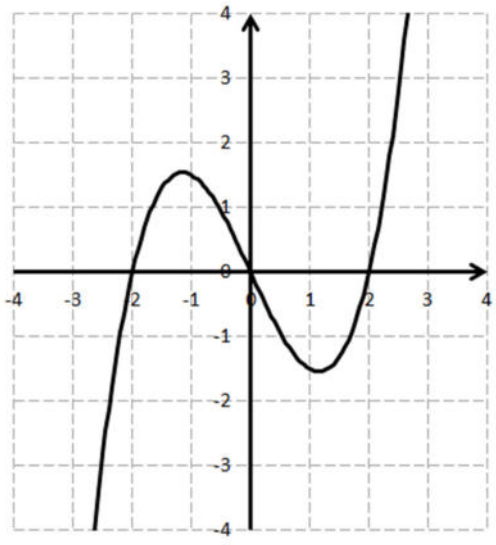
Informationen

- ganzrationale Funktion 2. Grades
- Graph: Parabel
- besitzt maximal 2 Nullstellen
- besitzt genau einen Extrempunkt (Scheitelpunkt):
- $S(x_S|y_S)$ ist Maximum für $a < 0$ und $S(x_S|y_S)$ ist Minimum für $a > 0$
- achsensymmetrisch, wenn $b = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Kubische Funktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

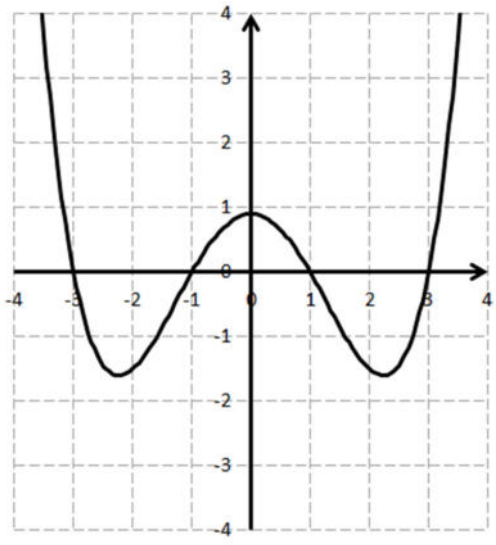
Ableitung

$f'(x) = 3a \cdot x^2 + 2b \cdot x + c$

Informationen

- ganzrationale Funktion 3. Grades
- besitzt maximal 3 Nullstellen
- besitzt maximal 2 Extremstellen
- maximal 1 Wendestelle
- punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn $b = 0$ und $d = 0$

Quartische Funktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

Ableitung

$f'(x) = 4a \cdot x^3 + 3b \cdot x^2 + 2c \cdot x + d$

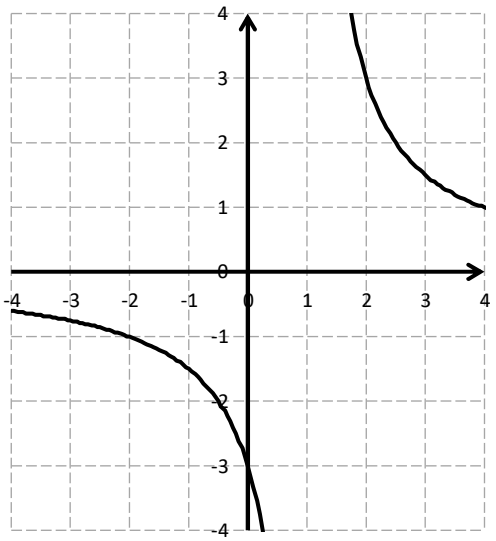
Informationen

- ganzrationale Funktion 4. Grades
- besitzt maximal 4 Nullstellen
- besitzt maximal 3 Extremstellen
- besitzt maximal 2 Wendestelle
- achsensymmetrisch bei $b = 0$ und $d = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Gebrochenrationale Funktionen



Funktionsgleichung

$$f(x) = \frac{Z(x)}{N(x)} = Z(x) \cdot N(x)^{-1}$$
$$= \frac{a_n \cdot x^n + \ldots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0}{b_m \cdot x^m + \ldots + b_2 \cdot x^2 + b_1 \cdot x + b_0}$$

mit $a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m \in \mathbb{R}$, $n, m \in \mathbb{N}$ und $a_n, b_m \neq 0$

