Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Mathematik in Kontexten entdecken

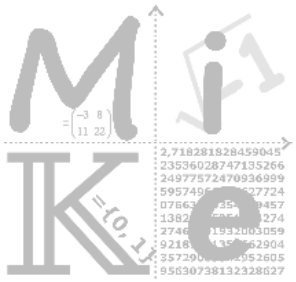
Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie

von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

„Wofür braucht man das eigentlich?“

Auch bei unserem zweiten Mathematikbuch sind wir davon überzeugt, dass niemand die Einleitung liest - und trotzdem wollen wir Ihnen in Kürze unsere Idee hinter diesem Buch vorstellen. Eine der Fragen im Mathematikunterricht, die am schwierigsten zu beantworten ist, lautet: „Wofür braucht man das eigentlich?“. Diese Frage lässt sich aus unserem persönlichen Alltag nicht immer zufriedenstellend beantworten, obwohl hinter vielen alltäglichen Gegenständen und Phänomenen viel mathematisches Wissen steckt. In diesem Buch beginnt das Entdecken von Mathematik immer im Kontext. Sie werden sich mit Kontexten beschäftigen, die Ihnen Schritt für Schritt die Anwendungen der analytischen Geometrie im dreidimensionalen Raum nahebringen. Dabei werden Bewegungen in der Luft und im Wasser, Anwendungen in der Architektur und auch der Einsatz für die Navigation auf der Erdoberfläche betrachtet.

Natürlich ist unsere Lebenswelt so komplex, dass wir vereinfachende Annahmen treffen müssen, um sie mit mathematischen Modellen beschreiben zu können. Unser Buch hat den Anspruch, so oft wie möglich, Aufgaben mit Realitätsbezug anzubieten. Allerdings sind die mathematischen Objekte in der analytischen Geometrie durchweg abstrakt und haben keine direkten Entsprechungen mit Objekten in der Realität. Daher werden Sie im Laufe des Buches mehrfach aufgefordert, die gewählten Grundannahmen der Anwendungen kritisch zu hinterfragen (wir nennen dies **Reality Check**).

An einigen Stellen des Buches werden Sie zum Einsatz eines Computer-Algebra-Systems (CAS) motiviert. Dadurch werden realistischere Modellierungen der Realsituationen möglich. Grundlegende Anwendungen der Handhelds Casio ClassPad und TI-Nspire CAS sowie der frei verfügbaren Software Geogebra (`www.geogebra.org`) werden im **CASten** erklärt.

Dem Ziel, Mathematik in Kontexten zu entdecken, folgt auch der Aufbau des Buches. Am Anfang jeder Erkenntnis steht immer eine anwendungsbezogene **Aufgabe**, die Sie herausfordert, sich mit neuen mathematischen Fragestellungen auseinanderzusetzen. In diesen Aufgaben können Sie Ihr bisheriges Wissen zur Lösung eines neuen Problems einsetzen. Im Anschluss daran werden die wichtigsten Inhalte in einer **Information** zusammengefasst und erklärt. Diese können in den **Übungsaufgaben** weiter gefestigt werden. Eine Besonderheit sind die Aufgabenteile mit dem Titel VERDACHT?!. Hier werden Sie mit typischen Fehlvorstellungen zu dem jeweiligen Inhalt konfrontiert. Da Fehler und Fehlvorstellungen zu jedem Lernprozess dazu gehören, kann es passieren, dass Sie selbst diese Fehler vorher gemacht haben. In diesen Aufgaben geht es darum, dass Sie verstehen, was daran falsch ist und wie diese Fehlvorstellungen überwunden werden können. Für alle, die in Teilgebiete tiefer einsteigen wollen, gibt es weiterführende Informationen unter der Überschrift **Genau hingeschaut.**

Die Lösungen im hinteren Teil des Buches ermöglichen die Selbstkontrolle Ihrer Lösungswege und Ergebnisse und geben bei Bedarf Anhaltspunkte für einen möglichen Lösungsansatz. Deswegen eignet sich dieses Buch nicht nur für den Unterrichtseinsatz, sondern auch zum Vor- und Nachbereiten von Unterricht durch die Lernenden und zur selbstständigen Erarbeitung der Themen.

Zur Unterstützung Ihrer unterrichtlichen Tätigkeit finden Sie digitale Ergänzungen zu diesem Buch auf der Internetseite `www.Lerntresen.de/MiKe`.

Wir bedanken uns herzlich bei den Lernenden und den Lehrkräften, die dieses Material in den vergangenen Jahren bereits in ihrem Unterricht eingesetzt und uns durch ihre Rückmeldungen sehr geholfen haben.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg beim Entdecken der Mathematik in Kontexten!

Vera Hauptmann, Hannah Heinrichs und Martin Kölln

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie

Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie der Oberstufe

Hamburg, 2024
© 2024 Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln

1. Auflage

Kontakt
Wenn Sie einen Fehler gefunden haben, freuen wir uns über eine E-Mail an: Fehlerteufel@Lerntresen.de
Für andere Rückmeldungen senden Sie Ihre E-Mail bitte an: MiKe@Lerntresen.de

A camel is a horse designed by a committee.

Bildnachweis
Die Quellen der meisten Fotografien und Abbildungen sind an den jeweiligen Stellen angegeben.
Alle Fotos, die unter einer Creative Commons ShareAlike (CC SA) Lizenz stehen, werden auch in diesem Buch unter der angegebenen Lizenz veröffentlicht.

Weitere Quellen
Vera Hauptmann: Atomium 34
Martin Kölln: Flugzeug 28, 38, 45, Drohne 20, 51, Windkraftanlage 59, Elbphilharmonie 62
MiKe-Team: Raumecke 9, 10, Schattenwurf Ball 13
Cover mit Fotos von Viktor Hanacek (Baustelle und Kondensstreifen, verändert) auf picjumbo.com und von RGY23 (Drohne, verändert) auf pixabay.com
Hausansicht 52 erstellt mit Sweet Home 3D, Emmanuel Puybaret (Software unter GNU General Public License)
Public domain (CC0): Brennan Phillips: Tauchroboter 24 / U.S. Navy Petty Officer 1st Class Gregory Messier: Tauchroboter 26 / John Bouvia (USN Ret.): Flugzeuglandung 32 / Carl Attard (pixnio.com): Solaranlage 56 / Alfred Twu: Solaranlage 65 / pixnio.com: Drohne in den Bergen 82

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Inhaltsverzeichnis

1 • Dreidimensionale Objekte

Von der Realität zur Zeichnung 7

Lösungen ab Seite 92

2 • Bewegungen im dreidimensionalen Raum

Von Flugbewegungen zu Vektoren 18

Lösungen ab Seite 95

3 • Geraden im dreidimensionalen Raum

Von der Flugbahn zur Parameterdarstellung einer Geraden 28

Lösungen ab Seite 97

4 • Abstände im dreidimensionalen Raum

Von hohen Bauwerken zu tiefen Tunneln 34

Lösungen ab Seite 100

5 • Lagebeziehungen von Geraden im dreidimensionalen Raum

Flugrouten: Von Flugzeugen zu Kameradrohnen 45

Lösungen ab Seite 105

6 • Ebenen mit der Parameterdarstellung beschreiben und Lagebeziehungen untersuchen

Von den Grundmauern bis zum Dachfirst 52

Lösungen ab Seite 108

7 • Ebenen in Koordinatenform ermitteln und Lagebeziehungen untersuchen

Von der Parameterform zur Koordinatenform und zurück 65

Lösungen ab Seite 115

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

8 • Winkel im dreidimensionalen Raum

Von Einflugwinkeln zu Sonnenwinkeln 73

Lösungen ab Seite 119

9 • Lagebeziehungen und Abstände bei Ebenen in der Koordinatenform im dreidimensionalen Raum

Von Abständen im Gebäude zu Abständen im Gebirge 77

Lösungen ab Seite 121

10 • Kugeln im dreidimensionalen Raum

Von der Standortbestimmung zu Schnittmengen von Kugeln 86

Lösungen ab Seite 128

Lösungen zu den Aufgaben und Übungen

Lösungen 92



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

1 • Dreidimensionale Objekte
Von der Realität zur Zeichnung

Auf der Elbinsel Kaltehofe befindet sich ein Museum zur Geschichte der Wasserversorgung Hamburgs. Die Ausstellungs- und Veranstaltungsräume teilen sich dabei auf zwei Gebäude auf: eine alte Villa aus dem Jahr 1894 und einen quaderförmigen Neubau aus dem Jahr 2011. Der Neubau ist in der Mitte dieser Seite abgebildet. Von diesem Gebäude sind Zeichnungen in verschiedenen Ansichten angefertigt worden (a bis k).

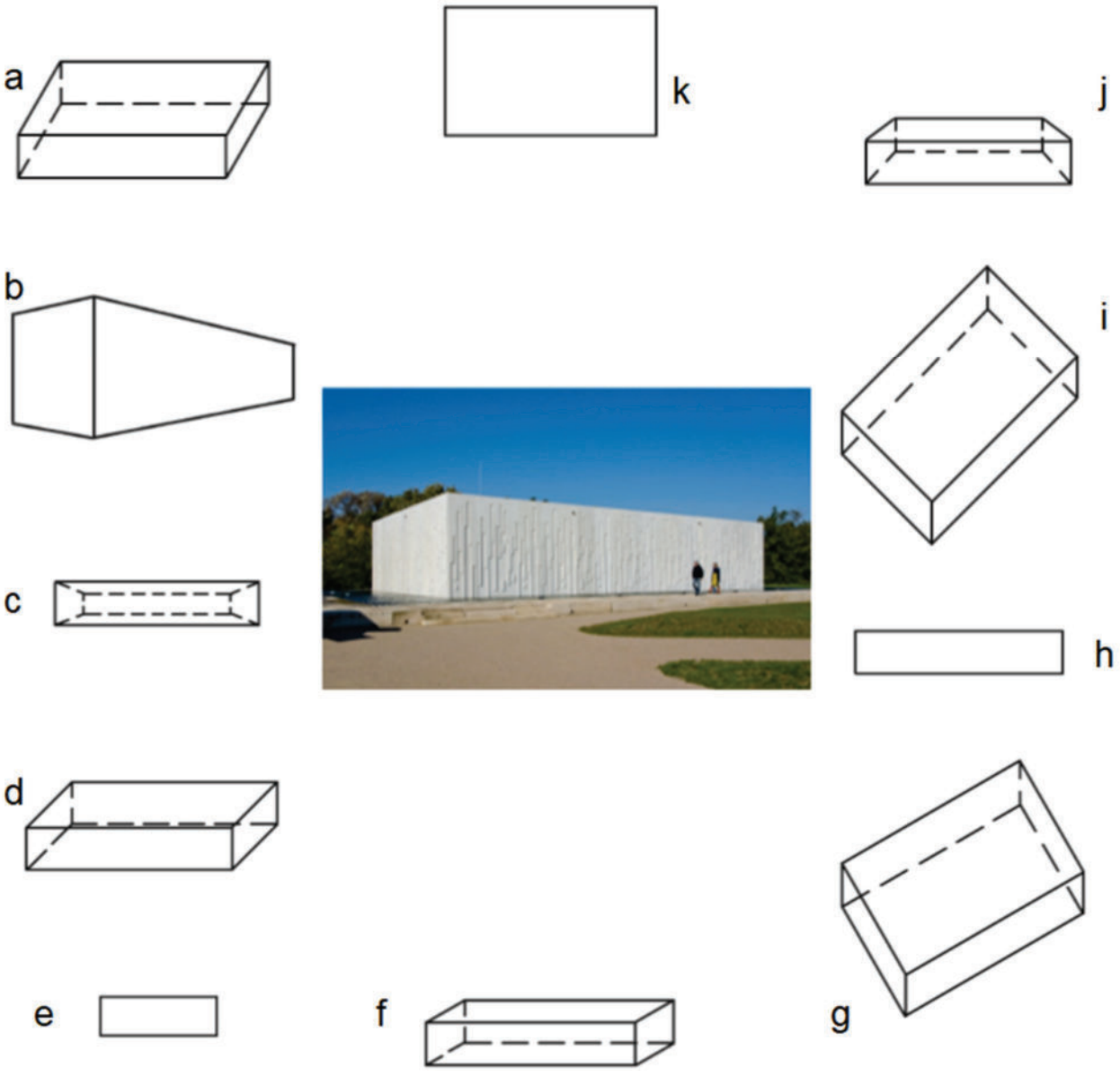


Foto-Quelle (Mitte): An-d bei Wikimedia Commons, 2013, unverändert, dieses Bild steht unter der Lizenz: CC BY-SA 3.0, creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0

(1) Aufgabe zum Einstieg

Beschreiben Sie drei der abgebildeten elf Zeichnungen des quaderförmigen Gebäudes und **nennen** Sie die jeweiligen Vor- und Nachteile der gewählten Darstellungen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Aufgabe: Elbinselvilla

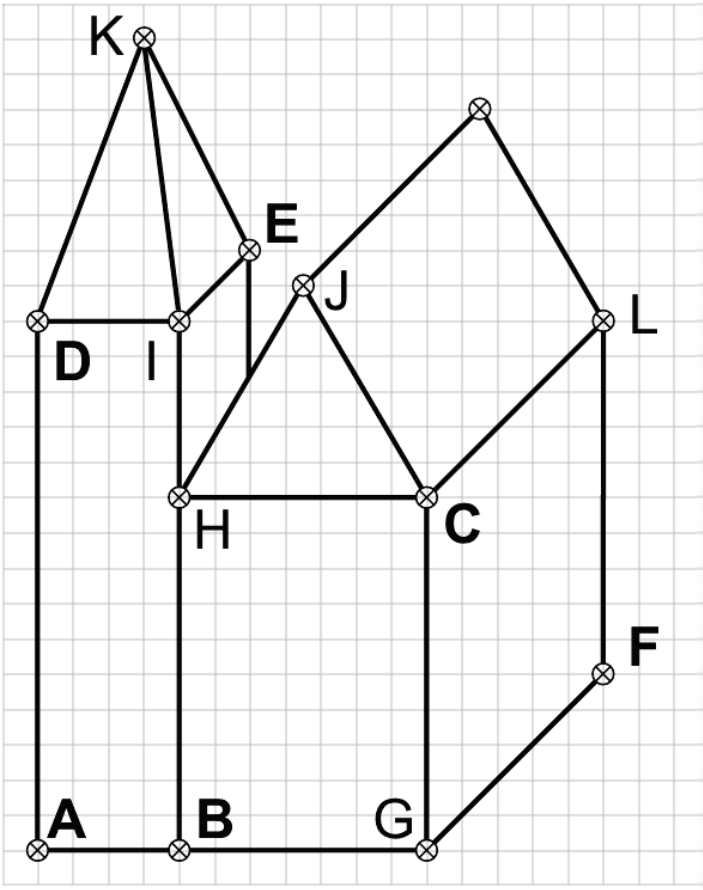




Foto-Quelle (rechts): NordNordWest/Wikipedia bei Wikimedia Commons, 2012, verändert, dieses Bild steht unter der Lizenz: CC BY-SA 3.0 DE, creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/deed.de

Auf der Elbinsel Kaltehofe steht die abgebildete historische Villa. Im Folgenden wird nur ein Teil des gesamten Gebäudes stark vereinfacht betrachtet.

In der Grafik ist der Gebäudeteil dreidimensional eingezeichnet worden. Zu einigen der benannten Punkte sind die Koordinaten im dreidimensionalen Raum angegeben.

$A(10|0|0)$ $B(10|4|0)$ $C(10|11|10)$ $D(10|0|15)$ $E(6|4|15)$ $F(0|11|0)$

alle Angaben in m.

a) **Geben** Sie die Breite des linken Gebäudeteils (den Abstand zwischen A und B) **an**.

b) **Geben** Sie die Breite des rechten Gebäudeteils **an** und **geben** Sie die Koordinaten des Punktes G **an**.

c) **Geben** Sie anhand der Koordinaten der Punkte C und G die Höhe des rechten Gebäudeteils ohne Dach **an**.

d) **Geben** Sie die Koordinaten der Punkte H und I **an**.

e) **Beschreiben** Sie, wie Sie die Koordinaten von Punkt I ermittelt haben.

f) **Geben** Sie die Tiefe des rechten Gebäudeteils (den Abstand zwischen G und F) **an** und **geben** Sie die Koordinaten des Punktes L **an**.

g) **Geben** Sie die fehlenden Koordinaten der Punkte $J(x|y|16)$ und $K(x|y|22)$ **an**.

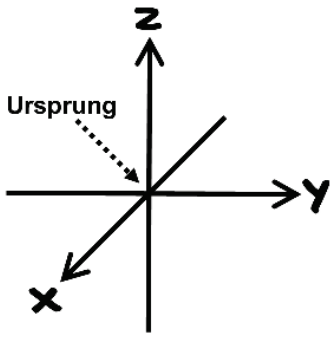
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Angeben von Punkten im dreidimensionalen Koordinatensystem

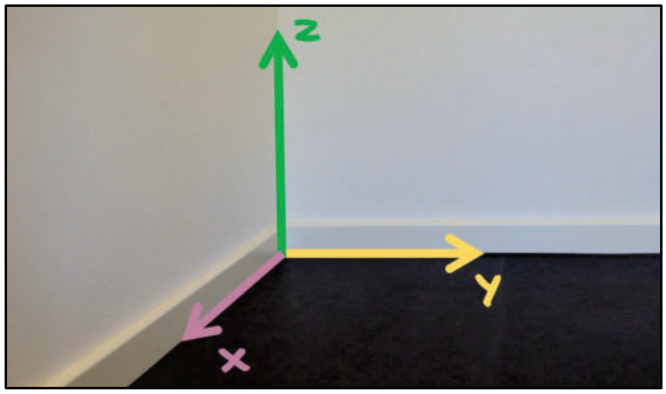
Die Darstellungen auf der Einstiegsseite (Seite 7) zeigen verschiedene Möglichkeiten, um ein dreidimensionales Objekt aus der Realität zweidimensional darzustellen.

In der Mathematik gibt es eine Festlegung auf eine dieser Darstellungen. Diese Darstellung des *dreidimensionalen Koordinatensystems* ist eine Erweiterung des zweidimensionalen Koordinatensystems um eine weitere *Koordinatenachse*. Die Koordinatenachsen werden als x-Achse, y-Achse und z-Achse bezeichnet (gebräuchlich ist auch x_1-, x_2-, x_3-Achse). Der Schnittpunkt der drei Koordinatenachsen wird *Koordinatenursprung* (kurz: Ursprung) genannt.



Um Punkte im dreidimensionalen Raum anzugeben, werden die Koordinaten der drei Achsen in alphabetischer Reihenfolge angegeben und wie folgt notiert: $\mathrm{P}(x|y|z)$.

(3) Aufgabe: Punkte im Raum finden und angeben



Suchen Sie sich eine Ecke in dem Raum, in dem Sie sich gerade befinden und stellen Sie sich dort ein Koordinatensystem entsprechend der Abbildung vor.

Verwenden Sie die Einheit Meter.

a) Wählen Sie ein beliebiges Objekt im Raum aus und **geben** Sie anhand Ihres Koordinatensystems den Punkt, an dem sich dieses Objekt befindet, **an**.

b) Zeigen Sie in Ihrem Raum (mit dem von Ihnen festgelegten Koordinatensystem) die Position des Punktes $\mathrm{P}(1|1{,}5|0{,}5)$.