Definitionsbereich

$$D = \{x \in \mathbb{R} \text{ mit } N(x) \neq 0\}$$

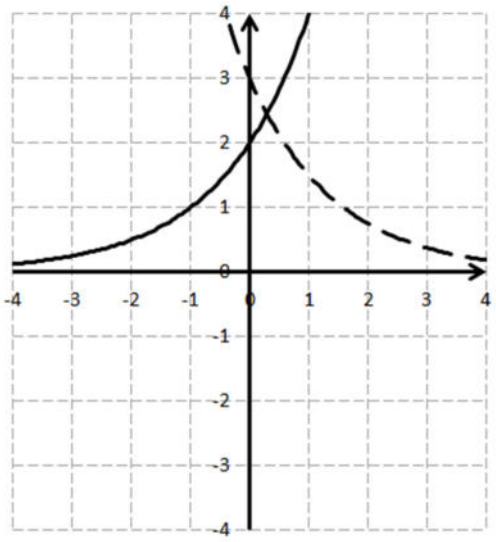
Ableitung

$$f'(x) = \frac{Z'(x) \cdot N(x) - Z(x) \cdot N'(x)}{N(x)^2}$$

Informationen

- Polstellen:
  $\{x \in \mathbb{R} \text{ mit } N(x) = 0 \text{ und } Z(x) \neq 0\}$
- hebbare Definitionslücken:
  $\{x \in \mathbb{R} \text{ mit } N(x) = 0 \text{ und } Z(x) = 0\}$

Exponentialfunktion zur Basis b



Funktionsgleichung

$$f(x) = a \cdot b^x$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

Definitionsbereich

$$D = \mathbb{R}$$

Ableitung

$$f(x) = a \cdot ln\,(b) \cdot b^x$$

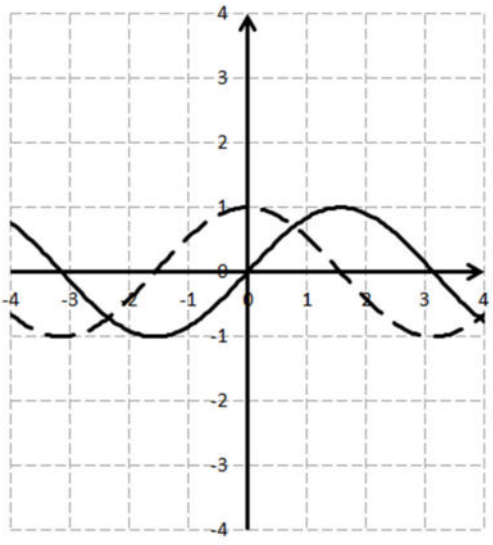
Informationen

- streng monoton fallend/steigend
- a entspricht dem y-Achsenabschnitt
- b ist der Wachtsums- / Zerfallsfaktor
  bei $0 < b < 1$ liegt ein Zerfall vor
  bei $b > 1$ liegt ein Wachtsum
- $f(x) \neq 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Trigonometrische Funktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot sin\big(b \cdot (x + c)\big) + d$
$f(x) = a \cdot cos\big(b \cdot (x + c)\big) + d$
(abgebildet im Bogenmaß)

mit $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

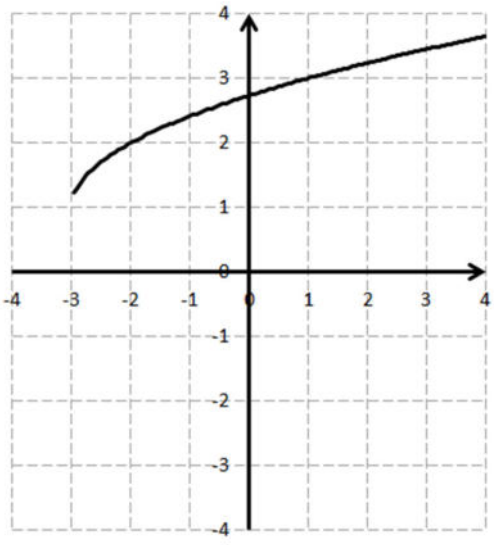
Ableitung im Bogenmaß

$f(x) = sin(x) \Rightarrow f'(x) = cos(x)$
$g(x) = cos(x) \Rightarrow f'(x) = -sin(x)$

Informationen

- Periodischer Verlauf, daher unendlich viele Extrem- und Wendestellen
- Fachbegriffe zur Beschreibung: Periodenlänge und Amplitude
- a streckt/staucht den Graphen in y-Richtung
- b streckt/staucht den Graphen in x-Richtung
- c verschiebt den Graphen in x-Richtung
- d verschiebt den Graphen in y-Richtung
- Zu beachten: Bogenmaß und Gradmaß

Wurzelfunktionen



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot \sqrt[n]{(x + b)^m} + c = a \cdot (x + b)^{\frac{m}{n}} + c$

mit $a, b, c \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = [-b; \infty)$ wenn n gerade und m ungerade
$D = \mathbb{R}$ wenn m gerade oder n ungerade

Ableitung

$f'(x) = a \cdot \frac{m}{n} \cdot (x + b)^{\frac{m}{n}-1}$

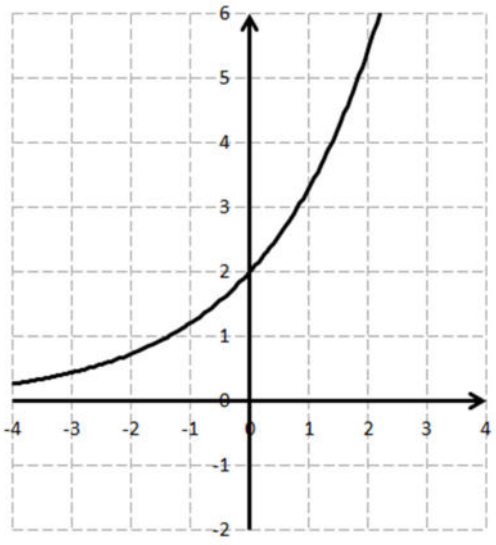
Informationen

- Streng monoton wachsend $(a > 0)$ bzw. fallend $(a < 0)$
- a streckt/staucht den Graphen in y-Richtung
- b verschiebt den Graphen in x-Richtung
- c verschiebt den Graphen in y-Richtung

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Exponentialfunktion zur Basis e



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot e^{k \cdot x}$

mit $a, k \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

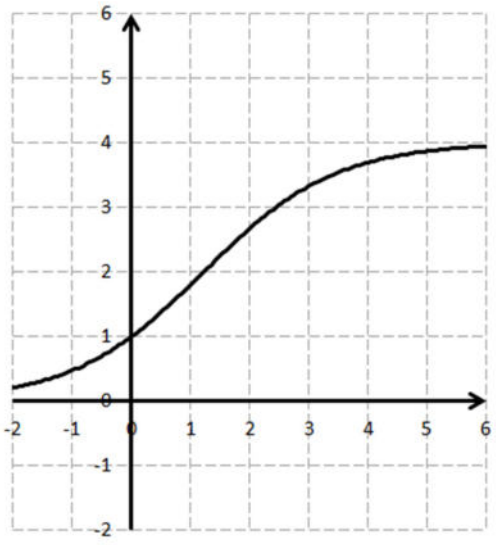
Ableitung

$f'(x) = a \cdot k \cdot e^{k \cdot x}$

Informationen

- $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
- für $k > 0$ streng monoton wachsend
- für $k < 0$ streng monoton fallend
- Basistransfer zu $f(x) = a \cdot b^x$
  $b = e^{\ln(b)} \rightarrow k = \ln(b)$
- nach oben unbeschränktes Wachstum:
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

Logistisches Wachstum



Funktionsgleichung

$f(x) = \frac{c}{1 + a \cdot e^{-k \cdot x}}$

mit $a, c, k \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

Ableitung

$f'(x) = \frac{a \cdot c \cdot k \cdot e^{-k \cdot x}}{(1 + a \cdot e^{-k \cdot x})^2}$

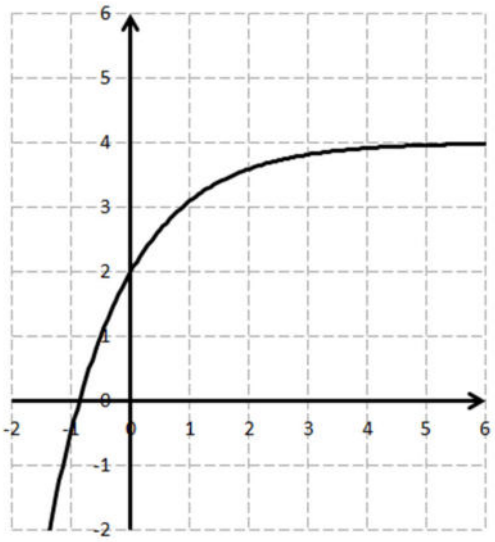
Informationen

- streng monoton wachsend
- Anfangsbestand: $f(0) = \frac{c}{1+a}$
- nach unten und oben beschränktes Wachstum:
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$ und $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beschränktes Wachstum