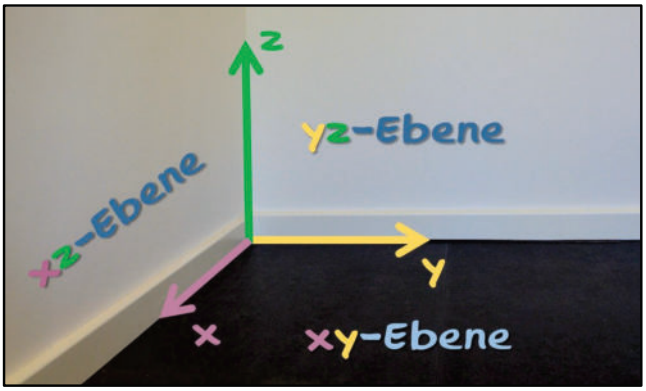
c) Zeigen Sie in Ihrem Raum die Position des Punktes $\mathrm{Q}(1|1{,}5|0)$.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieses Punktes bezogen auf Ihren Raum.

d) Zeigen Sie in Ihrem Raum die Position des Punktes $\mathrm{R}(-1|1{,}5|0{,}5)$.
Beschreiben Sie die besondere Lage dieses Punktes bezogen auf Ihren Raum.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Benennen von Koordinatenebenen



Eine Koordinatenebene ist eine Ebene, die durch zwei Achsen des Koordinatensystems festgelegt wird.

Die x-Achse und die y-Achse liegen in einer Ebene (hier der Boden). Diese Ebene wird als xy-Ebene bezeichnet.

Entsprechend wird die Ebene, die durch die y-Achse und z-Achse festgelegt wird, als yz-Ebene bezeichnet und die Ebene, die durch die x-Achse und die z-Achse aufgespannt wird, bezeichnet man als xz-Ebene.

(4) Aufgabe: Punkte im Raum

Beschreiben Sie die Lage der folgenden Punkte bezogen auf die Koordinatenachsen und Koordinatenebenen.

a) $A(3|2|0)$ b) $B(0|2|5)$ c) $C(0|2|0)$ d) $D(0|0|0)$

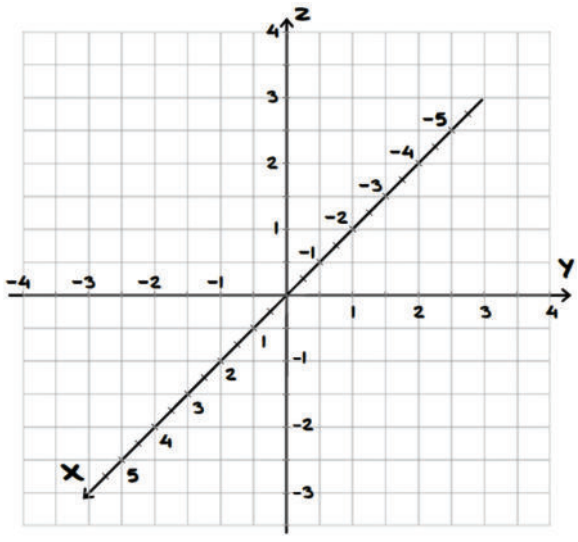
Zeichnen des dreidimensionalen Koordinatensystems

Um ein dreidimensionales Koordinatensystem auf kariertem Papier zu zeichnen, sind die folgenden Schritte zu beachten:

Zwei der Achsen liegen wie gewohnt auf den Kästchenlinien und stehen daher im rechten Winkel zueinander.

Die zusätzliche Achse geht durch den Schnittpunkt der anderen beiden Achsen (Ursprung) und verläuft diagonal durch die Kästchen.

Die Achsen werden wie in der nebenstehenden Skizze benannt, wobei die diagonal verlaufende Achse als x-Achse festgelegt wird. Die waagerecht verlaufende Achse ist dann die y-Achse und die senkrecht verlaufende Achse ist die z-Achse.



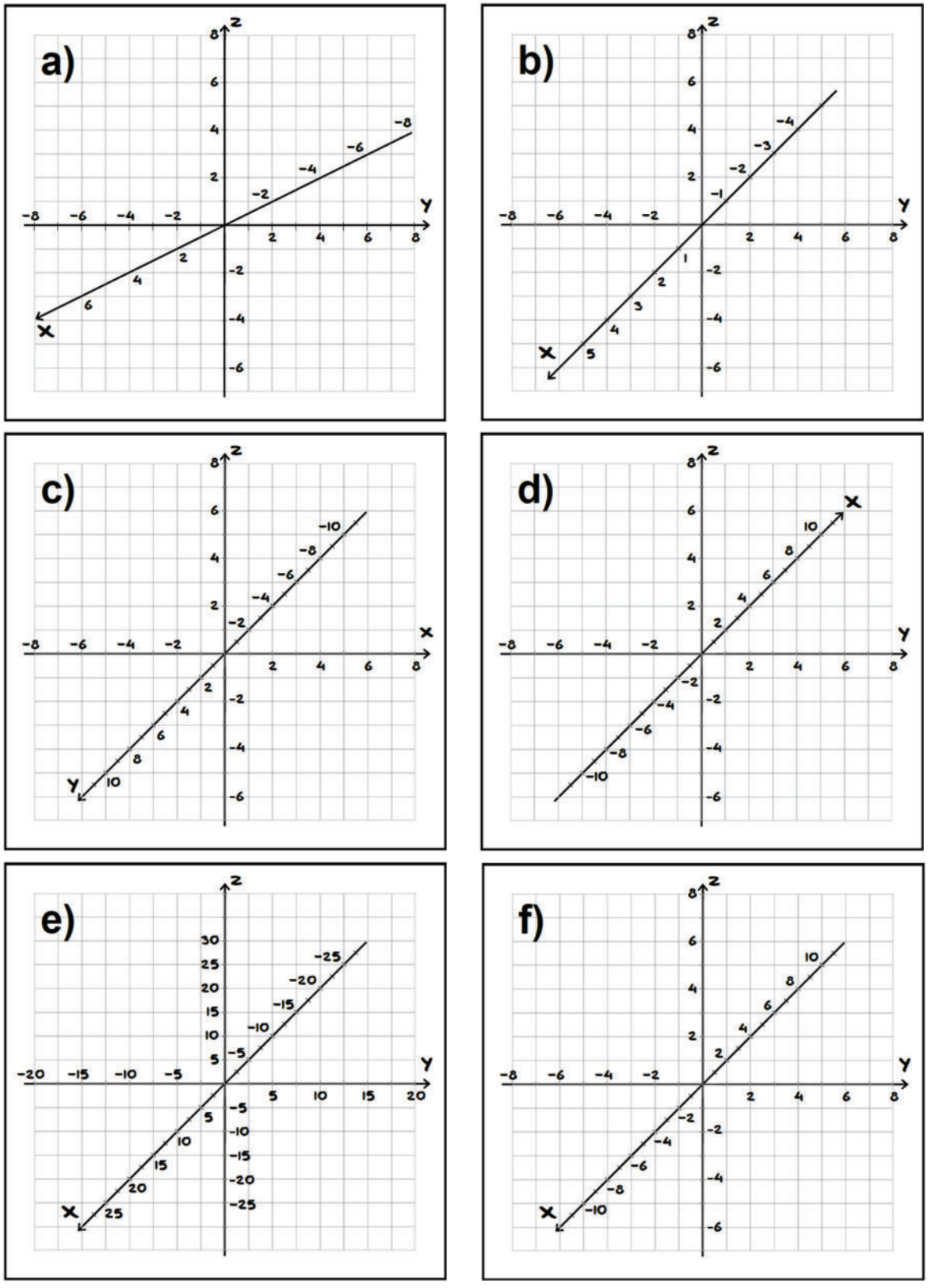
Zwei Kästchenlängen auf der y-Achse und z-Achse entsprechen einer Kästchendiagonalen auf der x-Achse (siehe Abbildung).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Übungsaufgabe: Fehlerhafte Koordinatensysteme

VERDACHT?! Betrachten Sie die folgenden Koordinatensysteme und **beschreiben** Sie die Fehler.



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Drohne über Kaltehofe

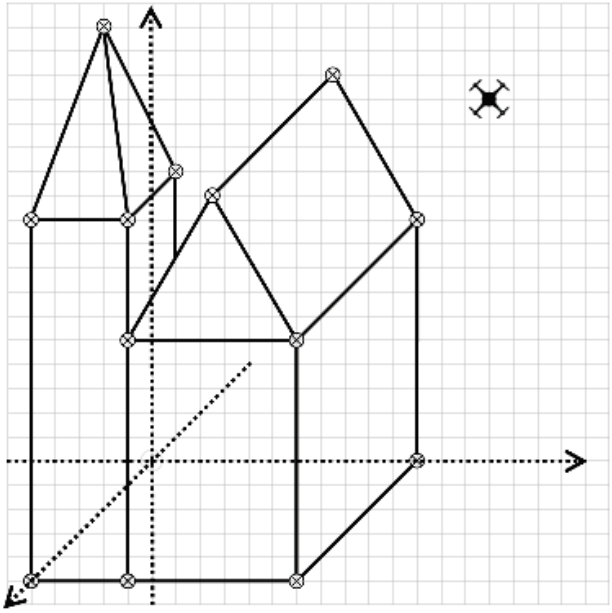
Für einen Dokumentarfilm fliegt eine Drohne über das Gelände. Die Drohne ist in der Abbildung eingezeichnet.

Eine Kästchenlänge entspricht dabei 1 m.

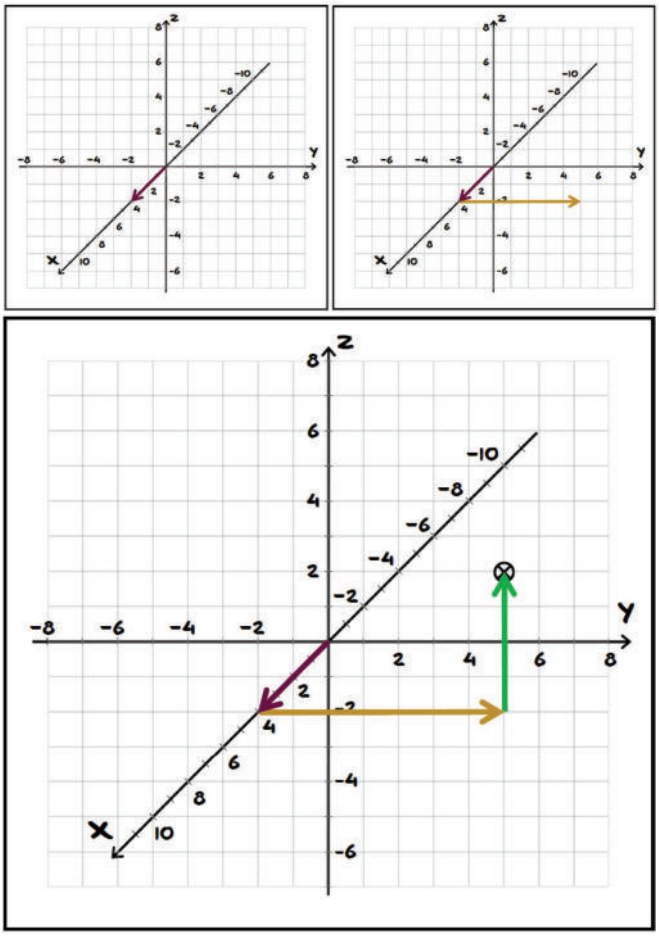
a) **Geben** Sie die Position der Drohne **an**.

Zwei weitere Lösungsvorschläge für Aufgabe a) lauten $\mathrm{P}(0|14|15)$ und $\mathrm{Q}(4|16|17)$.

b) **Bewerten** Sie die zwei angegebenen Lösungsvorschläge und Ihre Lösung aus Aufgabenteil a).



Einzeichnen von Punkten mit dem Koordinatenzug



Wie Sie in der Aufgabe „Drohne über Kaltehofe“ festgestellt haben, lassen sich die Koordinaten eines Punktes in einem dreidimensionalen Koordinatensystem nicht eindeutig ablesen.

Damit ein Punkt eindeutig abzulesen ist, kann man den zugehörigen *Koordinatenzug* einzeichnen. Dieser zeigt den Weg vom Ursprung zum Punkt parallel zu den drei Koordinatenachsen.

Auch zum Einzeichnen eines Punktes geht man entlang eines Koordinatenzuges. Dabei beginnt man beim Ursprung und geht von dort aus zuerst in x-, dann in y- und zuletzt in z-Richtung den Weg zu dem Punkt.

In dem Beispiel wurde der Punkt $\mathrm{P}(4|7|4)$ eingezeichnet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Übungsaufgabe: Einzeichnen von Punkten

Zeichnen Sie die folgenden Punkte in ein dreidimensionales Koordinatensystem **ein**.

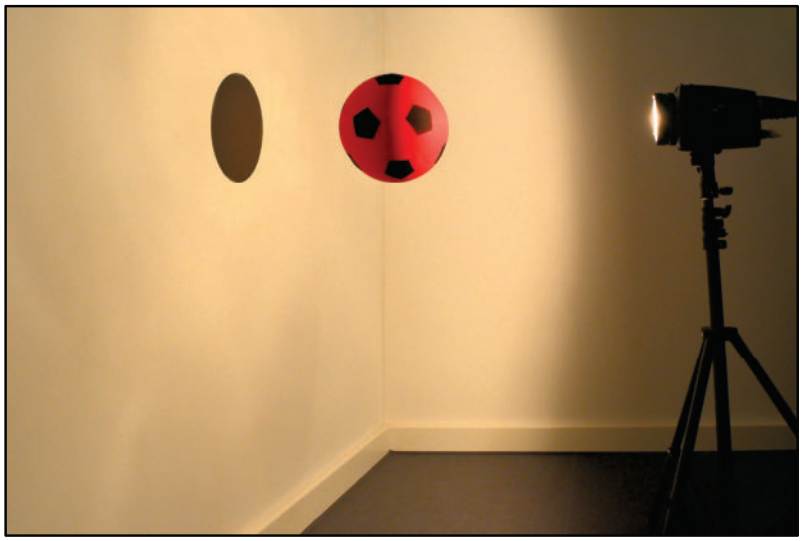
a) $A(3|2|4)$

b) $B(-1|2|5)$

c) $C(7|-2{,}5|1{,}5)$

d) $D(0|3|-2)$

(8) Aufgabe: Schattenwurf durch eine Lampe



In einem Raum wird ein Ball von einer Lampe angestrahlt und wirft einen Schatten auf die dahinterliegende Wand.

Der Mittelpunkt des Balls befindet sich im Punkt $B(1|0{,}5|1{,}5)$ – alle Angaben in Metern [m].

Das Koordinatensystem ist dabei wie im Foto auf Seite 10 orientiert.

a) **Geben** Sie den Punkt auf der Wand **an**, auf den der Ballmittelpunkt den Schatten wirft.

b) Ein weiteres Objekt wirft auf den Punkt $S'(1{,}1|0|1{,}4)$ einen Schatten.
Geben Sie **an**, wo sich das Objekt im Raum befinden könnte.

c) VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil b) lautet: "Das Objekt muss sich auf jeden Fall im Punkt $S(1{,}1|0{,}5|1{,}4)$ befinden."

Untersuchen Sie die Lösung und **beschreiben** Sie, was in der Lösung nicht berücksichtigt wurde.

d) Der Ball im Punkt B wird nun senkrecht von oben beleuchtet.
Geben Sie den Schattenpunkt des Ballmittelpunkts auf dem Fußboden **an**.

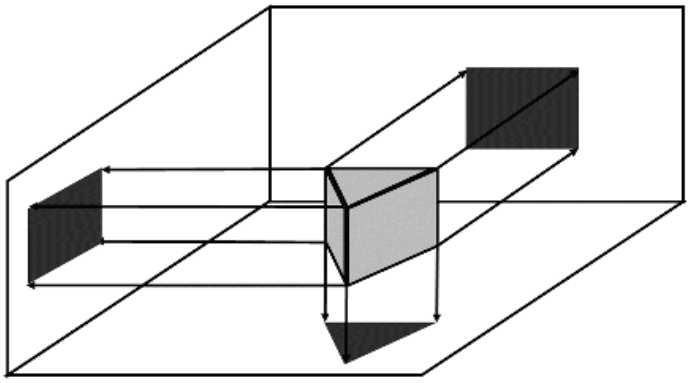
e) **Beschreiben** Sie durch eine allgemeine Regel, wie man den Schattenwurf eines Punktes auf die xy-, yz- oder xz-Ebene bestimmt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Projizieren auf die Koordinatenebenen

Eine Projektion ist eine Abbildung eines Punktes auf eine Ebene. Eine gebräuchliche Projektion ist die *Parallelprojektion* auf die Koordinatenebenen. Dabei wird ein Punkt parallel zu einer der Koordinatenachsen bis auf die Ebene verschoben.



Um einen Punkt P auf eine der drei Koordinatenebenen zu projizieren, werden die Werte von zwei Koordinaten beibehalten und eine Koordinate nimmt den Wert 0 an.

Projektionen auf die xy-Ebene: Die z-Koordinate wird 0.

Projektionen auf die yz-Ebene: Die x-Koordinate wird 0.

Projektionen auf die xz-Ebene: Die y-Koordinate wird 0.

Der durch die Projektion entstandene Punkt wird als *Bildpunkt* bezeichnet und durch einen Strich als P' gekennzeichnet. Der zu einem Bildpunkt P' gehörige Punkt P wird als *Urbildpunkt* bezeichnet.

Beispiel:

Die Projektion des Punktes $\mathrm{A}(1|3|-2)$ auf die yz-Ebene ergibt $\mathrm{A}'(0|3|-2)$.

(9) Übungsaufgabe: Projektionsrätsel

Gegeben sind die folgenden Punkte:

$\mathrm{A}(4\|7\|2)$	$\mathrm{B}(8\|5\|5)$	$\mathrm{C}(4\|9\|5)$
$\mathrm{D}(8\|11\|2)$	$\mathrm{E}(4\|3\|2)$	$\mathrm{F}(4\|5\|5)$
$\mathrm{G}(6\|7\|8)$	$\mathrm{H}(8\|9\|5)$	$\mathrm{I}(8\|7\|2)$

Geben Sie die Koordinaten der in die xz-Ebene projizierten Punkte (A', B',…) **an**.

Zeichnen Sie die projizierten Punkte in ein Koordinatensystem ein und verbinden Sie diese Punkte in alphabetischer Reihenfolge.

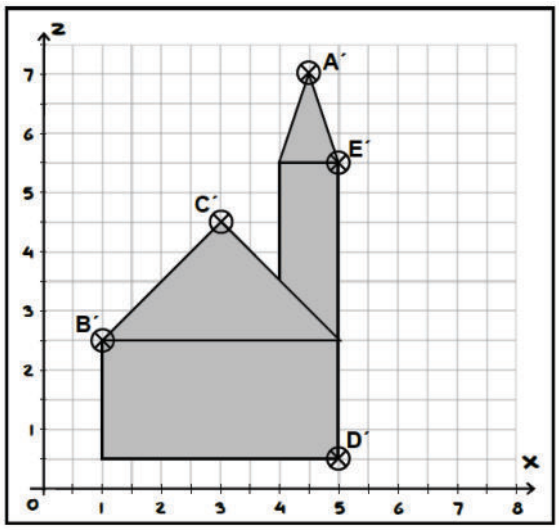
Wiederholen Sie das gleiche Vorgehen für die yz-Ebene (Punkte: A'', B'',…).