Funktionsgleichung

$f(x) = c - a \cdot e^{-k \cdot x}$

mit $a, c, k \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \mathbb{R}$

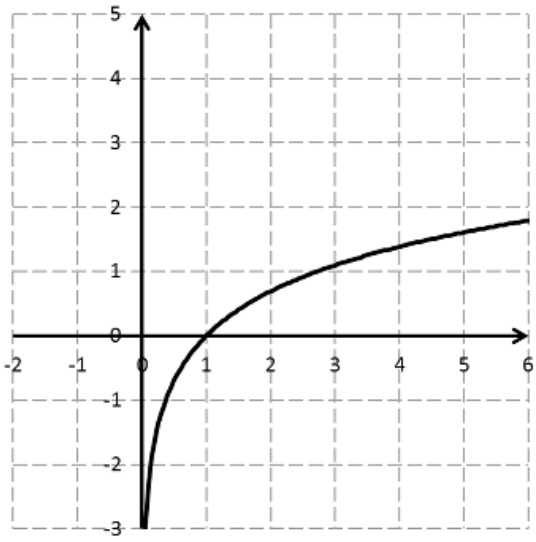
Ableitung

$f'(x) = a \cdot k \cdot e^{-k \cdot x}$

Informationen

- streng monoton wachsend
- Anfangsbestand: $f(0) = c - a$
- nach oben durch c beschränktes Wachstum: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = c$

Natürlicher Logarithmus



Funktionsgleichung

$f(x) = a \cdot \ln(b \cdot (x + c)) + d$

mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

Definitionsbereich

$D = \{b \cdot (x + c) > 0\}$

Ableitung

$f'(x) = a \cdot b \cdot \frac{1}{b \cdot (x+c)} = \frac{a \cdot b}{b \cdot (x+c)} = \frac{a}{x+c}$

mit $b \cdot (x + c) > 0$

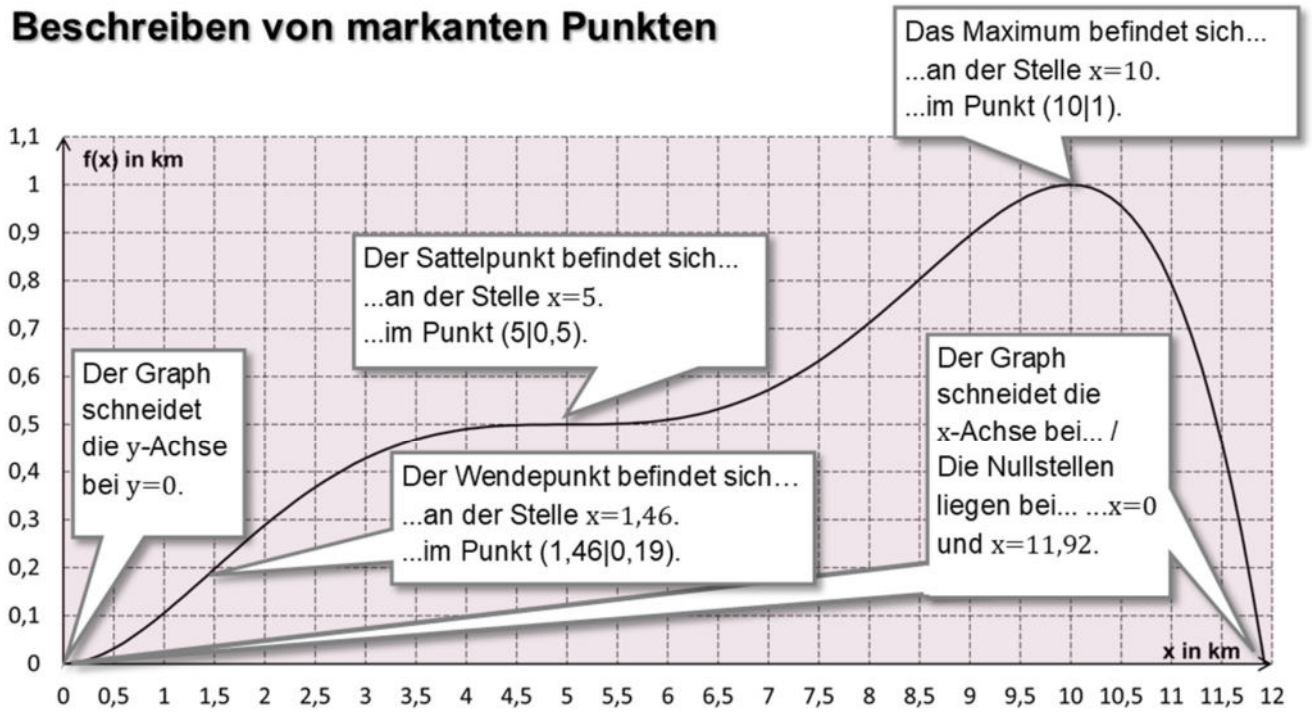
Informationen

- a streckt/staucht den Graphen in y-Richtung
- b streckt/staucht den Graphen in x-Richtung
- c verschiebt den Graphen in x-Richtung
- d verschiebt den Graphen in y-Richtung

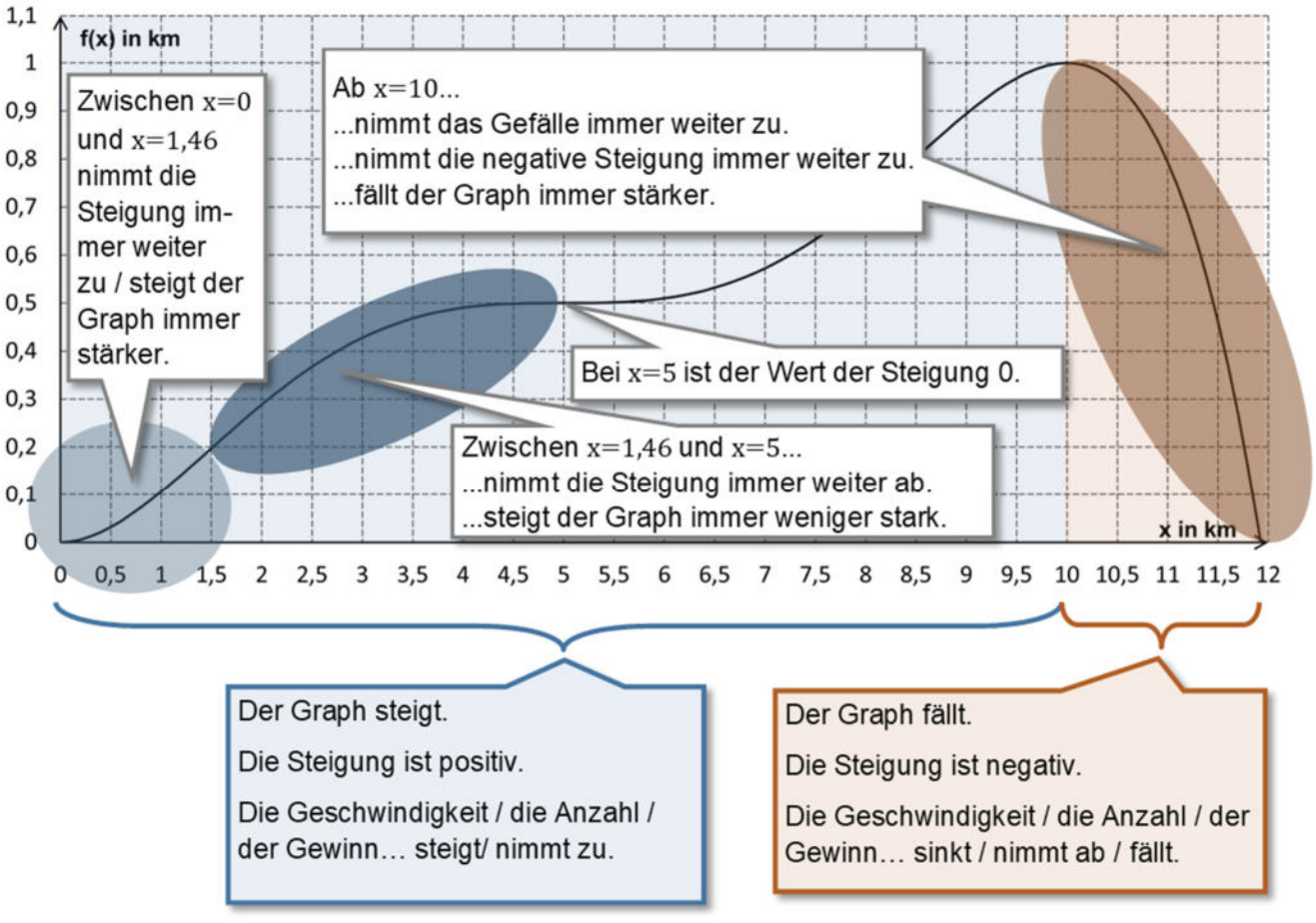
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beschreiben von markanten Punkten