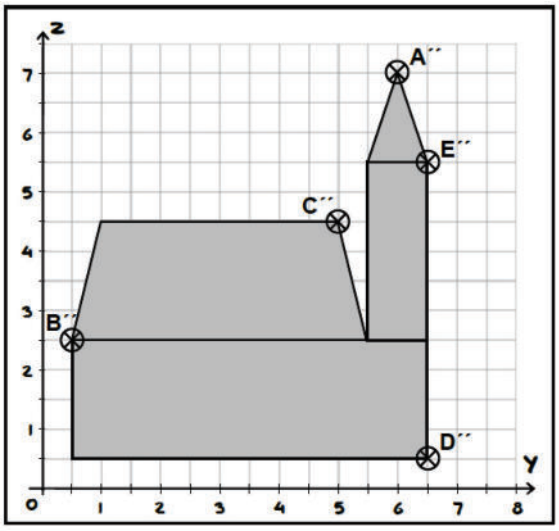
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(10) Übungsaufgabe: Urbildpunkte rekonstruieren

Gegeben sind die beiden folgenden Ansichten eines Gebäudes aus zwei unterschiedlichen Richtungen betrachtet.





Geben Sie die Koordinaten der Punkte A, B, C, D und E im dreidimensionalen Raum **an**.

(11) Aufgabe: Doppelhaus

Doppelhäuser zeichnen sich häufig dadurch aus, dass die beiden Wohneinheiten einen ähnlichen Aufbau haben. Die Wohneinheiten sind lediglich an der gemeinsamen Wand gespiegelt.

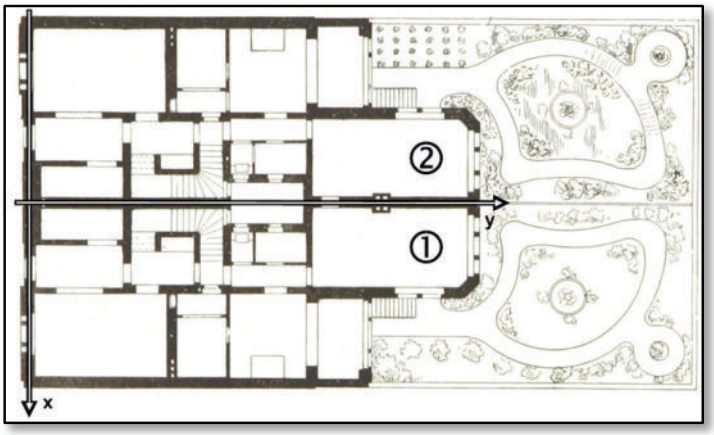
Die Positionen der folgenden Anschlüsse in der Haushälfte ① sind bekannt:

Wasseranschluss Küche: $A(9|9{,}9|0{,}3)$

Abwasser Gäste-WC: $B(11{,}5|10{,}1|0{,}2)$

Telefonanschluss: $C(6|21|0{,}25)$

Elektroanschluss Herd: $D(12|6|0{,}4)$



a) **Geben** Sie die zugehörigen Koordinaten für die Anschlüsse in der gespiegelten Haushälfte ② **an**.

Sie haben die Punkte an der Wand gespiegelt, die die beiden Haushälften trennt. Dies ist in unserem Koordinatensystem die yz-Ebene.

b) **Beschreiben** Sie durch eine allgemeine Regel, wie man einen Punkt an der yz-Ebene spiegelt. **Verallgemeinern** Sie Ihre Regel für die xy- und xz-Ebene.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

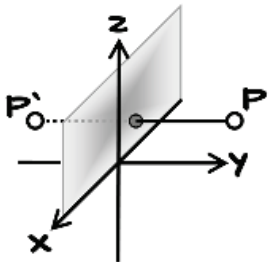
Spiegeln im dreidimensionalen Raum

Punkte können zum Beispiel an Koordinatenebenen, an Koordinatenachsen und am Koordinatenursprung gespiegelt werden. Hierfür gelten jeweils einfache Regeln:

Spiegelung an Koordinatenebenen

Bei der Spiegelung an einer Koordinatenebene entsteht der Bildpunkt auf der anderen Seite der Spiegelebene. Bildpunkt und Urbildpunkt haben den gleichen Abstand von der Spiegelebene und liegen auf einer Geraden, die senkrecht zur Spiegelebene verläuft.

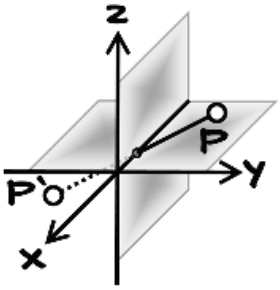
Um einen Punkt P an einer der drei Koordinatenebenen zu spiegeln, werden die Werte von zwei Koordinaten beibehalten und bei einer Koordinate wird das Vorzeichen geändert.



Spiegelung an der xy-Ebene:	Das Vorzeichen der z-Koordinate wird geändert.
Spiegelung an der yz-Ebene:	Das Vorzeichen der x-Koordinate wird geändert.
Spiegelung an der xz-Ebene:	Das Vorzeichen der y-Koordinate wird geändert.

Spiegelung an Koordinatenachsen

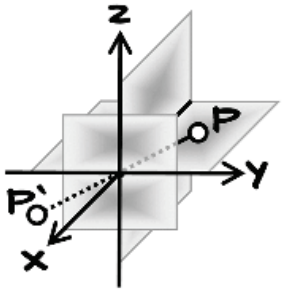
Um einen Punkt P an einer der drei Koordinatenachsen zu spiegeln, werden die Werte von einer Koordinate beibehalten und bei zwei Koordinaten wird das Vorzeichen geändert.



Spiegelung an der x-Achse:	Das Vorzeichen der y- und z-Koordinate wird geändert.
Spiegelung an der y-Achse:	Das Vorzeichen der x- und z-Koordinate wird geändert.
Spiegelung an der z-Achse:	Das Vorzeichen der x- und y-Koordinate wird geändert.

Spiegelung am Koordinatenursprung

Um einen Punkt P am Koordinatenursprung zu spiegeln, wird bei allen Koordinaten das Vorzeichen geändert.



<u>Beispiele:</u>

Spiegelung des Punktes $\mathrm{A}(1|3|-2)$ an der yz-Ebene ergibt $\mathrm{A}'(-1|3|-2)$.

Spiegelung des Punktes $\mathrm{A}(1|3|-2)$ an der y-Achse ergibt $\mathrm{A}'(-1|3|2)$.

Spiegelung des Punktes $\mathrm{A}(1|3|-2)$ am Koordinatenursprung ergibt $\mathrm{A}'(-1|-3|2)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(12) Übungsaufgabe: Spiegelungen

Gegeben sind die folgenden Punkte:

$\mathrm{A}(-5|1|12)$ $\mathrm{B}(3|-1{,}5|-5)$ $\mathrm{C}(-4|-9|-1)$

Geben Sie die Koordinaten der jeweiligen Bildpunkte **an:**

a) Spiegelung von B an der xz-Ebene
b) Spiegelung von A an der z-Achse
c) Spiegelung von B an der x-Achse
d) Spiegelung von C am Ursprung
e) Spiegelung von A an der xy-Ebene
f) Spiegelung von C an der yz-Ebene
g) Spiegelung von B an der y-Achse

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ dreidimensionales Koordinatensystem
- ❑ Ursprung
- ❑ Koordinatenachsen
- ❑ Koordinaten eines Punktes
- ❑ Koordinatenebenen
- ❑ Koordinatenzug
- ❑ Einzeichnen von Punkten im dreidimensionalen Raum
- ❑ Projizieren auf eine Koordinatenebene
- ❑ Bildpunkt und Urbildpunkt
- ❑ Spiegelungen im dreidimensionalen Raum

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

2 • Bewegungen im dreidimensionalen Raum
Von Flugbewegungen zu Vektoren



Foto: Weltrekord bei der Eröffnungszeremonie der Olympischen Winterspiele 2018 in Pyeongchang (Südkorea) - Copyright © Intel Corporation

(1) Aufgabe: Drohnensynchronflug 1

Bei den olympischen Spielen in Pyeongchang (Südkorea) wurde 2018 zur Eröffnung ein Drohnen-Synchronflug vorgeführt. Dabei flogen 1218 beleuchtete Drohnen in Formation und erzeugten so ein feuerwerkähnliches Spektakel am Himmel. Damit die Drohnen synchron fliegen konnten, wurden ihre Bewegungen mithilfe einer 3D-Software programmiert.

Eine Drohne befindet sich zu Beginn im Punkt $\mathrm{A}(-4|12|12)$ und nach der Ausführung der programmierten Bewegung im Punkt $\mathrm{A}'(13|4|26)$. Alle Angaben sind in Metern [m].

a) **Beschreiben** Sie die Bewegung der Drohne. **Geben** Sie hierbei auch **an**, wie sich die Drohne in x-, y- und z-Richtung bewegt hat.

Eine weitere Drohne befand sich zu Beginn im Punkt $\mathrm{B}(2|-2|3)$.

b) **Geben** Sie den Punkt B' **an**, in dem sich diese Drohne nach der gleichen programmierten Bewegung befindet.

Eine dritte Drohne befindet sich nach der programmierten Bewegung im Punkt $\mathrm{C}'(19|10|15)$.

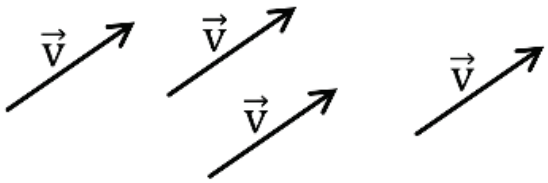
c) **Geben** Sie den Punkt C **an**, in dem sich diese Drohne vor der programmierten Bewegung befand.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Vektoren, Gegenvektoren und Ortsvektoren im dreidimensionalen Raum

Verschiebungen im Raum lassen sich durch *Vektoren* darstellen. Anschaulich kann man sich einen Vektor als einen Pfeil vorstellen, der einen Urbildpunkt mit seinem Bildpunkt verbindet. Pfeile, die die gleiche Länge haben, parallel zueinander sind und in die gleiche Richtung zeigen, werden durch den gleichen Vektor beschrieben.



Im vorherigen Beispiel haben sich die Drohnen durch die programmierte Bewegung immer um $+17$ in x-Richtung, -8 in y-Richtung und um $+14$ in z-Richtung bewegt. Die zugehörige mathematische Darstellung der Verschiebung in x-, y- und z-Richtung wird wie folgt als *Spaltenvektor* notiert:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Ein Vektor im dreidimensionalen Raum besteht somit aus drei Komponenten, welche die jeweilige Verschiebung angeben.

Vektoren werden mit Kleinbuchstaben benannt. Ein Pfeil über dem Buchstaben zeigt dabei, dass es sich um einen Vektor handelt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Alternativ kann ein Vektor auch durch seinen Anfangspunkt A und Endpunkt A' bezeichnet werden. Dabei werden die beiden Punkte hintereinander aufgeschrieben und ein Pfeil darüber zeigt wieder, dass es sich um einen Vektor handelt:

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}'} = \begin{pmatrix} 17 \\ -8 \\ 14 \end{pmatrix}$$

Der Vektor $\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}}$, also der Vektor von A' zu A, verläuft in die entgegengesetzte Richtung und wird als *Gegenvektor* bezeichnet. Dies hat zur Folge, dass sich die Vorzeichen ändern. Somit lautet der Vektor:

$$\overrightarrow{\mathrm{A}'\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} -17 \\ 8 \\ -14 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

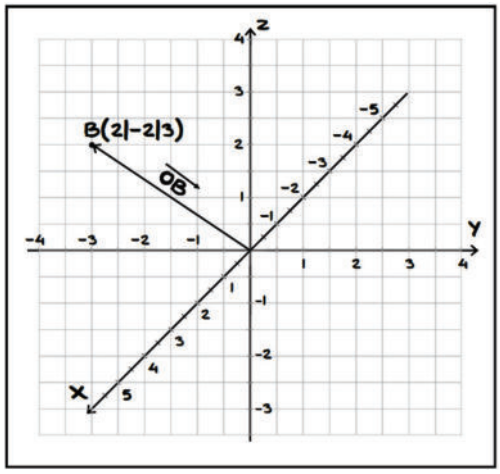
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Neben den Vektoren, die eine Bewegung oder eine Verschiebung darstellen, gibt es auch Vektoren, die eine Position im Raum angeben. Diese werden *Ortsvektoren* genannt.

Anschaulich verbinden Ortsvektoren den Koordinatenursprung (O für lateinisch „origo“) mit dem betrachteten Punkt P.

Der zugehörige Ortsvektor wird $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ genannt.

In der Abbildung lautet der Ortsvektor zum Punkt $\mathrm{B}(2|-2|3)$ dann $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.



Eingabe eines Vektors mit der Bezeichnung v

CASten

Casio ClassPad II: Mit Doppelklick auf die Schaltfläche [▮□] [▬] [▦] einen Vektor erzeugen. Dahinter über den Pfeil einen Namen zuweisen: ⇒ **v**

Geogebra: **v=Vektor[(***x-Koordinate*,*y-Koordinate*,*z-Koordinate***)]**

TI-Nspire CAS: **v:=[** eingeben und dann mit ↵ weitere Dimensionen hinzufügen. Anschließend die Koordinaten eingeben.

(2) Aufgabe: Drohnensynchronflug 2



Eine Drohne befindet sich im Punkt $\mathrm{D}(1|-2|4)$ – alle Angaben in Metern [m].

a) **Geben** Sie den zum Punkt D gehörenden Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ **an**.

Sie bewegt sich entlang des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b) **Geben** Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OD'}}$ des Punktes $\mathrm{D'}$ **an**, an dem sich die Drohne nach der Bewegung befindet.

Die Drohne bewegt sich im Anschluss daran entlang des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ weiter.

c) **Geben** Sie den Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OD''}}$ des Punktes $\mathrm{D''}$ **an**, an dem sich die Drohne nach der zusätzlichen Bewegung befindet.

d) **Geben** Sie den Vektor $\vec{w}$ **an**, der direkt vom Punkt D zum Punkt $\mathrm{D''}$ führt.

e) **Zeichnen** Sie die beschriebene Flugroute der Drohne und Ihre Lösung zu Aufgabenteil d) in ein Koordinatensystem **ein**.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

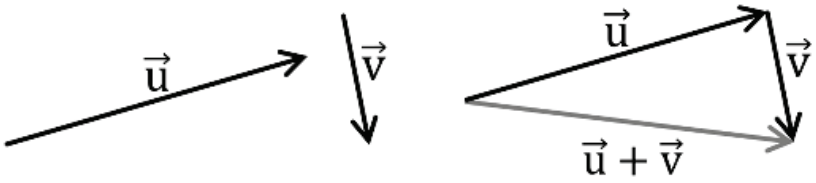
Addieren und Subtrahieren von Vektoren

Wenn zwei Bewegungen hintereinander ausgeführt werden, lässt sich dies mathematisch durch eine Addition der zugehörigen Vektoren ausdrücken.

Zur **Addition** von Vektoren werden die Komponenten der zwei Vektoren zeilenweise addiert.

$$\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich lässt sich die Addition zweier Vektoren darstellen, indem man den ersten Vektor als Pfeil einzeichnet und an dessen Pfeilspitze den zweiten Vektorpfeil beginnen lässt.

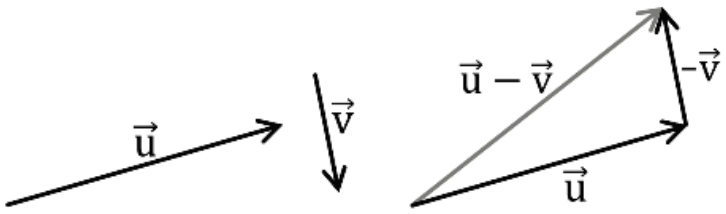


Der Ergebnisvektor lässt sich dann als Pfeil darstellen, der am Ausgangspunkt des ersten Vektors beginnt und an der Pfeilspitze des zweiten Vektors endet.

Die **Subtraktion** von Vektoren funktioniert ähnlich:

$$\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix}$$

Anschaulich lässt sich die Subtraktion zweier Vektoren mithilfe des Gegenvektors von $\vec{v}$ darstellen, indem man den ersten Vektor als Pfeil einzeichnet und an dessen Pfeilspitze den Gegenvektor des zweiten Vektors beginnen lässt.



Der Ergebnisvektor lässt sich wieder als Pfeil darstellen, der am Ausgangspunkt des ersten Vektors anfängt und an der Pfeilspitze des zweiten Vektors endet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Nullvektor

Der Nullvektor $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ unterscheidet sich von allen anderen Vektoren dadurch, dass er keine Richtung angibt und die Länge 0 besitzt. Bei der Addition und Subtraktion von Vektoren ist er das neutrale Element:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

(3) Übungsaufgabe: Addieren und Subtrahieren von Vektoren

Gegeben sind die folgenden drei Vektoren:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Ergebnisse der folgenden Aufgaben.

a) $\vec{u} + \vec{v}$

b) $\vec{v} + \vec{u}$

c) $\vec{u} - \vec{w}$

d) $\vec{v} + \vec{w} - \vec{u}$

e) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u}$

(4) Aufgabe: Drohnensynchronflug 3

Eine Drohne befindet sich im Punkt A mit dem zugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Sie bewegt sich zu dem Punkt A' mit dem zugehörigen Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OA}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$.

a) **Berechnen** Sie den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{AA}'}$, der von Punkt A zu Punkt A' führt.

Eine weitere Drohne befindet sich im Punkt $\mathrm{B}(2{,}5|-1|2)$ und bewegt sich parallel zu der ersten Drohne.

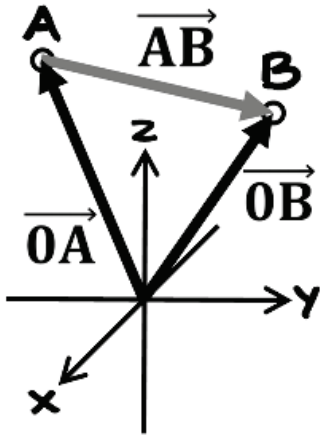
b) **Berechnen** Sie mithilfe der Vektorrechnung den Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OB}'}$ des Punktes B', zu dem sich die Drohne bewegt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Berechnen von Vektoren von Punkt A zu Punkt B

In der analytischen Geometrie werden bei der Darstellung von Lösungswegen keine Punkte, sondern Vektoren verwendet. Also wird zunächst zu jedem Punkt der zugehörige Ortsvektor angegeben, bevor die Berechnungen durchgeführt werden.



Um den Vektor $\overrightarrow{AB}$ vom Punkt A zum Punkt B zu berechnen, werden zunächst die Ortsvektoren $\overrightarrow{OA}$ und $\overrightarrow{OB}$ angegeben. Im Anschluss wird der Ortsvektor des Startpunktes von dem des Zielpunktes subtrahiert, also $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$.

Merkregel: "Ziel minus Anfang".