Beschreiben der Steigung eines Graphen



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Stichwortverzeichnis

Ableitung
  Bedeutung ... 17
  trigonometrische Funktionen ... 117
  verkettete Funktionen ... 118
  Wurzelfunktion ... 155
Ableitungsregel
  Faktorregel ... 16
  Kettenregel ... 118
  Potenzregel ... 16
  Produktregel ... 133
  Quotientenregel ... 149
  Summenregel ... 16
absolute Extrempunkte ... 34
absolutes Maximum ... 34
absolutes Minimum ... 34
Additionsverfahren (Gleichungssysteme) ... 74
allgemeine Funktionsgleichung
  Cosinusfunktion ... 111
  Exponentialfunktion (Basis b) ... 123
  Exponentialfunktion (Basis e) ... 131
  ganzrationale Funktionen ... 72
  gebrochenrationale Funktionen ... 144
  Sinusfunktion ... 111
  Übersicht ... 99
  Wurzelfunktionen ... 152
allgemeine Funktionstypen ... 99
Amplitude ... 108, 111
Änderungsrate ... 17
  durchschnittlich ... 54
  momentan ... 12
Anfangsbestand, Exponentialfunktion ... 123
Asymptote
  Exponentialfunktion ... 134
  gebrochenrationale Funktionen ... 146
Basis e ... 130
Basiswechsel ... 131
Bedeutung der 1. Ableitung ... 17
begrenztes Wachstum ... 139
beschränktes Wachstum ... 139
Bestimmtheitsmaß, Regression ... 96
Bogenlänge ... 57
Bogenmaß ... 110
Cosinusfunktion ... 108
  allgemeine Funktionsgleichung ... 111
  Herleitung ... 108, 121
  Zusammenhang Sinusfunktion ... 108
Definitionsbereich
  gebrochenrationale Funktionen ... 144
  Wurzelfunktionen ... 152
Definitionslücke ... 144
Differential ... 54
Differentialrechnung ... 8
Differenzenquotient
  Grenzwert ... 12
Differenzierbarkeit ... 81
durchschnittliche Änderungsrate ... 54
durchschnittliche Steigung ... 9
e-Funktion ... 130
  allgemeine Funktionsgleichung ... 131
  Basiswechsel ... 131
  Grenzwert ... 134
  Limes ... 134
Einheit der ersten Ableitung ... 20
Einheitskreis ... 108, 110, 121
erste Ableitung
  Bedeutung ... 17
  Bedeutung im Kontext ... 20
  Einheit ... 20
Euler'sche Zahl ... 130
Exponentialfunktion
  Anfangsbestand ... 123
  Asymptote ... 134
  Basiswechsel ... 131
  Wachstumsfaktor ... 123, 124
  Wachstumsprozess ... 124
  Wachstumsrate ... 124
  Zerfallsfaktor ... 123, 124
  Zerfallsprozess ... 124
  Zerfallsrate ... 123
  zu zwei Wertepaaren ... 126
  zur Basis b ... 123
  zur Basis e ... 131
exponentielle Gleichungen lösen ... 127
exponentielle Regression ... 94
exponentielles Wachstum ... 139
Extrema ... 21
Extrempunkt ... 21
  global/absolut ... 34
  lokal/relativ ... 34
Faktorregel für Integrale ... 56
Feinheit der Zerlegung ... 45
Flächen
  zusammengesetzte ... 42
Flächeninhalte
  gerichtete ... 40
  näherungsweises Bestimmen ... 42
  orientierte ... 40, 61
  zwischen zwei Graphen ... 66
Funktionenschar ... 77
Gauß-Jordan-Verfahren ... 74
gebrochenrationale Funktionen ... 144
  Ableitung ... 149
  Asymptote ... 146
  Definitionsbereich ... 144
  Definitionslücke ... 144
  hebbare Definitionslücke ... 146
  Polstelle ... 146
  Potenz- und Bruchschreibweise ... 149
  Stammfunktionen ... 150
gerichtete Flächeninhalte ... 40
Gleichungen lösen
  exponentielle ... 127