(5) Übungsaufgabe: Mit Vektoren von Punkt zu Punkt

Gegeben sind die folgenden Punkte:

$$A(-2|4|3) \qquad B(4|-6|-1) \qquad C(0|2|-5)$$

Berechnen Sie die folgenden Vektoren.

a) $\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{CB}$

c) $\overrightarrow{CA}$

d) $\overrightarrow{AC}$

VERDACH?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil a) lautet:

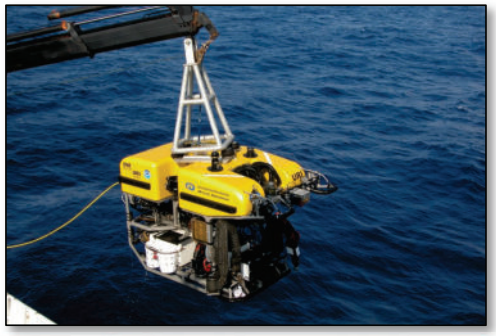
$$\overrightarrow{AB} = (4|-6|-1) - (-2|4|3) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

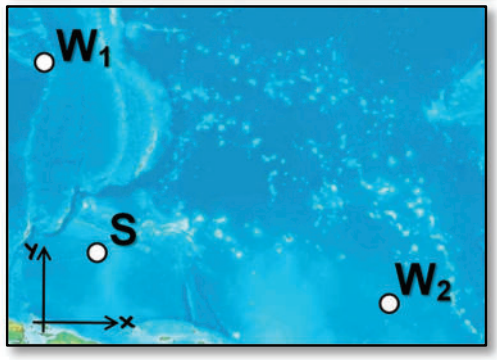
e) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Tauchroboter 1





Um Schiffswracks zu untersuchen, werden zum Beispiel Tauchroboter (ROV, Remotely Operated Vehicle) verwendet, die über eine Versorgungsleitung mit einem Schiff an der Wasseroberfläche verbunden sind.

In der Nordsee soll ein in zwei Teile zerbrochenes Schiffswrack untersucht werden, indem ein Tauchroboter von einem Forschungsschiff herabgelassen wird.

Das Forschungsschiff befindet sich im Punkt $S(30|40|0)$ und hat eine 325 m lange Versorgungsleitung an Bord. Die beiden Wrackteile werden in den Punkten $W_1(0|150|-300)$ und $W_2(200|10|-300)$ vermutet. Der Tauchroboter wird mithilfe eines Programms, welches Tauchrouten in Form von Vektoren nutzt, gesteuert.

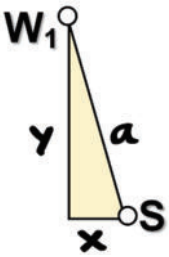
a) **Geben** Sie den Vektor **an**, mit dem der Tauchroboter vom Forschungsschiff zum ersten Wrackteil gelangt.

Danach soll der Tauchroboter vom ersten zum zweiten Wrackteil fahren.

b) **Geben** Sie den Vektor für diese Bewegung **an.**

c) **Berechnen** Sie die Strecke, die der Tauchroboter zwischen W_1 und W_2 zurücklegt und **beschreiben** Sie Ihren Lösungsweg.

VERDACHT?! Ein Forscher will prüfen, ob die Versorgungsleitung lang genug ist und berechnet den Abstand a zwischen dem Forschungsschiff S und dem ersten Wrackteil W_1 folgendermaßen:

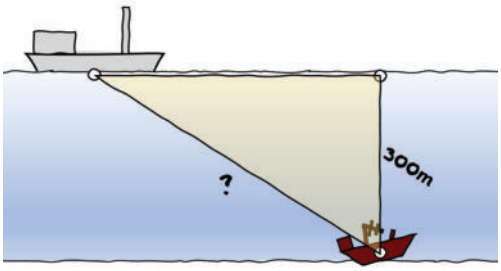


$a^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0-30)^2 + (150-40)^2} \approx 114\text{m}$

„Der Abstand beträgt 114 Meter, also ist die Leitung lang genug.“

d) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Ein anderer Forscher fertigt eine zusätzliche Skizze an:



e) **Beschreiben** Sie, wie man mithilfe dieser Skizze den tatsächlichen Abstand zwischen dem Schiff S und dem ersten Wrackteil W_1 bestimmen kann und **berechnen** Sie diesen.

f) **Untersuchen** Sie, ob die Versorgungsleitungslänge ausreichend ist, um auch das zweite Wrackteil zu erreichen.

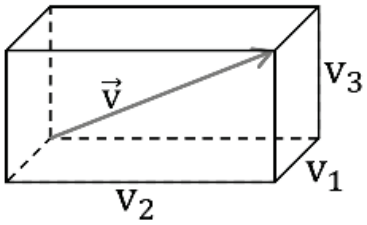
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Bestimmen der Länge / des Betrages eines Vektors

Die Länge eines Vektors $\vec{v}$ wird auch als *Betrag* eines Vektors bezeichnet und durch Betragsstriche gekennzeichnet: $|\vec{v}|$

Anschaulich lässt sich die Länge eines Vektors als Raumdiagonale in einem Quader darstellen.



Wendet man den Satz des Pythagoras zweimal an, so lässt sich die Länge dieser Raumdiagonalen und damit die Länge des Vektors berechnen.

Die Formel zur Berechnung der Länge eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ lautet:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Beispiel:

Die Länge des Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ beträgt $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$.

(7) Übungsaufgabe: Bestimmen der Länge / des Betrages von Vektoren

a) **Berechnen** Sie die Länge des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und die Länge des Vektors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) **Berechnen** Sie den Abstand zwischen den beiden Punkten $A(2|-4|5)$ und $B(0|7|-9)$.

CASten

Berechnen des Betrags eines Vektors

Casio ClassPad II: norm(*Vektor*)

Geogebra: Länge(*Vektor*)

TI-Nspire CAS: norm(*Vektor*)

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(8) Aufgabe: Tauchroboter 2



Ein Tauchroboter wird von dem Forschungsschiff im Punkt $(0|0|0)$ ins Wasser gelassen. Der Tauchroboter bewegt sich innerhalb von 3 Minuten entlang des folgenden Vektors:

$$\vec{t} = \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ -25 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in Metern [m]

a) **Berechnen** Sie die von dem Tauchroboter in 3 Minuten zurückgelegte Strecke und **bestimmen** Sie seine Geschwindigkeit in Metern pro Minute $\left[\frac{\text{m}}{\text{min}}\right]$.

Der Tauchroboter bewegt sich weitere 3 Minuten in die gleiche Richtung.

b) **Berechnen** Sie den Vektor, der die gesamte Bewegung innerhalb der 6 Minuten beschreibt.

Der Tauchroboter taucht insgesamt 30 Minuten entlang des gegebenen Vektors $\vec{t}$.

c) **Berechnen** Sie den Vektor, der diese Bewegung beschreibt.

d) **Berechnen** Sie die Zeit, die der Tauchroboter benötigt, um 300 Meter tief zu tauchen. **Ermitteln** Sie den zugehörigen Vektor.

Skalarmultiplikation

Die Hintereinanderausführung eines Vektors kann entweder durch mehrfache Addition des Vektors oder durch Multiplikation mit einer Zahl durchgeführt werden.

Wird ein Vektor beispielsweise drei Mal hintereinander ausgeführt, dann gilt:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + v_1 + v_1 \\ v_2 + v_2 + v_2 \\ v_3 + v_3 + v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot v_1 \\ 3 \cdot v_2 \\ 3 \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

Somit gilt allgemein:

$$a \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot v_1 \\ a \cdot v_2 \\ a \cdot v_3 \end{pmatrix} \text{ mit } a \in \mathbb{R}$$

Der Faktor a wird als *Skalar* bezeichnet.

Wenn zwei Vektoren Vielfache voneinander sind, werden sie als *linear abhängig* bezeichnet.

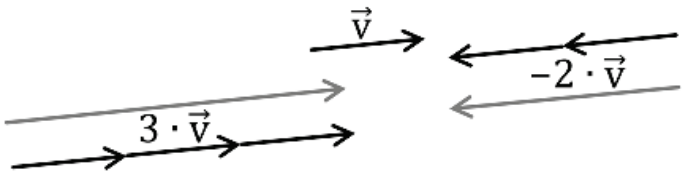
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel:

$$7 \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10{,}5 \\ -14 \\ 42 \end{pmatrix}$$

Anschaulich wird der Vektor $\vec{v}$ um den Faktor a vervielfacht.



(9) Übungsaufgabe: Skalarmultiplikation

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die folgenden Vektoren.

a) $5 \cdot \vec{v}$
b) $3{,}5 \cdot \vec{u}$
c) $2 \cdot \vec{v} + 7 \cdot \vec{u}$
d) $3 \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{u}$
e) $-0{,}5 \cdot \vec{v}$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Vektor
- ❑ Gegenvektor
- ❑ Ortsvektor
- ❑ Darstellen eines Vektors als Pfeil
- ❑ Addieren und Subtrahieren von Vektoren
- ❑ Nullvektor
- ❑ Berechnen eines Vektors zwischen zwei Punkten
- ❑ Bestimmen der Länge / des Betrages eines Vektors
- ❑ Skalarmultiplikation

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

3 • Geraden im dreidimensionalen Raum
Von der Flugbahn zur Parameterdarstellung einer Geraden

(1) Aufgabe: Flugbahn eines Flugzeugs



Die Flugsicherung ortet ein Flugzeug im Punkt $F(22|41|7{,}3)$.

Der Radarturm der Flugsicherung befindet sich im Ursprung des Koordinatensystems. Das Flugzeug bewegt sich innerhalb von einer Minute entlang des folgenden Vektors:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 13{,}3 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in Kilometern [km]

a) **Berechnen** Sie die Position, an der sich das Flugzeug eine Minute später befindet.

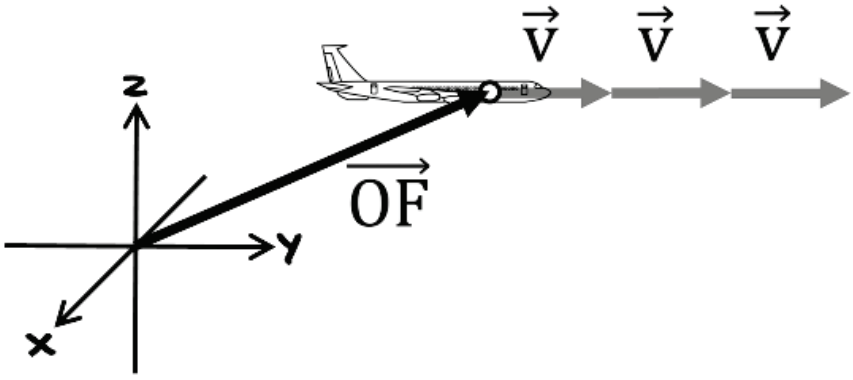
b) **Berechnen** Sie die Position, an der sich das Flugzeug drei Minuten nach der Ortung in Punkt F befindet.

c) **Berechnen** Sie die Position, an der sich das Flugzeug fünf Minuten vor dem Erreichen von Punkt F befand.

d) **Bestimmen** Sie die Entfernung, die das Flugzeug innerhalb von einer Minute zurücklegt.

Parameterdarstellung einer Geraden

Mithilfe einer Position und der Richtung eines Flugzeugs lässt sich die Flugbahn des Flugzeugs mathematisch beschreiben. In der Mathematik beschreibt man eine solche Bewegung mithilfe einer Geraden. Eine Gerade lässt sich beschreiben durch die Angabe eines Punktes auf der Geraden und einen Richtungsvektor, der mehrfach hintereinander ausgeführt wird.



In Bezug auf die in der Aufgabe „Flugbahn eines Flugzeugs“ (Seite 28) beschriebene Flugbahn berechnet man beispielsweise die neue Position des Flugzeugs nach drei Minuten durch die folgende Rechnung: $\overrightarrow{OF} + 3 \cdot \vec{v}$. Für die Berechnung der Position nach einer beliebigen Anzahl von t Minuten rechnet man $\overrightarrow{OF} + t \cdot \vec{v}$. Dabei kann t auch negativ sein.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

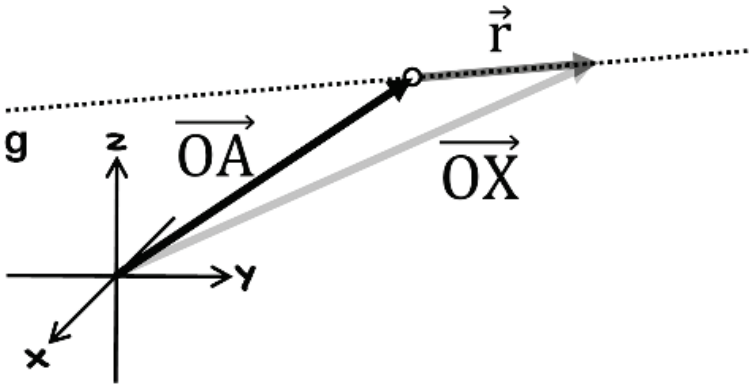
Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Term $\overrightarrow{OF} + t \cdot \vec{v}$ beschreibt eine Gerade im Raum. Die allgemeine Schreibweise für eine Gerade g lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{r}$$

mit $t \in \mathbb{R}$

Hierbei wird der Vektor $\overrightarrow{OA}$ als *Stützvektor* der Geraden g bezeichnet und der Vektor $\vec{r}$ wird *Richtungsvektor* genannt. t ist der *Parameter* der Gleichung. Durch die Variation von t lassen sich Ortsvektoren zu allen Punkten, die auf der Geraden liegen, angeben.



Dadurch, dass der Stützvektor $\overrightarrow{OA}$ zu einem beliebigen Punkt der Geraden g zeigen kann und auch Vielfache des Richtungsvektors $\vec{r}$ verwendet werden können, gibt es unendlich viele Parameterdarstellungen für jede Gerade.

(2) Übungsaufgabe: Parameterdarstellung einer Geraden

Geben Sie anhand der Vorgaben die zugehörige Parameterdarstellung **an** und **berechnen** Sie die Ortsvektoren der Punkte zu den Parametern $t = 3$ und $t = -4$.

a) $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ -7 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

c) $C(0|8|15)$ und $\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3) Aufgabe: U-Boot-Tauchfahrt

Ein Forschungsunterseeboot taucht vom Punkt $T_1(100|250|-12)$ zum Punkt $T_2(-4000|140|-30)$ (alle Angaben in m).

a) **Geben** Sie die Parameterdarstellung der Geraden u **an**, die die Tauchroute mathematisch beschreibt.

b) **Untersuchen** Sie, ob die Punkte $T_3(-6050|85|-39)$ und $T_4(-8100|45|-43)$ auf der Tauchroute liegen.

c) **Berechnen** Sie, in welchem Punkt sich das U-Boot befindet, wenn es eine Tiefe von 25 m erreicht hat.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Aufstellen einer Parameterdarstellung einer Geraden aus zwei Punkten

Sind zwei Punkte A und B einer Geraden gegeben, so muss aus den beiden Punkten zunächst der Richtungsvektor berechnet werden. Dazu wird der Ortsvektor des Startpunktes von dem des Zielpunktes abgezogen:

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Einer der beiden Ortsvektoren wird dann als Stützvektor in der Parameterdarstellung der Geraden verwendet:

$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ beziehungsweise $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{AB}$ mit $t \in \mathbb{R}$

(4) Übungsaufgabe: Parameterdarstellung einer Geraden aus 2 Punkten

Bestimmen Sie anhand der vorgegebenen Punkte die zugehörige Parameterdarstellung.

a) $A(2|10|-4)$ und $B(23|11|-2)$

b) $C(17|975|7)$ und $D(43|-12|38)$

c) $E(985|63|19)$ und $F(-35|6|5)$

Durchführen einer Punktprobe bei Geraden

In der Aufgabe „U-Boot-Tauchfahrt“ (Seite 29) sollte in Aufgabenteil b) überprüft werden, ob ein bestimmter Punkt auf dem Kurs des U-Bootes liegt.

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt P auf einer Geraden g liegt, verwendet man die *Punktprobe*. Hierbei wird die Parameterdarstellung der Geraden mit dem Ortsvektor des Punktes P gleichgesetzt. So entsteht ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen, in dem t die gesuchte Größe ist.

$$\overrightarrow{OA} + t \cdot \vec{r} = \overrightarrow{OP}$$

Beispiel:

Es wird untersucht, ob der Punkt $P(4|15|1)$ auf der Geraden g liegt.

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zunächst wird die Parameterdarstellung der Geraden mit dem Ortsvektor des Punktes gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\15\\1\end{pmatrix}$$

So ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, bestehend aus drei Gleichungen:

$$\begin{vmatrix}-2+3t=4\\1+7t=15\\4-3t=1\end{vmatrix}$$

Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung (in der ersten und zweiten Zeile ist $t=2$ die Lösung und in der dritten Zeile ergibt sich $t=1$). Somit liegt der Punkt nicht auf der Geraden.

Existiert hingegen eine Lösung für das Gleichungssystem, so liegt der Punkt auf der Geraden.

CASten

Lösen eines Gleichungssystems

Casio ClassPad:	Keyboard → Math1 → 
Geogebra:	Lösungen[{Gleichung 1, Gleichung 2, …},{Variable 1, Variable 2,…}]
TI-Nspire CAS:	solve(*Gleichung1* and *Gleichung2* and …,{*Variable1*, *Variable2*,…})

(5) Übungsaufgabe: Punktprobe

Überprüfen Sie, ob der Punkt $\mathrm{P}(10|-3|8)$ auf den gegebenen Geraden liegt.

a) $g\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}4\\11\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}3\\-7\\7\end{pmatrix}$

b) $h\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-12\\-8\\0\end{pmatrix}$

Überprüfen Sie, ob die folgenden drei Punkte auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

c) $\mathrm{A}(-3|-1|9)$, $\mathrm{B}(6|11|12)$ und $\mathrm{C}(7{,}5|13|12{,}5)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Aufgabe: Landeanflug eines Flugzeugs



Ein Flugzeug fliegt den Flughafen an. Zu Beginn des Sinkfluges befindet sich das Flugzeug im Punkt $A(-8|-15{,}6|2{,}23)$ und 10 Minuten später befindet es sich im Punkt $B(16{,}6|13{,}5|0{,}114)$ (alle Angaben in km).

a) **Berechnen** Sie die in der angegebenen Zeit zurückgelegte Flugstrecke und die Geschwindigkeit des Flugzeugs.

b) **Geben** Sie die Parameterdarstellung der Geraden **an**, die diese Flugbahn beschreibt.

Im Punkt B beginnt das Flugzeug den Landeanflug und fliegt in die Richtung des Vektors

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2{,}9 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

c) **Geben** Sie die Parameterdarstellung der Geraden **an**, die diesen Landeanflug beschreibt.

d) **Untersuchen** Sie, ob diese Flugbahn den idealen Aufsetzpunkt $C(18{,}025|15{,}153|0)$ auf der Landebahn trifft.

e) **Bestimmen** Sie den Punkt, in dem sich das Flugzeug in einer Flughöhe von $0{,}05\ \mathrm{km}$ befindet.

f) **Reality Check:** „Alle Flugbahnen lassen sich durch Geraden darstellen.“
Begründen Sie, warum diese Aussage in der Realität nur mit Einschränkungen zutrifft (vgl. Modellierungskreislauf auf Seite 131).

Bestimmen eines Punktes einer Geraden bei vorgegebenen Bedingungen

Ist auf einer Geraden g ein Punkt P gesucht, der gewisse vorgegebene Bedingungen erfüllen soll, so lässt sich dieser Punkt wie bei der Punktprobe berechnen. Hierbei werden die fehlenden Koordinaten durch Variablen ersetzt und das entstehende Gleichungssystem gelöst.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel:

Bestimmen Sie den Punkt der Geraden $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit der y-Koordinate 2.