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

trigonometrische 115
Gleichungssystem
händisches Lösen 74
globale Extrempunkte 34
globales Maximum 34
globales Minimum 34
Grad der Interpolationsfunktion 72
Gradmaß 110
Grenzwert
Differenzenquotient 12
e-Funktion 134
Gütemaße
Bedeutung 96
MSE-Wert 94
R²-Wert 94
Regression 94
Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung 53
hebbare Definitionslücke 146
hinreichende Bedingung
Hoch-, Tief- und Sattelpunkte 22, 25
Wendepunkte 28
Hochpunkt 21
Integral
Rechenvorschrift 53
Integralgleichungen 63
Integralzeichen 54
Interpolation
Bedingungen 72
Funktionsgrad 79
Herangehensweise 72
knickfrei 80
krümmungssprungfrei 80
sprungfrei 80
Intervall 32
Kettenregel 118
knickfrei 80
Koeffizientenmatrix 74
Krümmungssprung 80
krümmungssprungfrei 80
Krümmungsverhalten 24
Kurvenschar 77
Limes
Differenzenquotient 12
e-Funktion 134
lineare Regression 94
Logarithmus 127
Logarithmusfunktion 127
Logarithmusgesetze 128
logistisches Wachstum 139
lokale Extrempunkte 34
lokales Maximum 34
lokales Minimum 34
Lösen von
exponentiellen Gleichungen 127
Gleichungssystemen 74
Integralgleichungen 63
trigonometrischen Gleichungen 115
Mantelfläche 93
Mantelfläche eines Rotationskörper 93
Mathematische Modellierung 83
Maximum 21
globales/absolutes 34
lokales/relatives 34
mean square error 96
Minimum 21
globales/absolutes 34
lokales/relatives 34
Mittelsumme 42
mittlerer quadratischer Fehler 96
mittlerer quadratischer Fehler, Veranschaulichung 96
Modellierungskreislauf 83
momentane Änderungsrate 12
monoton
fallend 32
steigend 32
Montonie 32
MSE
Gütemaß 94
Veranschaulichung 96
näherungsweises Bestimmen
Flächeninhalte 42
Steigung an einer Stelle 10
natürlicher Logarithmus 130
negative Steigung 31
NEW-Merkregel 30
notwendige Bedingung
Extremstellen 21
Wendepunkte 28
notwendiges Kriterium
Extremstellen 21
Wendepunkte 28
Obersumme 42
orientierte Flächeninhalte 40, 61
Parameter
Quadratwurzelfunktion 154
trigonometrische Funktionen 111
Parameterfunktion 77
Periodenlänge 108, 111
Periodizität 115
Polstelle 146
positive Steigung 31
Potenz- und Bruchschreibweise 149
Potenz- und Wurzelschreibweise 152
Potenzgesetze 128
Produktregel 133
quadratische Regression 94
Quadratwurzelfunktion
Parameter 154
Quotientenregel 149
R^2-Wert 94
Radikand 152
Randextremum 35
Randmaximum 35
Randminimum 35
Rechenregeln für Integrale 56
Regression 94