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

So entsteht ein lineares Gleichungssystem bestehend aus drei Gleichungen:

$$\left| \begin{matrix} 4 + 3t = x \\ 11 - 3t = 2 \\ -6 + 5t = z \end{matrix} \right|$$

Es ergibt sich $t = 3$, $x = 13$ und $z = 9$. Das bedeutet, dass der Punkt $\mathrm{P}(13|2|9)$ der gesuchte Punkt auf der Geraden ist.

(7) Übungsaufgabe: Punkte einer Geraden bei vorgegebenen Bedingungen bestimmen

Bestimmen Sie die Punkte auf der Geraden g, die die genannten Bedingungen erfüllen.

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Punkt A mit der Koordinate $x = 19$

b) Punkt B mit der Koordinate $y = 10$

c) Punkt C mit der Koordinate $z = -6$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Parameterdarstellung einer Geraden
- ❑ Stützvektor
- ❑ Richtungsvektor
- ❑ Aufstellen einer Parameterdarstellung einer Geraden aus zwei Punkten
- ❑ Punktprobe
- ❑ Bestimmen eines Punktes einer Geraden bei vorgegebenen Bedingungen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

4 • Abstände im dreidimensionalen Raum
Von hohen Bauwerken zu tiefen Tunneln

Das Atomium ist ein Bauwerk, welches in Brüssel für die Weltausstellung 1958 gebaut wurde. Es stellt die kubische Kristallstruktur von Eisen dar. Mit einem 3D-Drucker soll ein Modell des Atomiums nachgebaut werden. Eine wesentliche Eigenschaft der Kristallstruktur ist, dass die äußeren Kanten, die von einem Atom ausgehen, senkrecht zueinanderstehen. Dies muss im Modell berücksichtigt werden.

Die beiden in der Abbildung markierten Kanten müssen demnach in einem rechten Winkel zueinanderstehen. Im Folgenden wird erklärt, wie dies mathematisch überprüft werden kann.



Die beiden Kanten werden beschrieben durch die Vektoren $\vec{p} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix}$ und $\vec{q} = \begin{pmatrix} 19{,}6 \\ 34 \\ -28 \end{pmatrix}$.

Der Vektor $\vec{p}$ verläuft dabei von dem Atom oben in der Mitte zu dem Atom hinten in der Mitte.

Überprüft werden soll, ob diese beiden Vektoren rechtwinklig zueinanderstehen.

In der Mathematik spricht man dabei von *Orthogonalität*. Die Frage ist also, ob Vektor $\vec{p}$ und Vektor $\vec{q}$ *orthogonal* sind.

Um die Orthogonalität zu überprüfen, benötigen wir ein mathematisches Verfahren, das sogenannte *Skalarprodukt* zweier Vektoren.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Berechnen des Skalarproduktes und Untersuchen auf Orthogonalität

Das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ berechnet sich folgendermaßen:

$$\vec{a} * \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$$

Hinweis: Es gibt unterschiedliche Rechenzeichen für das Skalarprodukt. In diesem Buch wird der Stern ($\vec{a} * \vec{b}$) verwendet, gebräuchlich sind beispielsweise auch: $\vec{a} \circ \vec{b}$ oder $\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle$.

Orthogonalitätskriterium:

Für zwei orthogonale Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt $\vec{a} * \vec{b} = 0$.

Dabei dürfen weder $\vec{a}$ noch $\vec{b}$ der Nullvektor sein ($\vec{a} \neq \vec{0}$ und $\vec{b} \neq \vec{0}$).

Zum Einstiegsbeispiel „Atomium“:

Für die beiden Vektoren, die die Kanten des Atomiums beschreiben, ergibt sich:

$$\vec{p} * \vec{q} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ -28 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 19{,}6 \\ 34 \\ -28 \end{pmatrix} = (-40) \cdot 19{,}6 + 0 \cdot 34 + (-28) \cdot (-28) = -784 + 0 + 784 = 0$$

Da das Skalarprodukt der beiden Vektoren den Wert 0 hat, wurde mathematisch nachgewiesen, dass es sich um orthogonale Vektoren handelt.

CASten

Berechnen des Skalarproduktes

Casio ClassPad II:	dotp(*vektor1,vektor2*)
Geogebra:	Skalarprodukt(*vektor1,vektor2*)
TI-Nspire CAS:	dotp(*vektor1,vektor2*)

(1) Übungsaufgabe: Anwenden des Orthogonalitätskriteriums

Überprüfen Sie, ob die folgenden Vektoren orthogonal zueinander sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{c} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{d} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

c) $\vec{e} = \begin{pmatrix} -10 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ und $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

Geben Sie zu dem folgenden Vektor drei orthogonale Vektoren an.

d) $\vec{g} = \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bestimmen Sie Werte für t so, dass die folgenden Vektoren orthogonal sind.

e) $\vec{h} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3t \end{pmatrix}$ und $\vec{\imath} = \begin{pmatrix} t \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

f) $\vec{j} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4t \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{k} = \begin{pmatrix} t^2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

(2) Aufgabe: Anwenden des Orthogonalitätskriteriums II

Überprüfen Sie, ob der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zur Geraden $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist.

a) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

VERDACHT?! Ein Lösungsvorschlag zu Aufgabenteil a) lautet:

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

„Daraus folgt, dass der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zur Geraden g ist.“

c) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

d) **Bestimmen** Sie den Wert für y so, dass der Vektor $\vec{v}$ orthogonal zur Geraden g ist.

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ y \\ 4 \end{pmatrix}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

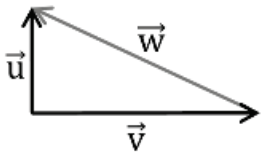
Genau hingeschaut: Herleitung des Orthogonalitätskriteriums

Für jedes rechtwinklige Dreieck gilt der Satz des Pythagoras: $a^2 + b^2 = c^2$

Dabei sind die Seiten a und b die beiden Katheten und die Seite c ist die Hypotenuse, die dem rechten Winkel gegenüber liegt.

Der Satz des Pythagoras lässt sich auch auf rechtwinklige Dreiecke im dreidimensionalen Raum anwenden. Die Katheten des Dreiecks werden dabei durch die folgenden Vektoren beschrieben.

$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$



Für die Anwendung des Satzes von Pythagoras müssen nun die Längen der Vektoren berechnet werden:

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \text{ und } |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Durch Quadrieren beider Gleichungen ergibt sich:

$$|\vec{u}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \text{ und } |\vec{v}|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Setzt man die beiden Längen der Katheten in den Satz des Pythagoras ein, so ergibt sich:

$$a^2 + b^2 = |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$$

Die Hypotenuse wird beschrieben durch den Vektor $\vec{w}$, für den gilt: $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$

Auch von diesem Vektor muss die Länge berechnet werden:

$$|\vec{w}| = |\vec{u} - \vec{v}| = \left| \begin{pmatrix} u_1 - v_1 \\ u_2 - v_2 \\ u_3 - v_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2}$$

$$\text{bzw. } |\vec{w}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2$$

Löst man mit Hilfe der 2. binomischen Formel die Klammern auf, so ergibt sich:

$$u_1^2 - 2u_1v_1 + v_1^2 + u_2^2 - 2u_2v_2 + v_2^2 + u_3^2 - 2u_3v_3 + v_3^2$$

Durch Umsortieren ergibt sich:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Für die Hypotenuse gilt folglich:

$$c^2 = |\vec{w}|^2 = |\vec{u} - \vec{v}|^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3$$

Setze nun die beiden Terme für $a^2 + b^2$ und c^2 ein:

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ c^2 &= u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 - 2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3 \end{aligned}$$

Die beiden Terme stimmen nur überein, wenn folgendes gilt:

$$-2u_1v_1 - 2u_2v_2 - 2u_3v_3 = 0$$

$$(-2) \cdot (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3) = 0$$

$$u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

Ein rechtwinkliger Winkel existiert in diesem Dreieck also nur, wenn das Skalarprodukt der beiden Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ gleich 0 ist:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = 0 \text{ bzw. } u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

(3) Aufgabe: Lärmbelästigung in der Einflugschneise

Ein Flugzeug fliegt den Hamburger Flughafen an. Der Landeanflug wird durch die folgende Parameterdarstellung einer Geraden beschrieben:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0{,}114 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in km

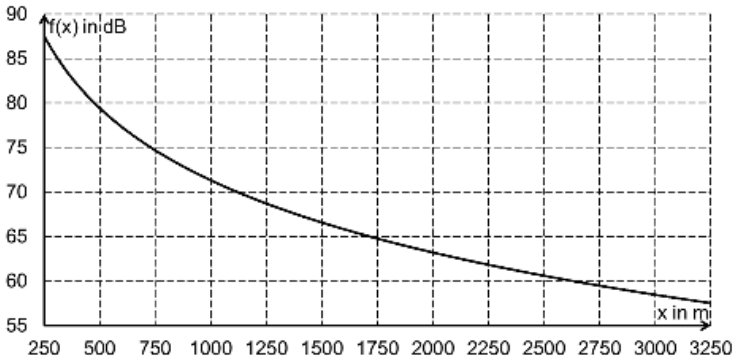


In einem Wohngebiet wird die Lärmbelästigung durch Flugzeuge überprüft. Dazu befindet sich ein Schallpegelmessgerät im Punkt $M(3{,}029|4{,}857|0)$.

Die Lärmbelästigung ist abhängig von der Entfernung des Flugzeugs vom Messpunkt. Die folgende Grafik zeigt den Zusammenhang zwischen der Entfernung x in Metern [m] und der Lärmbelästigung $f(x)$ in Dezibel [dB].

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



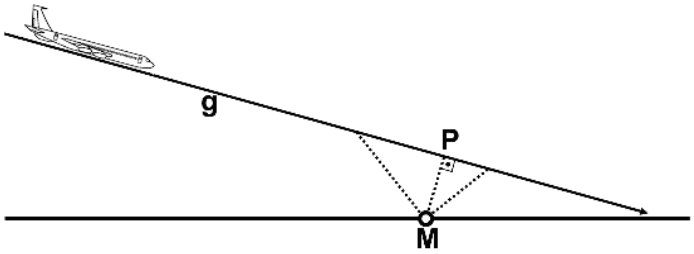
Die größte Lärmbelästigung liegt offensichtlich vor, wenn das Flugzeug den geringsten Abstand zum Messpunkt aufweist.

Zu drei verschiedenen Zeitpunkten finden Messungen statt. Das Flugzeug wird zu diesen Zeitenpunkten an den folgenden Positionen geortet:

$F_1(4|3|0{,}114)$ $F_2(3{,}358|3{,}765|0{,}059)$ $F_3(2{,}716|4{,}530|0{,}004)$

a) **Berechnen** Sie die Entfernung dieser drei Flugzeugpositionen zum Messpunkt M und **geben** Sie anhand des Graphen die zugehörigen Lautstärken **an**.

Offensichtlich gibt es einen Punkt P auf der Flugbahn, dessen Abstand zum Messpunkt M am kleinsten ist.



Dieser zeichnet sich dadurch aus, dass die Verbindung zwischen diesem Punkt P und dem Messpunkt genau orthogonal zur Flugbahn ist.

b) **Überprüfen** Sie, ob bei den drei gegebenen Punkten bereits derjenige enthalten ist, der am dichtesten am Messpunkt liegt.

Um den Punkt P zu berechnen, wird folgender Ansatz gewählt:

$$\overrightarrow{MX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0{,}114 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}029 \\ 4{,}857 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 - 0{,}642s - 3{,}029 \\ 3 + 0{,}765s - 4{,}857 \\ 0{,}114 - 0{,}055s - 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0{,}971 - 0{,}642s \\ -1{,}857 + 0{,}765s \\ 0{,}114 - 0{,}055s \end{pmatrix}$$

c) **Interpretieren** Sie den Vektor $\overrightarrow{MX}$ im Sachkontext.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Aus dieser Menge aller Vektoren, die vom Messpunkt M zur Geraden g verlaufen, wird nun derjenige Vektor gesucht, der orthogonal zur Flugbahn verläuft. Mithilfe des Orthogonalitätskriteriums ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 0{,}971 - 0{,}642s \\ -1{,}857 + 0{,}765s \\ 0{,}114 - 0{,}055s \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix} = 0$$

d) **Bestimmen** Sie s, so dass diese Bedingung erfüllt ist.

e) **Berechnen** Sie den Punkt P auf der Flugbahn, der am dichtesten an dem Messpunkt M liegt. **Berechnen** Sie anschließend den Abstand zum Messpunkt M und **geben** Sie anhand des Graphen auch die Lautstärke **an**.

Berechnen des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Geraden

Zur Berechnung des Abstandes zwischen einem Punkt P und einer Geraden g wird das folgende Verfahren schrittweise angewendet.

Betrachtet wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$ zum Punkt P und die Gerade $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$.

1. Im ersten Schritt wird allgemein die Menge aller Vektoren zwischen dem Punkt P und jedem Punkt der Geraden g ermittelt.

   Dazu berechnet man $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - p_1 + s \cdot r_1 \\ a_2 - p_2 + s \cdot r_2 \\ a_3 - p_3 + s \cdot r_3 \end{pmatrix}$.

2. Die kürzeste Verbindung zwischen dem Punkt P und der Geraden g ist der Vektor, der orthogonal zur Geraden g verläuft. Mithilfe des Orthogonalitätskriteriums lässt sich der gesuchte Vektor bestimmen.

   Orthogonalitätskriterium:

   $$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - p_1 + s \cdot r_1 \\ a_2 - p_2 + s \cdot r_2 \\ a_3 - p_3 + s \cdot r_3 \end{pmatrix} = 0$$

   Daraus ergibt sich:

   $$r_1 \cdot (a_1 - p_1 + s \cdot r_1) + r_2 \cdot (a_2 - p_2 + s \cdot r_2) + r_3 \cdot (a_3 - p_3 + s \cdot r_3) = 0$$

   Diese Gleichung wird nach s aufgelöst.

3. Der Wert, der sich für s ergibt, kann zur Berechnung des sogenannten *Lotfußpunktes* in die Parameterdarstellung der Geraden eingesetzt werden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Wert, der sich für s ergibt, kann auch direkt in den Vektor $\begin{pmatrix} a_1 - p_1 + s \cdot r_1 \\ a_2 - p_2 + s \cdot r_2 \\ a_3 - p_3 + s \cdot r_3 \end{pmatrix}$ eingesetzt werden. Der Ergebnisvektor ist somit der kürzeste Verbindungsvektor zwischen dem Punkt P und der Geraden g. Dieser Vektor wird auch *Lot* genannt.

4. Zuletzt wird die Länge dieses Vektors berechnet *(→ Betrag eines Vektors, Seite 25)*.

(4) Übungsaufgabe: Berechnen des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Geraden

Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen dem Punkt M und der Geraden g.

a) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $M(5|0|3)$.

b) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $M(-3|17|0)$.

c) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $M(10|9|-26)$.

d) Zurück zur Aufgabe „Lärmbelästigung in der Einflugschneise“ (Seite 38):
Ein weiterer Messpunkt nahe des Hamburger Flughafens befindet sich im Punkt $M(2{,}779|4{,}857|0)$. Auch hier wird erneut die Lärmbelästigung durch Flugzeuge untersucht.

Bestimmen Sie die zu erwartende maximale Lärmbelästigung beim Anflug des Flugzeugs mit der folgenden Flugbahn:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0{,}114 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in km

(5) Aufgabe: Tunnelbauprojekt

Zwei parallele Bahntunnel sollen durch ein Gebirgsmassiv gebaut werden. Zur Planung der Bohrungen wird der Verlauf der beiden Tunnelröhren zunächst anhand der Mittelpunkte der Tunnelquerschnitte geplant.

Die Tunnelröhren haben einen Durchmesser von 7,6 m.



Foto-Quelle: Störfix bei Wikimedia Commons, 2012, unverändert, dieses Bild steht unter der Lizenz: CC BY-SA 3.0 DE, creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/de/deed.en

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die beiden folgenden Parameterdarstellungen beschreiben den Verlauf der Mittelpunktgeraden der beiden Tunnelröhren.

$$t_1\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -120 \\ 30 \\ 500 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$t_2\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 68 \\ 205 \\ 502 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ -8 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in m

Zunächst muss überprüft werden, ob die beiden Mittelpunkte der Tunnelröhren einen Mindestabstand von 15 m haben.

Gesucht ist in dieser Aufgabe der Abstand zweier paralleler Geraden.

a) **Begründen** Sie, warum sich dieses Problem durch die Berechnung des Abstands eines Punktes und einer Geraden vereinfachen lässt.

b) **Berechnen** Sie den Abstand der Mittelpunktgeraden der Tunnelröhren.

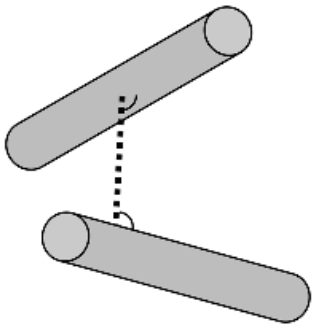
c) **Begründen** Sie, warum dieses Verfahren ungeeignet ist, wenn die Tunnelröhren nicht parallel verlaufen.

Abstände von Geraden

In der vorangegangenen Aufgabe wurde der Abstand zweier paralleler Geraden berechnet, indem der Abstand eines Punktes der einen Geraden zur anderen Geraden berechnet wurde. Dieses Verfahren lässt sich bei parallelen Geraden anwenden, da jeder Punkt einer Geraden immer den gleichen kürzesten Abstand zu der anderen Geraden hat.

Bei Geraden, die nicht parallel zueinander sind, lässt sich das Verfahren nicht anwenden, da es nur eine kürzeste Verbindung zwischen den Geraden gibt.

Dies lässt sich in der nebenstehenden Abbildung erkennen und beispielsweise mit zwei Stiften veranschaulichen. Die kürzeste Strecke zwischen den beiden Geraden zeichnet sich dadurch aus, dass sie zu den Richtungsvektoren der beiden Geraden orthogonal ist.



Zur Berechnung des Abstandes zwischen der Geraden g und der Geraden h wird das folgende Verfahren schrittweise angewendet. Betrachtet werden die beiden folgenden Geraden:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \text{ und } h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

1. Im ersten Schritt wird allgemein die Menge aller Verbindungsvektoren zwischen jedem Punkt P der Geraden g und jedem Punkt X der Geraden h ermittelt.

   Dazu berechnet man:

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1 \\ a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2 \\ a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

2. Der kürzeste Verbindungsvektor zwischen der Geraden g und der Geraden h ist der Vektor, der orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden g und der Geraden h verläuft. Mithilfe des Orthogonalitätskriteriums lässt sich der gesuchte Vektor bestimmen.

   Orthogonalitätskriterium zwischen dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX}$ und der Geraden g:

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1 \\ a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2 \\ a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3 \end{pmatrix} = 0$$

   Orthogonalitätskriterium zwischen dem Verbindungsvektor $\overrightarrow{PX}$ und der Geraden h:

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1 \\ a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2 \\ a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3 \end{pmatrix} = 0$$

   Daraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$$u_1 \cdot (a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1) + u_2 \cdot (a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2) + u_3 \cdot (a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3) = 0$$
$$v_1 \cdot (a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1) + v_2 \cdot (a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2) + v_3 \cdot (a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3) = 0$$

   Dieses Gleichungssystem wird nach s und t aufgelöst.

3. Die Werte, die sich für s und t ergeben, werden in den Vektor

$$\begin{pmatrix} a_1 - b_1 + s \cdot u_1 - t \cdot v_1 \\ a_2 - b_2 + s \cdot u_2 - t \cdot v_2 \\ a_3 - b_3 + s \cdot u_3 - t \cdot v_3 \end{pmatrix}$$

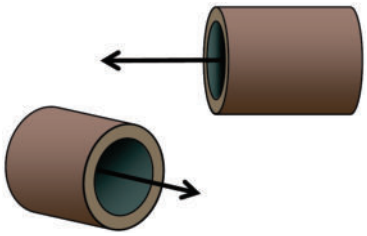
   eingesetzt. Der Ergebnisvektor ist somit der kürzeste Verbindungsvektor zwischen der Geraden g und der Geraden h.

4. Zuletzt wird die Länge des Vektors $\overrightarrow{PX}$ mit den eingesetzten Werten berechnet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Übungsaufgabe: U-Bahn-Tunnelbau



Eine bestehende U-Bahn-Linie, deren Tunnelabschnitt durch die Gerade t_1 beschrieben wird, soll durch eine weitere U-Bahn-Linie erweitert werden.

Die Planung sieht den Verlauf entlang der Geraden t_2 vor.

Die beiden folgenden Parameterdarstellungen beschreiben den Verlauf der Mittelpunktgeraden der beiden U-Bahn-Tunnelröhren.



$$t_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -20 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ -15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 7{,}5 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in m

Berechnen Sie den Abstand der beiden Mittelpunktgeraden der U-Bahn-Tunnelröhren und **entscheiden** Sie, ob der Mindestabstand von 15 m eingehalten wird.

(7) Übungsaufgabe: Abstände von Geraden

Berechnen Sie jeweils den Abstand zwischen den beiden Geraden.

a) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

b) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 29 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Skalarprodukt und Orthogonalität
- ❑ Orthogonalitätskriterium
- ❑ *Herleitung des Orthogonalitätskriteriums*
- ❑ Berechnen des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Geraden
- ❑ Lot, Lotfußpunkt
- ❑ Berechnen von Abständen von Geraden

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

5 • Lagebeziehungen von Geraden im dreidimensionalen Raum
Flugrouten: von Flugzeugen zu Kameradrohnen

(1) Aufgabe: Flugrouten

An einem gewöhnlichen Tag gibt es mehr als 9000 Flugbewegungen über Deutschland.



Die Flugzeuge bewegen sich während des Reisefluges auf vorher festgelegten Reiserouten, welche im Folgenden idealisiert als Geraden angesehen werden.

Für ein Flugzeug ist für einen Reiseabschnitt die folgende Route geplant:

$$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 250 \\ 300 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -800 \\ 310 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Für ein weiteres Flugzeug ist für einen Teil des Fluges die folgende Route geplant:

$$h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 300 \\ 281 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -650 \\ 250 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

a) **Zeigen** Sie, dass sich die beiden Flugrouten schneiden. **Interpretieren** Sie im Sachkontext die Bedeutung des Schnittpunktes.

Ein drittes Flugzeug soll die folgende Route entlangfliegen:

$$j\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 210 \\ 350 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 720 \\ -279 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}$$

b) **Untersuchen** Sie, wie die Flugrouten g und j zueinander liegen.

c) **Nennen** Sie weitere Möglichkeiten, wie Flugrouten zueinander liegen können.

d) **Reality Check:** „Wenn sich die Geraden der Flugbahnen von zwei Drohnen nicht schneiden, dann kann es keine Kollision der beiden Drohnen geben.“

Begründen Sie, warum diese Aussage in der Realität nur mit Einschränkungen zutrifft (vgl. Modellierungskreislauf im Anhang auf Seite 131).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Untersuchen der Lagebeziehung von zwei Geraden

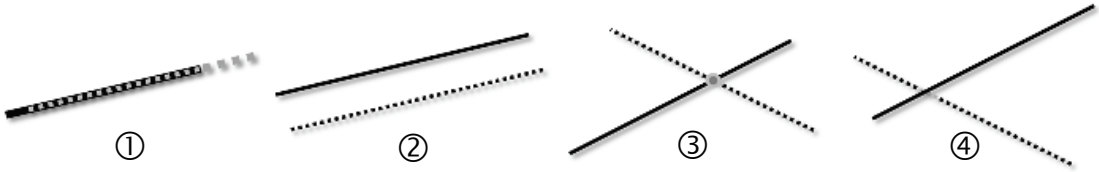
In der vorigen Aufgabe wurde deutlich, dass Geraden in unterschiedlichen Lagebeziehungen zueinanderstehen können. Man unterscheidet zwischen vier möglichen Lagebeziehungen:

① Die Geraden sind identisch.

② Die Geraden sind parallel.

③ Die Geraden schneiden sich.

④ Die Geraden sind windschief.



Um zu untersuchen, wie zwei Geraden zueinander liegen, eignet sich das folgende zweischrittige Verfahren.

Schritt 1:

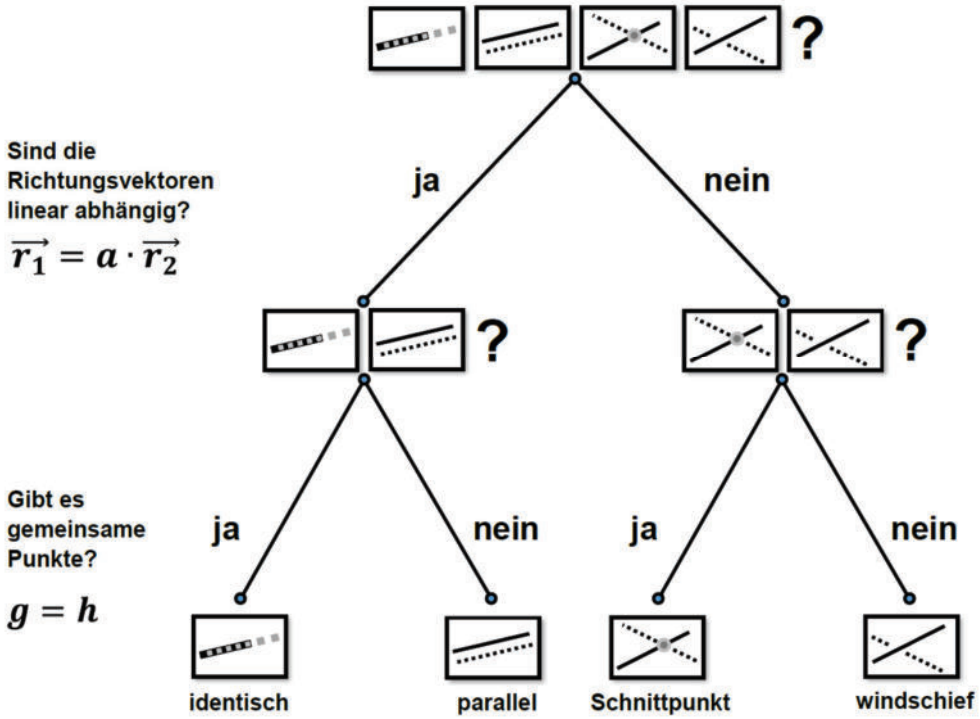
Es wird überprüft, ob die Richtungsvektoren linear abhängig (also Vielfache voneinander) sind.

Schritt 2:

Es wird überprüft, ob die beiden Geraden gemeinsame Punkte haben.

Das folgende Diagramm stellt das Verfahren und die relevanten mathematischen Schritte dar. Dabei wird die Lagebeziehung der Geraden g und h betrachtet:

$g\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{r_1}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{r_2}$



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel 1:

Die Lagebeziehung der Geraden $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix}$ soll untersucht werden.

Schritt 1:

$a \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt das Gleichungssystem $\begin{vmatrix}3a = 9\\4a = 0\\7a = 1\end{vmatrix}$

In der ersten Zeile ergibt sich $a = 3$, in der zweiten Zeile ergibt sich $a = 0$ und in der dritten Zeile $a = \frac{1}{7}$. Da sich nicht in allen drei Zeilen das gleiche a ergibt, sind die Vektoren nicht Vielfache voneinander und damit linear unabhängig. Damit sind die beiden Geraden entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Schritt 2:

$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\0\\9\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}9\\0\\1\end{pmatrix}$ ergibt das Gleichungssystem $\begin{vmatrix}2 + 3s = 6 + 9t\\1 + 4s = 0 + 0t\\5 + 7s = 9 + 1t\end{vmatrix}$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, weswegen die beiden Geraden windschief sind.

Beispiel 2:

Die Lagebeziehung der Geraden $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}5\\5\\12\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4{,}5\\-6\\-10{,}5\end{pmatrix}$ soll untersucht werden.

Schritt 1:

$a \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4{,}5\\-6\\-10{,}5\end{pmatrix}$ ergibt das Gleichungssystem $\begin{vmatrix}3a = -4{,}5\\4a = -6\\7a = -10{,}5\end{vmatrix}$

In allen drei Zeilen ergibt sich die Lösung $a = -1{,}5$. Damit sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden Vielfache voneinander und damit linear abhängig. Somit verlaufen die beiden Geraden entweder parallel zueinander oder sie sind identisch.

Schritt 2:

$\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}3\\4\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\5\\12\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-4{,}5\\-6\\-10{,}5\end{pmatrix}$ ergibt das Gleichungssystem $\begin{vmatrix}2 + 3s = 5 - 4{,}5t\\1 + 4s = 5 - 6t\\5 + 7s = 12 - 10{,}5t\end{vmatrix}$

Das Gleichungssystem hat keine eindeutige Lösung (zum Beispiel $s = -1{,}5t + 1$). Somit gibt es unendlich viele Lösungen. Das bedeutet, dass die beiden Geraden unendlich viele gemeinsame Punkte haben, also sind sie identisch.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Übungsaufgabe: Lagebeziehungen von Geraden

Untersuchen Sie jeweils die Lagebeziehung der beiden Geraden.

a) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\5\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}9\\7\\15\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix}$

b) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}10\\8\\3\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-8\\5\\6\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}17\\-1\\29\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$

c) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}5\\11\\-1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$

d) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}1\\-15\\-6\end{pmatrix}$

e) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}$ und $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}-4\\8\\19\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}4{,}5\\-9\\-13{,}5\end{pmatrix}$

(3) Aufgabe: Drohnen bei einem Sportevent

Bei einer Sportveranstaltung werden zwei Drohnen eingesetzt, um Aufnahmen aus der Luft machen zu können.

Aktuell befinden sich die Mittelpunkte der beiden Drohnen in den Punkten $D_1(510|40|20)$ und $D_2(20|480|23)$.

Die beiden Drohnen setzen sich gleichzeitig entlang der folgenden Geraden in Bewegung:

$$d_1\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}510\\40\\20\end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}$$

$$d_2\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}20\\480\\23\end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}$$



Foto-Quelle: DronePics.Wales, beschnitten, dieses Bild steht unter der Lizenz: CC-BY 4.0, https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

t_1 und t_2 in Sekunden [s], alle anderen Angaben in Metern [m]

a) **Untersuchen** Sie die Lagebeziehung der beiden Flugbahnen.

b) **Begründen** Sie, warum die Existenz eines Schnittpunktes in Aufgabe a) nicht zwingend bedeutet, dass die Drohnen kollidieren.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Während des Fluges müssen die Mittelpunkte der beiden Drohnen immer mindestens zwei Meter voneinander entfernt sein.

c) **Interpretieren** Sie den folgenden Lösungsansatz, um den Abstand der beiden Drohnen zu berechnen.

$$\begin{pmatrix}510\\40\\20\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}20\\480\\23\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-31t+490\\27{,}75t-440\\0{,}2t-3\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}-31t+490\\27{,}75t-440\\0{,}2t-3\end{pmatrix}\right|=\sqrt{(-31t+490)^2+(27{,}75t-440)^2+(0{,}2t-3)^2}$$

d) **Beschreiben** Sie wie in dem folgenden Ansatz mithilfe der Analysis der Zeitpunkt, zu dem der Abstand der beiden Drohnen minimal ist, berechnet wird.

$a(t)=\sqrt{(-31t+490)^2+(27{,}75t-440)^2+(0{,}2t-3)^2}=$
$\sqrt{1731{,}1025t^2-54801{,}2t+433709}$

$$a'(t)=\frac{3462{,}205t-54801{,}2}{2\cdot\sqrt{1731{,}1025t^2-54801{,}2t+433709}}$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum $a'(t)=0$

$$t=15{,}8284$$

e) **Berechnen** Sie mithilfe von t den kleinsten Abstand zwischen den beiden Drohnen und **überprüfen** Sie, ob der Mindestabstand eingehalten wird.

Berechnen von Abständen bei Geraden unter Berücksichtigung der Zeit

Bei der Betrachtung von Flugrouten ist bei der Berechnung des Abstandes ebenfalls die Zeit zu beachten, da der minimale Abstand abhängig von der Position der Flugobjekte zu unterschiedlichen Zeitpunkten ist.

Im Folgenden werden die zwei Geraden $g\colon \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{r_1}$ und $h\colon \overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OB}+t\cdot\overrightarrow{r_2}$ betrachtet. Dabei befinden sich die Objekte zum Zeitpunkt $t=0$ jeweils im Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{OA}$ bzw. $\overrightarrow{OB}$ und der Parameter t hat für beide Gleichungen dieselbe Zeiteinheit.

Um nun zu berechnen, wann die beiden Objekte den kleinsten Abstand zueinander haben, wird das folgende Vorgehen gewählt.

1. Aufstellen der Abstandsfunktion $a(t)$

Jede Verbindung der Geraden g zur Geraden h lässt sich mit dem folgenden Verbindungsvektor darstellen: $\vec{v}=\overrightarrow{OA}+t\cdot\overrightarrow{r_1}-(\overrightarrow{OB}+t\cdot\overrightarrow{r_2})$

Im Anschluss wird der Betrag dieses allgemeinen Verbindungsvektors berechnet: $|\vec{v}|$

Die entstandene Wurzelfunktion $a(t)$ ist die Funktion des Abstandes der beiden Objekte.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

2. Berechnen des Zeitpunktes des minimalen Abstands mithilfe der Analysis

Nun soll der minimale Abstand bestimmt werden. Dieser ist das Minimum der Abstandsfunktion $a(t)$, welches sich mithilfe der Ableitung $a'(t)$ bestimmen lässt. Die notwendige Bedingung für ein Minimum lautet: $a'(t) = 0$. Durch Lösen der Gleichung erhält man den Wert für t, für den der Abstand zwischen den beiden Objekten am geringsten ist.

3. Berechnen des minimalen Abstands

Um den minimalen Abstand zu berechnen, wird nun t in die Funktion $a(t)$ eingesetzt oder t wird in den allgemeinen Verbindungsvektor eingesetzt und dessen Länge bestimmt.

Beispiel:

Siehe Aufgabe „Drohnen bei einem Sportevent“ (Seite 48)

1. Aufstellen der Abstandsfunktion $a(t)$

$$\begin{pmatrix}510\\40\\20\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix} - \left(\begin{pmatrix}20\\480\\23\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-31t + 490\\27{,}75t - 440\\0{,}2t - 3\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}-31t + 490\\27{,}75t - 440\\0{,}2t - 3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-31t + 490)^2 + (27{,}75t - 440)^2 + (0{,}2t - 3)^2} = a(t)$$

2. Berechnen des Zeitpunktes minimalen Abstands mithilfe der Analysis

$$\begin{aligned} a(t) &= \sqrt{(-31t + 490)^2 + (27{,}75t - 440)^2 + (0{,}2t - 3)^2} \\ &= \sqrt{1731{,}1025t^2 - 54801{,}2t + 433709} \end{aligned}$$

$$a'(t) = \frac{3462{,}205t - 54801{,}2}{2 \cdot \sqrt{1731{,}1025t^2 - 54801{,}2t + 433709}}$$

Notwendige Bedingung für ein Minimum $a'(t) = 0$

$$t = 15{,}8284$$

Es kann sich nur um ein Minimum handeln, da der maximale Abstand unendlich groß ist. Die hinreichende Bedingung muss aus diesem Grund nicht überprüft werden.

3. Berechnen des minimalen Abstands

$$a(15{,}8284) = \sqrt{1731{,}1025 \cdot 15{,}8284^2 - 54801{,}2 \cdot 15{,}8284 + 433709} = 1{,}0348$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(4) Übungsaufgabe: Drohnen bei einem Sportevent II



Bei der Sportveranstaltung wird noch eine weitere Drohne eingesetzt.

Aktuell befinden sich die drei Drohnen in den Punkten $D_1(510|40|20)$ und $D_2(20|480|23)$ und $D_3(305|240|18)$.

Die Drohnen setzen sich gleichzeitig entlang der folgenden Geraden in Bewegung:

$$d_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 200 \\ 220 \\ 20 \end{pmatrix} + t_1 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$d_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 190 \\ 310 \\ 23 \end{pmatrix} + t_2 \cdot \begin{pmatrix} 28 \\ -25{,}75 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$d_3: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 305 \\ 240 \\ 18 \end{pmatrix} + t_3 \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

t_1, t_2 und t_3 in Sekunden, alle anderen Angaben in m

a) **Untersuchen** Sie den kleinsten Abstand zwischen der ersten und der dritten Drohne.

b) **Untersuchen** Sie den kleinsten Abstand zwischen der zweiten und der dritten Drohne.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Untersuchen der Lagebeziehung von zwei Geraden
- ❑ Identische, parallele, sich schneidende und windschiefe Geraden
- ❑ Berechnen von Abständen bei Geraden unter Berücksichtigung der Zeit

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

6 • Ebenen mit der Parameterdarstellung beschreiben und Lagebeziehungen untersuchen
Von den Grundmauern bis zum Dachfirst

Für die Planung von Gebäuden nutzen Architekturbüros Computerprogramme, die auf der analytischen Geometrie basieren.

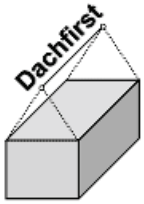
Im Folgenden werden wir an verschiedenen Beispielen genauer hinsehen, welche Mathematik sich hinter diesen Programmen verbirgt.



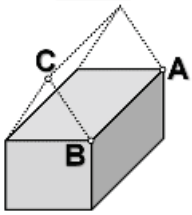
(1) Aufgabe: Dachplanung (Hausplanung 1)

Eine Architektin plant das Dach eines Einfamilienhauses.

Die Grundmauern hat sie bereits platziert. Die zu planende Dachfläche liegt auf der Hauswand auf, deren obere Eckpunkte $A(0|8|5{,}7)$ und $B(10|8|5{,}7)$ sind. Der vordere Punkt des Dachfirsts liegt bei $C(10|4|8{,}5)$.



Das Computerprogramm legt nun eine Ebene zur Beschreibung der Dachfläche fest.



Mathematisch ist eine Ebene eine unendlich große, gerade Fläche, die durch eine Parameterdarstellung der folgenden Form beschrieben werden kann:

$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Diese Darstellung ähnelt der Parameterdarstellung der Gerade, es wird lediglich ein weiterer Richtungsvektor hinzugefügt. Die Richtungsvektoren werden bei Ebenen *Spannvektoren* genannt.

a) **Bestimmen** Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene des Daches, die durch die drei Punkte A, B und C festgelegt wird.

b) **Geben** Sie eine weitere Parameterdarstellung **an**, die die gleiche Ebene beschreibt.