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analysis** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die Analysis der Oberstufe“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Regressionsfunktion ... 94
Regressionsgerade ... 96
relative Extrempunkte ... 34
relatives Maximum ... 34
relatives Minimum ... 34
Rotationskörper
  Mantelfläche ... 93
  Volumenberechnung ... 87
Rotationsvolumen
  Bedeutung ... 87
Sattelpunkt ... 21
Sekante ... 9
Sekantensteigung ... 9
Sinusfunktion ... 108
  allgemeine Funktionsgleichung ... 111
  Herleitung ... 108, 121
  Zusammenhang Cosniusfunktion ... 108
Spline-Interpolation ... 91
Splines ... 91
sprungfrei ... 80
Stammfunktion
  Bedeutung ... 48
  Bildung ... 49
  einfache Wurzelfunktionen ... 156
  gebrochenrationale Funktionen ... 150
  Herleitung ... 46
  trigonometrische Funktion ... 120
Steigung
  durchschnittlich ... 9
  momentan ... 12
  negative ... 31
  positive ... 31
Steigungsdreieck ... 9
Steigungswinkel ... 9
Stetigkeit ... 81
streng monoton
  fallend ... 32
  steigend ... 32
Summenregel für Integrale ... 56
Tangente ... 17
Tangentengleichung ... 17
Tangentensteigung ... 17
Tiefpunkt ... 21
trigonometrische Funktionen
  Ableitung ... 117
  Stammfunktion ... 120
Untersumme ... 42
Verbindungsstellen ... 80
verkettete Funktionen, Ableitung ... 118
Vorzeichen-Wechsel-Kriterium
  Hoch-, Tief- und Sattelpunkte ... 22
  Wendepunkte ... 28
Wachstumsfaktor, Exponentialfunktion ... 123, 124
Wachstumskonstante ... 131
Wachstumsprozess ... 139
Wachstumsprozess, Exponentialfunktion ... 124
Wachstumsrate, Exponentialfunktion ... 124
Wendepunkte
  notwendige und hinreichende Bedingung ... 28
Wert der mittleren Abstandsquadrate ... 96
Winkelmaß ... 110
wissenschaftliche Zahlendarstellung ... 11
Wurzelfunktionen
  Ableitung ... 155
  allgemeine Funktionsgleichung ... 152
  Definition ... 152
  Definitionsbereich ... 152
  Potenz- und Wurzelschreibweise ... 152
  Schreibweisen ... 152
  Stammfunktion ... 156
Zahlendarstellung, wissenschaftliche ... 11
Zeit-Geschwindigkeit-Funktion ... 20, 51
Zeit-Weg-Funktion ... 20, 51
Zerfallsfaktor, Exponentialfunktion ... 123, 124
Zerfallskonstante ... 131
Zerfallsprozess, Exponentialfunktion ... 124
Zerlegung, Feinheit ... 45
zurückgelegte Strecke ... 39
zusammengesetzte Flächen ... 42
zweite Ableitung
  Bedeutung ... 24

Informationen zum vorderen Buchdeckel

Die Hamburger Hauptkirche Sankt Michaelis (der „**Michel**“) hat eine Höhe von knapp über 132 Metern. Wenn ein Gegenstand von der Aussichtsplattform in $h_0 = 82$ Metern Höhe fällt, braucht er $t = 4$ Sekunden für den freien Fall bis zum Boden (Erdbeschleunigung $g = 9{,}81\frac{m}{s^2}$). Die Einheit **Knoten** (kn) ist in der Seefahrt gebräuchlich. 1 Knoten entspricht 1 Seemeile pro Stunde (= 0,514 Meter pro Sekunde). Das **Kuppeldach**, dessen Kontur mathematisch beschrieben wird, gehört zur Einfahrt in den alten Elbtunnel.

Informationen zum hinteren Buchdeckel

Jedes Buch trägt eine **ISBN** (Internationale Standardbuchnummer), die nach einem festen Schema aufgebaut ist. Die ISBN von MiKe lautet: 978-3-7693-0112-0. Die 978 (oder 979) kennzeichnet alle *Bücher*, die 3 steht für *deutschsprachig*, es folgen die *Verlagsnummer* und die *Titelnummer*. Die letzte Ziffer ist die *Prüfziffer*, die vor Eingabe- und Lesefehlern schützt. Um diese 13. Ziffer der ISBN zu berechnen, werden alle Ziffern an geraden Stellen addiert und die Summe wird mit drei multipliziert. Dazu wird die Summe der Ziffern an den ungeraden Stellen addiert. Das Ergebnis wird modulo (mod) 10 gerechnet, das heißt es wird der Rest r bei der Division durch 10 angegeben. In den letzten beiden Schritten wird $10 - r$ gerechnet und das Ergebnis noch einmal modulo 10 genommen.

Da es sich bei MiKe um ein Verlagserzeugnis handelt, gilt für dieses Buch der ermäßigte Steuersatz von 7% anstelle des Regelsteuersatzes von 19%. Der **Bruttopreis** ist daher das 1,07-fache des Nettopreises.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!