Parameterdarstellung von Ebenen

In der vorangegangenen Aufgabe wurde das Dach eines Hauses durch eine Ebene beschrieben. Mathematisch ist eine Ebene eine unendlich große, gerade Fläche im dreidimensionalen Raum, die durch eine Parameterdarstellung der folgenden Form beschrieben werden kann:

$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}$$

Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden als *Spannvektoren* bezeichnet und $\overrightarrow{OA}$ ist der Ortsvektor eines beliebigen Punktes in der Ebene und wird als Stützvektor bezeichnet.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Stellt man eine Ebene aus drei Punkten A, B und C auf, so wird der Ortsvektor einer der Punkte als Stützvektor gewählt. Die beiden Spannvektoren sind dann beispielsweise die Verbindungsvektoren dieses Punktes mit den anderen beiden Punkten, beispielsweise:

$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$

Hinweis: Liegen die drei Punkte A, B und C auf einer Geraden, so wird durch diese keine Ebene aufgespannt. Drei Punkte, die auf einer Gerade liegen, nennt man *kollinear*.

(2) Übungsaufgabe: Parameterdarstellung von Ebenen

Bestimmen Sie für die folgenden Punkte jeweils eine Parameterdarstellung der zugehörigen Ebene.

a) $A(-3|6|14)$, $B(0|8|15)$ und $C(1|2|3)$

b) $A(4|9|-2)$, $B(1{,}5|11|5)$ und $C(2{,}3|-6|8)$

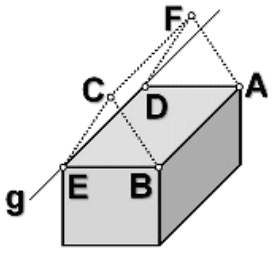
c) $A(1|10|-7)$, $B(0{,}5|3{,}2|14)$ und $C(2|3|9)$

VERDACH?! Gegeben sind die drei Punkte $A(1|0|0)$, $B(3|4|6)$ und $C(5|8|12)$.
Die drei Punkte legen eine Ebene mit der folgenden Parameterdarstellung fest:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}$$

d) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

(3) Aufgabe: Dachplanung (Hausplanung 2)



Die Architektin plant nun weitere Elemente des Hauses.

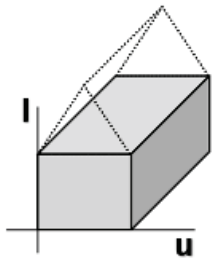
Zunächst plant sie die zweite Dachfläche. Sie weiß, dass sich die Oberkante der Grundmauer durch die folgende Gleichung beschreiben lässt.

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der vordere Punkt des Dachfirsts liegt bei $C(10|4|8{,}5)$.

a) **Bestimmen** Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene des Daches, die durch die Gerade g und den Punkt C festgelegt wird.

Zur Beschreibung der vorderen Hausfront sind zwei Geraden gegeben. Die erste Gerade beschreibt die Unterkante der vorderen Hausfront.



$$u: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

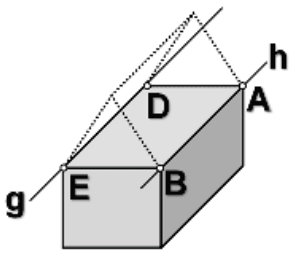
Die zweite Gerade beschreibt die vordere linke Hauskante.

$$l\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix}$$

b) **Geben** Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene der Hausfront **an**, die durch die Geraden u und l festgelegt wird.

Zusätzlich soll die Bodenplatte des Dachgeschosses beschrieben werden. Dazu sind die folgenden zwei Geraden gegeben. Die linke Grundmaueroberkante wird beschrieben durch:

$$g\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{DE}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Die rechte Grundmaueroberkante wird beschrieben durch:

$$h\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c) **Bestimmen** Sie eine Parameterdarstellung für die Ebene des Dachgeschossbodens, die durch die Geraden g und h festgelegt wird.

VERDACH?! Ein anderer Architekt hat auch eine Parameterdarstellung für die Bodenplatte des Dachgeschosses aufgestellt. Sie lautet:

$$E_{Boden}\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Bestimmen einer Parameterdarstellung einer Ebene

In der vorangegangenen Aufgabe wurden Parameterdarstellungen von Ebenen eines geplanten Hauses aus unterschiedlichen Informationen erstellt.

1. Stellt man eine **Ebene aus drei nicht kollinearen Punkten** A, B und C auf, so wird der Ortsvektor einer der Punkte als Stützvektor gewählt.

   Die beiden Spannvektoren sind dann beispielsweise die Verbindungsvektoren dieses Punktes mit den anderen beiden Punkten, beispielsweise:

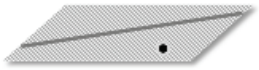


$$E\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} + t \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

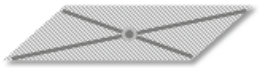
2. Stellt man eine **Ebene aus einem Punkt und einer Gerade** auf, darf der Punkt nicht auf der Geraden liegen.



Dann gilt für einen Punkt P und eine Gerade $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{r}$, dass sich die durch sie aufgespannte Ebene beispielsweise beschreiben lässt, durch:

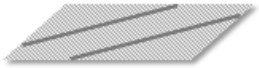
$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \vec{r} + t \cdot \overrightarrow{AP}$$

3. Stellt man eine **Ebene aus zwei sich schneidenden Geraden** $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{r_1}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{r_2}$ auf, so lautet die Parameterdarstellung der Ebene beispielsweise:



$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{r_1} + t \cdot \overrightarrow{r_2}$$

4. Stellt man eine **Ebene aus zwei parallelen Geraden** $g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{r_1}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OB} + t \cdot \overrightarrow{r_2}$ ($\overrightarrow{r_1}$ und $\overrightarrow{r_2}$ sind linear abhängig) auf, so lautet die Parameterdarstellung der Ebene beispielsweise:



$$E: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{r_1} + t \cdot \overrightarrow{AB}$$

(4) Übungsaufgabe: Parameterdarstellung von Ebenen

Bestimmen Sie für die folgenden Vorgaben jeweils eine Parameterdarstellung der zugehörigen Ebene.

a) $A(-3|6|14)$ und $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

b) $A(4|9|-2)$, $B(1{,}5|11|5)$ und $C(2{,}3|-6|8)$

c) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9{,}5 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$

d) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

VERDACH$_?$?! Zu den beiden Geraden

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} \text{ und } h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

schlägt jemand die folgende Ebene vor:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

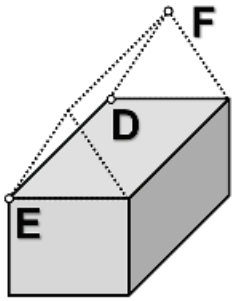
e) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

(5) Aufgabe: Planung einer Solaranlage



Auf dem Dach des neuen Hauses soll eine Solaranlage angebracht werden. Das Dach hat die drei Eckpunkte $D(0|0|5{,}7)$, $E(10|0|5{,}7)$ und $F(0|4|8{,}5)$. Die Ebene, in der sich die linke Dachfläche befindet, lässt sich durch die folgende Parameterdarstellung beschreiben:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$



Das Computerprogramm schlägt den Befestigungspunkt $P_1(8|2|7{,}3)$ vor.

a) **Überprüfen** Sie, ob der Befestigungspunkt P_1 in der Ebene liegt, in der sich die Dachfläche befindet.

Die Architektin sucht einen Befestigungspunkt $P_2(5|2|z)$ auf dem Dach.

b) **Bestimmen** Sie die Höhe z des Befestigungspunktes.

VERDACH$_?$?! Ein anderer Architekt schlägt eine weitere Befestigung der Solaranlage im Punkt $P_2(12|4|8{,}5)$ vor. Er begründet folgendermaßen, dass diese Wahl sinnvoll ist:

„Ich führe eine Punktprobe durch:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$$

Die Lösung lautet: $s = 1{,}2$ und $t = 1$.

Somit liegt der Punkt in der Ebene und damit ist dieses ein sinnvoller Befestigungspunkt auf dem Dach des Hauses.“

c) **Begründen** Sie, warum der Punkt in der Ebene liegt, aber der Befestigungspunkt in der Realsituation nicht auf dem Dach liegt (siehe auch Aufgabe (1) auf Seite 52 und Aufgabe (3) auf Seite 53).

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Punktprobe in der Parameterform

In der Aufgabe „Planung einer Solaranlage“ (Seite 56) sollte in Aufgabenteil a) überprüft werden, ob ein bestimmter Punkt in der Ebene liegt, in der sich die Dachfläche befindet.

Um zu überprüfen, ob ein gegebener Punkt P in einer Ebene E liegt, verwendet man die *Punktprobe*. Hierbei wird die Parameterdarstellung der Ebene mit dem Ortsvektor des Punktes P gleichgesetzt. So entsteht ein Gleichungssystem mit drei Gleichungen, in dem s und t die gesuchten Größen sind.

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + s \cdot \vec{r_1} + t \cdot \vec{r_2} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

Hat dieses Gleichungssystem genau eine Lösung, so liegt der Punkt in der Ebene, ansonsten liegt er außerhalb der Ebene.

(6) Übungsaufgabe: Punktprobe

Überprüfen Sie, ob der Punkt $\mathrm{P}(10|-3|8)$ in den gegebenen Ebenen liegt.

a) $E: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

(7) Aufgabe: Laser-Entfernungsmessgerät

Ein Laser-Entfernungsmessgerät misst Entfernungen, indem es einen Lichtimpuls aussendet und dessen Laufzeit zu einem Objekt hin und wieder zurück misst. Der Laserstrahl eines Entfernungsmessers geht vom Punkt $\mathrm{L}(0|3|1{,}5)$ aus und strahlt in die folgende Richtung:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

a) **Geben** Sie die Parameterdarstellung einer Geraden **an**, die den Verlauf dieses Laserstrahls mathematisch beschreibt.

Die gegenüberliegende Wand wird beschrieben durch:

$$E: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

alle Angaben in m

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) **Bestimmen** Sie den Punkt P, in dem der Laserstrahl auf die Wand trifft.

c) **Bestimmen** Sie den Abstand von Punkt L zu Punkt P.

Das Lasermessgerät misst eine Lichtlaufzeit von $3{,}3 \cdot 10^{-8}$ Sekunden.

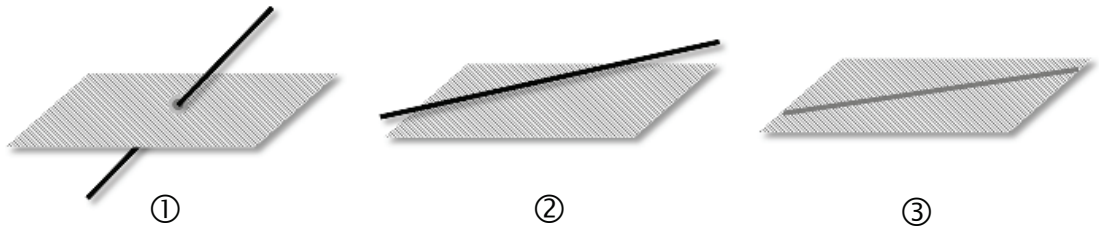
d) **Untersuchen** Sie die Genauigkeit des Lasermessgerätes.
Hinweis: Die Lichtgeschwindigkeit beträgt $299\,792\,458\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Lagebeziehung von Geraden und Ebenen in Parameterform

In der Aufgabe „Lasermessgerät“ wird zunächst der Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene bestimmt. In diesem Beispiel ergab sich eine eindeutige Lösung für das zugehörige Gleichungssystem. Untersucht man die Lagebeziehung einer Geraden und einer Ebene, so können drei mögliche Ergebnisse auftreten.

Man unterscheidet zwischen drei möglichen Lagebeziehungen:

① Die Gerade und die Ebene schneiden sich.
② Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.
③ Die Gerade liegt in der Ebene.



Um zu untersuchen, wie eine Gerade und eine Ebene zueinander liegen, setzt man die beiden Parameterdarstellungen gleich und löst das zugehörige Gleichungssystem.

① Ergibt sich eine eindeutige Lösung, so schneiden sich die Gerade und die Ebene in einem Punkt. Der Schnittpunkt kann ermittelt werden, indem die berechneten Parameter in die Parameterdarstellung der Geraden bzw. der Ebene eingesetzt werden.

② Ergibt sich keine Lösung (aufgrund eines Widerspruchs im Gleichungssystem), so verläuft die Gerade parallel zu der Ebene.

③ Ergeben sich unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(8) Übungsaufgabe: Lagebeziehungen bei Geraden und Ebenen

Untersuchen Sie die Lagebeziehung und **berechnen** Sie ggf. die Schnittmenge.

a) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $E_1\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 21 \\ -21 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

b) $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $E_2\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -10 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

c) $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $E_3\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -7{,}5 \\ -12{,}5 \end{pmatrix}$

d) $i\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $E_4\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

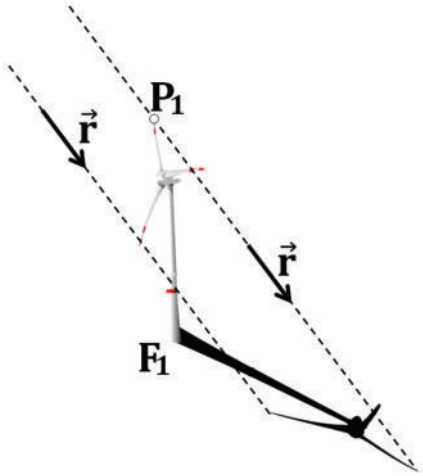
(9) Aufgabe: Schattenwurf einer Windkraftanlage



Bei der Planung von Windkraftanlagen muss darauf geachtet werden, dass umliegende Wohngebiete nicht zu häufig und nicht zu lange durch den Schatten der Rotorblätter beschattet werden.

Bei der Planung einer neuen Windkraftanlage soll der Schattenwurf des höchsten Punktes $\mathrm{P}_1(20|-80|200)$ zur Mittagszeit betrachtet werden. Der Boden wird beschrieben durch die xy-Ebene. Alle Angaben dieser Aufgabe sind in Metern [m] angegeben.

Die Sonnenstrahlen treffen mit dem Richtungsvektor $\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$ auf die Erde.



a) **Geben** Sie die Parameterdarstellung der Geraden **an**, die den Schattenwurf des Punktes P_1 beschreibt.

b) **Berechnen** Sie den Schattenpunkt P_1' des Punktes P_1.

c) **Berechnen** Sie die Schattenlänge zwischen dem Fußpunkt F_1 der Windkraftanlage und dem Schattenpunkt.

Eine andere Windkraftanlage steht im Punkt $\mathrm{F}_2(-40|8|5)$ an einem leicht geneigten Hang und hat den Punkt $\mathrm{P}_2(-40|8|205)$ als höchsten Punkt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Der Hang lässt sich beschreiben durch die Ebene $E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -40 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -90 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) **Geben** Sie die Parameterdarstellung der Geraden **an**, die den Schattenwurf des Punktes P_2 beschreibt.

e) **Berechnen** Sie den Schattenpunkt des Punktes P_2 auf der leicht geneigten Hangebene**.**

f) **Vergleichen** Sie die Schattenlängen der beiden Windkraftanlagen.

g) **Reality Check :** „Der Erdboden kann mathematisch durch eine Ebene beschrieben werden.“

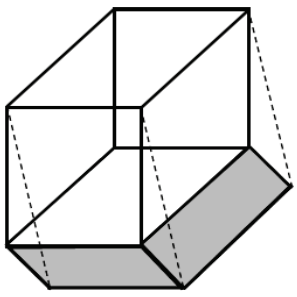
Begründen Sie, warum diese Aussage in der Realität nur mit Einschränkungen zutrifft (vgl. Modellierungskreislauf im Anhang auf Seite 131).

Schattenwurf in der Zentral- und Parallelprojektion

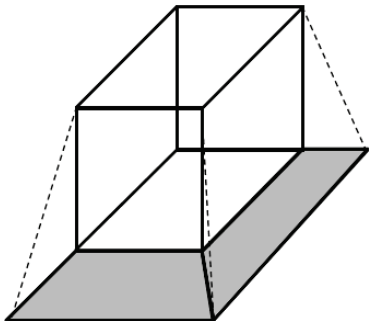
Schatten entstehen, wenn ein Objekt von einer Lichtquelle beleuchtet wird. Je nach Lichtquelle sehen die Schatten dabei unterschiedlich aus. Mathematisch lassen sich Schatten durch zwei verschiedene Projektionsarten beschreiben.

Bei der *Parallelprojektion* ist die Lichtquelle großflächig oder sehr weit entfernt. Allgemein gilt die Sonne als ein Beispiel für eine Lichtquelle, deren Lichtstrahlen parallel auf die Erde auftreffen.

Bei der *Zentralprojektion* ist die Lichtquelle punktförmig, beispielsweise eine Lampe oder ein Strahler. Die Lichtstrahlen breiten sich von dieser Quelle in alle Richtungen aus.



Parallelprojektion



Zentralprojektion

Die Lichtstrahlen beider Projektionsarten lassen sich mathematisch durch Geraden beschreiben. Die Schattenpunkte lassen sich berechnen, indem die Projektionsgeraden mit der Ebene, auf der der Schatten entsteht, gleichgesetzt werden. Die Schnittpunkte entsprechen den Schattenpunkten.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Parallelprojektion

In der Parallelprojektion gibt es einen festen Richtungsvektor $\vec{r}$ der Lichtstrahlen.

Als Stützvektor wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P gewählt, von dem der Schattenpunkt berechnet werden soll.

Die Parameterdarstellung der Projektionsgeraden lautet dann:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r}$$

Zentralprojektion

In der Zentralprojektion hängt der Richtungsvektor von der Lichtquelle L und dem zu projizierenden Punkt P ab. Der Richtungsvektor $\overrightarrow{LP}$ wird berechnet, indem der Verbindungsvektor zwischen der Lichtquelle und dem zu projizierenden Punkt berechnet wird.

Als Stützvektor wird der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}$ des Punktes P gewählt, von dem der Schattenpunkt berechnet werden soll.

Die Parameterdarstellung der Projektionsgeraden lautet dann:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{LP}$$

Beispiel einer Projektionsgeraden in der Parallelprojektion:

Die Spitze einer Sonnenuhr befindet sich im Punkt $S(-1|4|0{,}3)$. Tagsüber wirft sie aufgrund der Sonneneinstrahlung einen Schatten. Die Sonnenstrahlen lassen sich durch den folgenden Vektor beschreiben:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$



Zur Berechnung des Schattenpunktes, wird die Projektionsgerade benötigt.

Diese lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}5 \\ 0 \\ -0{,}1 \end{pmatrix}$$

Um den Schattenpunkt zu berechnen, muss der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene berechnet werden, auf die der Schatten fällt. Dazu werden die Gerade und die Ebene gleichgesetzt und das zugehörige Gleichungssystem wird gelöst.

Beispiel einer Projektionsgeraden in der Zentralprojektion:

Nachts wird die Sonnenuhr von einer Straßenlaterne im Punkt $L(5|7|4)$ beleuchtet. Zur Berechnung des Schattenpunktes, wird die Projektionsgerade benötigt. Diese lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + s \cdot \overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0{,}3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -3 \\ -3{,}7 \end{pmatrix}$$

Um den Schattenpunkt zu berechnen, muss der Schnittpunkt der Geraden g und der Ebene berechnet werden, auf die der Schatten fällt. Dazu werden die Gerade und die Ebene gleichgesetzt und das zugehörige Gleichungssystem wird gelöst.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

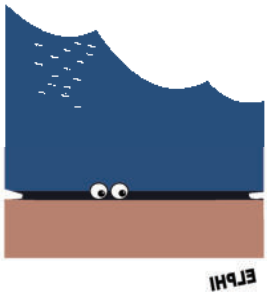
(10) Übungsaufgabe: Optische Täuschung



Zweidimensionale Schriftzüge können aus der richtigen Perspektive betrachtet dreidimensional erscheinen. Als neue Attraktion soll auf dem Boden vor der Hamburger Elbphilharmonie der Schriftzug ELPHI entstehen, der von der Beobachtungsplattform („Plaza“) aus so aussehen soll, als würde er aufrecht stehen.

Die Plaza befindet sich in 37m Höhe über dem Boden. Zuerst muss der Beobachtungspunkt auf der Plaza festgelegt werden. Dieser liegt in diesem Fall im Punkt $\text{B}(0|0|38{,}5)$.

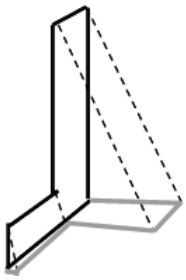
a) **Begründen** Sie, warum es sinnvoll ist, den Beobachtungspunkt in $38{,}5\text{m}$ Höhe anzunehmen.



Der Schriftzug auf dem Boden wird mithilfe der Zentralprojektion konstruiert. Dazu wird zunächst ein Modell des aufrechten Schriftzugs entworfen und mithilfe dieses Modells werden die Bildpunkte auf dem Fußboden ermittelt. Im Modell soll der Schriftzug 4m hoch sein.

Im Folgenden wird nur der Buchstaben „L“ betrachtet.

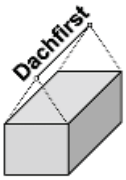
Das L im Modell hat die folgenden Eckpunkte: $\text{L}_1(0|10|0)$, $\text{L}_2(0|10|4)$, $\text{L}_3(1|10|4)$, $\text{L}_4(1|10|1)$, $\text{L}_5(3|10|1)$ und $\text{L}_6(3|10|0)$.



b) **Berechnen** Sie die Bildpunkte auf dem Fußboden, die zu den Modellpunkten L_2 bis L_5 gehören.

c) **Begründen** Sie, warum für die Punkte L_1 und L_6 keine Bildpunkte berechnet werden müssen.

(11) Aufgabe: Dachplanung 2



Für die Planung des Daches eines Einfamilienhauses bestimmt das Architekturprogramm die Lage des Dachfirsts.

Die Ebenen, in denen die beiden Dachflächen liegen, lassen sich beispielsweise beschreiben durch:

$$D_1\colon \overrightarrow{\text{OX}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

$$D_2\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Nun soll der Dachfirst durch das Architekturprogramm dargestellt werden.

a) **Geben** Sie **an**, welches mathematische Objekt geeignet ist, um den Dachfirst zu beschreiben.

Um den Dachfirst zu beschreiben, wird der folgende Ansatz gewählt:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

b) **Begründen** Sie, warum dieser Ansatz geeignet ist, um die Parameterdarstellung, die den Dachfirst beschreibt, zu berechnen.

Auf diese Weise ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{array}{c} 10s = 10u \\ 8 - 4t = 4v \\ 5{,}7 + 2{,}8t = 5{,}7 + 2{,}8v \end{array} \right|$$

Dieses hat die Lösung: $s = u;\ t = 1;\ v = 1$

Durch Einsetzen der Lösungen in eine der Ebenen-Parameterdarstellungen der Dachflächen ergibt sich die Parameterdarstellung der Schnittgeraden g.

Hier wurden die Lösungen für s und t in die Parameterdarstellung von D_1 eingesetzt:

$$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lagebeziehung zweier Ebenen in Parameterform

In der Aufgabe „Dachplanung 2“ (Seite 62) wird die Schnittmenge zweier Ebenen bestimmt. In diesem Beispiel ergab sich eine Schnittgerade.

Es gibt es drei verschiedene Möglichkeiten, wie zwei Ebenen zueinander liegen können:

① Die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.

② Die Ebenen verlaufen parallel.

③ Die Ebenen sind identisch.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



① ② ③

Um die Lagebeziehung zweier Ebenen zu untersuchen, setzt man die beiden Parameterdarstellungen gleich und löst das zugehörige Gleichungssystem.

① Ergibt sich eine Lösungsmenge, die von einem Parameter abhängig ist, so schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgerade.

② Ergibt sich keine Lösung (aufgrund eines Widerspruchs im Gleichungssystem), so liegen die Ebenen parallel zueinander.

③ Ergibt sich eine Lösungsmenge, die von zwei Parametern abhängig ist, so sind die Ebenen identisch.

(12) Übungsaufgabe: Lagebeziehungen zweier Ebenen

Untersuchen Sie die Lagebeziehung und **berechnen** Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $D_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $D_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 12 \\ 13 \\ -2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $D_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $D_3: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $D_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $D_4: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 4 \end{pmatrix}$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Parameterdarstellung einer Ebene
- ❑ Bestimmen einer Parameterdarstellung einer Ebene
- ❑ Punktprobe in der Parameterform
- ❑ Lagebeziehungen von Geraden und Ebenen in Parameterform
- ❑ Schattenwurf in der Zentral- und Parallelprojektion
- ❑ Lagebeziehungen zweier Ebenen in der Parameterform

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

7 • Ebenen in Koordinatenform ermitteln und Lagebeziehungen untersuchen

Von der Parameterform zur Koordinatenform und zurück

(1) Aufgabe: Solaranlage



Auf einer Dachseite soll die Befestigung der Solaranlage geplant werden.

Die Dachfläche liegt in der folgenden Ebene:

$$D: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

Die Befestigung muss senkrecht zur Dachfläche angebracht werden.

Die geplante Befestigung wird durch den Vektor $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix}$ beschrieben.

a) **Überprüfen** Sie, ob der Vektor $\vec{b}$ orthogonal zur Ebene D ist, in der die Dachfläche liegt.

VERDACH$_?$?! Ein Architekt prüft folgendermaßen auf Orthogonalität:

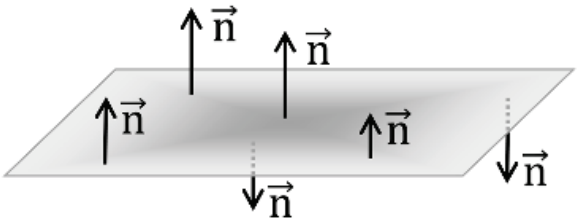
„Ich berechne das Skalarprodukt zwischen $\vec{b}$ und dem Vektor $\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Da das Skalarprodukt 0 ergibt, ist der Vektor $\vec{b}$ orthogonal zur Dachebene D.“

b) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

c) **Berechnen** Sie die z-Koordinate des Vektors $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ z \end{pmatrix}$ so, dass dieser Vektor orthogonal zur Dachebene ist.

Berechnen eines Normalenvektors mithilfe des Kreuzproduktes



Jeder Vektor $\vec{n}$, der orthogonal auf einer Ebene steht, wird als *Normalenvektor* bezeichnet.

Damit ein Vektor orthogonal zu einer Ebene ist, muss er orthogonal zu den beiden Spannvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sein.

Um einen Normalenvektor zu zwei Spannvektoren zu berechnen, wird das *Kreuzprodukt* der Spannvektoren benötigt.

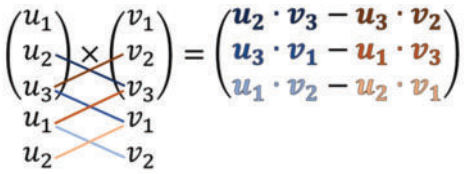
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das Kreuzprodukt der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet sich wie folgt:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

Eine Merkregel zur Berechnung des Kreuzproduktes ist in der folgenden Darstellung veranschaulicht.

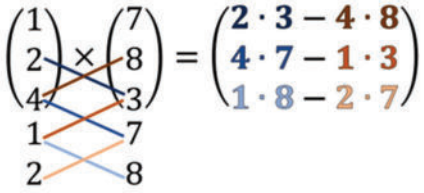


Beispiel:

Zu einer Ebene E soll ein Normalenvektor berechnet werden.

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 3 - 4 \cdot 8 \\ 4 \cdot 7 - 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 8 - 2 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -26 \\ 25 \\ -6 \end{pmatrix} = \vec{n}$$



(2) Übungsaufgabe: Normalenvektor und Kreuzprodukt

Berechnen Sie zu den angegebenen Ebenen jeweils einen Normalenvektor.

a) $E_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$

b) $E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E_3: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

VERDACHT?! Jemand trifft folgende Aussage:

„Bei Aufgabe b) und c) kommt der gleiche Normalenvektor heraus, also muss es sich um dieselbe Ebene handeln.“

d) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

CASten

Berechnung des Kreuzproduktes

Casio ClassPad II: crossp(*vektor1,vektor2*)

Geogebra: Kreuzprodukt(*vektor1,vektor2*)

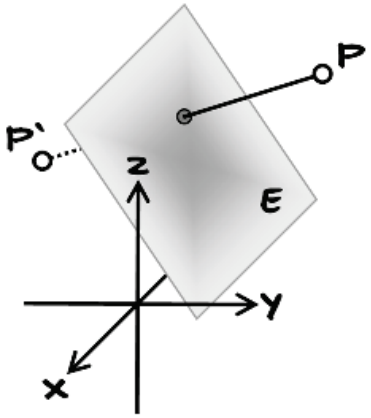
TI-Nspire CAS: crossp(*vektor1,vektor2*)

(3) Aufgabe: Spiegeln an einer beliebigen Ebene

Spiegeln Sie jeweils den Punkt an der gegebenen Ebene.

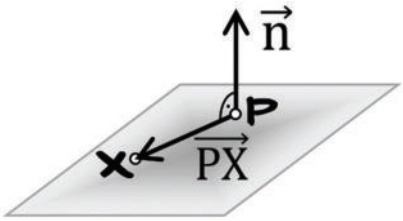
a) $\mathrm{P}(4|2|3)$ und $E_1\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 17 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\mathrm{P}(4|2|3)$ und $E_2\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$



Bestimmen der Normalenform und Koordinatenform einer Ebene

Die Parameterdarstellung ist nicht die einzige mathematische Darstellung einer Ebene. Alternativ lassen sich Ebenen in der *Normalenform* und der *Koordinatenform* darstellen. Diese Darstellungen ermöglichen weiterführende Berechnungen (zum Beispiel Winkelberechnungen) und vereinfachen andere bereits bekannte Berechnungen (beispielsweise Punktprobe und Abstandsberechnungen).



Für die Normalenform wird ein Stützvektor $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ eines Punktes P der Ebene und ein Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene benötigt. Der Grundgedanke der Normalenform ist, dass jeder Punkt X, dessen Verbindungsvektor mit Punkt P zum Normalenvektor orthogonal ist, automatisch in der Ebene liegt.

Somit gilt für jeden Punkt X, der in der Ebene liegt:

$$\vec{n} * \overrightarrow{\mathrm{PX}} = 0$$

<u>Beispiel:</u>

Eine Ebene hat als Stützvektor den Ortsvektor des Punktes $\mathrm{P}(3|7|5)$.

Ein Normalenvektor der Ebene ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Ein weiterer Punkt, der in der Ebene liegen soll, ist der Punkt $\mathrm{A}(11|9|4)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Um zu bestätigen, dass der Punkt A in der Ebene liegt, berechnet man zunächst den Verbindungsvektor $\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix}11\\9\\4\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8\\2\\-1\end{pmatrix}$.

Mithilfe des Skalarproduktes wird geprüft, ob $\overrightarrow{PA}$ orthogonal zu $\vec{n}$ ist:

$$\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}8\\2\\-1\end{pmatrix} = 0$$

Damit liegt der Punkt A in der Ebene, die durch P und $\vec{n}$ beschrieben wird.

Normalenform

Allgemein gilt für einen beliebigen Punkt X(x|y|z), der in der Ebene liegt:

$$\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}\right) = 0$$

Dieses ist der Grundgedanke für die Normalenform einer Ebene, die wie folgt aussieht:

$$E: \vec{n} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$$

Durch Ausmultiplizieren und Umformen lässt sich die folgende äquivalente Darstellung aufstellen, die ebenfalls als Normalenform bezeichnet wird:

$$E: \vec{n} * \overrightarrow{OX} = \vec{n} * \overrightarrow{OP}$$

$$E: \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}p_1\\p_2\\p_3\end{pmatrix}$$

Koordinatenform

Durch Ausrechnen der Skalarprodukte in der Normalenform ergibt sich noch eine weitere Darstellungsform, die sogenannte Koordinatenform:

$$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

mit $d = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$

Beispiel:

Im Folgenden werden die Normalenform und die Koordinatenform der Ebene mit dem Stützvektor $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}$ und dem Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ aufgestellt.

Die Normalenform lautet:

$$E: \vec{n} * \left(\overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}\right) = 0$$

$$E: \begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}\right) = 0$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Die alternative Darstellung der Normalenform lautet:

$$E: \vec{n} * \overrightarrow{OX} = \vec{n} * \overrightarrow{OP}$$

$$E: \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform lässt sich dann wie folgt berechnen:

$$E: n_1 \cdot x + n_2 \cdot y + n_3 \cdot z = d$$

$$\text{mit } d = n_1 \cdot p_1 + n_2 \cdot p_2 + n_3 \cdot p_3$$

$$E: 1 \cdot x + (-2) \cdot y + 4 \cdot z = 9$$

$$\text{mit } d = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 7 + 4 \cdot 5 = 9$$

Die Koordinatenform der Ebene lautet: $E: x - 2y + 4z = 9$

(4) Übungsaufgabe: Normalenform und Koordinatenform einer Ebene

Berechnen Sie zu den angegebenen Ebenen jeweils die Normalenform und die Koordinatenform.

a) $E_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$

b) $E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E_3: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Durchführen einer Punktprobe in der Koordinatenform

Die Koordinatenform einer Ebene bietet sich besonders zum Durchführen einer Punktprobe an. Dabei werden die drei Koordinaten des zu prüfenden Punktes in die Koordinatenform eingesetzt. Wird die Gleichung der Koordinatenform erfüllt, so liegt der Punkt in der Ebene.

Beispiel:

Es wird geprüft, ob die Punkte $P(7|1|1)$ und $Q(10|2|1)$ in der Ebene mit der folgenden Koordinatenform liegen:

$$E: 1 \cdot x - 2 \cdot y + 4 \cdot z = 9$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Zunächst wird P in die Koordinatenform eingesetzt und der Wert berechnet:

$$1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 7 - 2 + 4 = 9$$

Das Ergebnis ist 9, also liegt der Punkt P in der Ebene E.

Dann wird Q in die Koordinatenform eingesetzt:

$$1 \cdot 10 - 2 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 10 - 4 + 4 = 10 \neq 9$$

Das Ergebnis ist nicht 9, also liegt der Punkt Q nicht in der Ebene E.

(5) Übungsaufgabe: Durchführen der Punktprobe in der Koordinatenform

Überprüfen Sie, ob der Punkt $P(4|-8|10)$ in den gegebenen Ebenen liegt.

a) $E_1: -2x + y + 4z = 24$

b) $E_2: 7x + 3y = 0$

c) $E_3: 3x - 3y + 3z = 66$

d) **Geben** Sie für die Ebene $E_1: -2x + y + 4z = 24$ drei Punkte **an**, die in dieser Ebene liegen.
Ermitteln Sie aus diesen drei Punkten die Parameterdarstellung der Ebene.

Umwandeln der Koordinatenform in die Parameterform

Die Koordinatenform einer Ebene lässt sich auch wieder in eine Parameterform der Ebene umwandeln. Dazu gibt es verschiedene Wege.

1. Aufstellen der Parameterform aus drei Punkten: Wie in der vorherigen Übungsaufgabe werden drei nicht-kollineare Punkte berechnet, die in der Ebene liegen und aus diesen wird die Parameterform der Ebene aufgestellt.

2. Aufstellen der Parameterform durch Umformungen: Die Koordinatenform wird zunächst nach x, y oder z umgeformt und daraus wird die Parameterform aufgestellt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} E: \; 2x - 4y + 6z &= 12 \\ 2x - 4y + 6z &= 12 && | : 2 \\ x - 2y + 3z &= 6 && | + 2y - 3z \\ x &= 6 + 2y - 3z \end{aligned}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Es wird ergänzt $y = y$ und $z = z$. Daraus ergibt sich:

$$\begin{array}{lcrcr} x & = & 6 & +2y & -3z \\ y & = & & 1y & \\ z & = & & & 1z \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eine Parameterdarstellung der Ebene lautet somit:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(6) Übungsaufgabe: Umwandeln der Koordinaten- in die Parameterform

Bestimmen Sie für die folgenden Koordinatenformen jeweils eine Parameterform der jeweiligen Ebene.

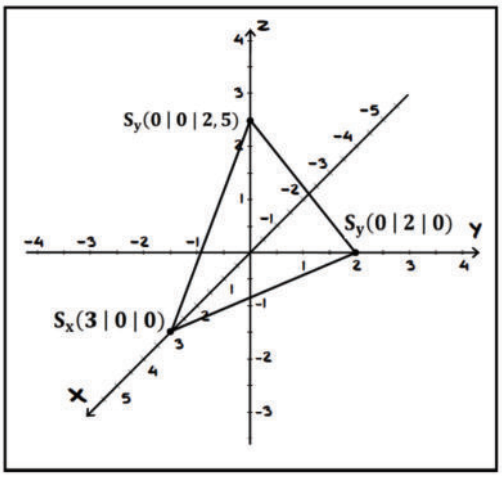
a) $E_1: -2x + y + 4z = 24$

b) $E_2: 7x + 3y = 0$

c) $E_3: 3x - 3y + 3z = 66$

Berechnen der Spurpunkte einer Ebene

Spurpunkte sind die Schnittpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen. Diese eigenen sich gut, um eine Ebene zu visualisieren und lassen sich besonders einfach in der Koordinatenform ablesen.



Um den jeweiligen Spurpunkt mit einer Achse zu berechnen, werden die Werte der anderen beiden Koordinaten gleich 0 gesetzt und die entstehende Gleichung gelöst. Wird beispielsweise der Spurpunkt mit der x-Achse berechnet, wird für y und z der Wert 0 eingesetzt und die Gleichung wird gelöst.

<u>Beispiel:</u>

Die Spurpunkte der Ebene $E: -2x + y + 4z = 24$ mit der x-Achse berechnen sich wie folgt:

$-2x + 0 + 4 \cdot 0 = 24$ ergibt $x = -12$.

Somit lautet der zugehörige Spurpunkt $S_x(-12|0|0)$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Übungsaufgabe: Berechnen der Spurpunkte einer Ebene

Berechnen Sie die Spurpunkte für die folgenden Ebenen.

a) $E_1: -2x + y + 4z = 24$

b) $E_2: 11x + 6y + 3z = 66$

(8) Aufgabe: Anzahl der Spurpunkte einer Ebene

Beschreiben Sie, wie eine Ebene im Koordinatensystem liegen muss, damit sie…

a) …genau einen Spurpunkt besitzt.
b) …genau zwei Spurpunkte besitzt.
c) …genau drei Spurpunkte besitzt.
d) …unendlich viele Spurpunkte besitzt.

Beschreiben Sie, wie man anhand der Koordinatenform erkennen kann, dass die Ebene…

e) …genau einen Spurpunkt besitzt.
f) …genau zwei Spurpunkte besitzt.
g) …genau drei Spurpunkte besitzt.
h) …unendlich viele Spurpunkte besitzt.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Berechnen eines Normalenvektors
- ❑ Berechnen des Kreuzproduktes
- ❑ Spiegeln eines Punktes an einer beliebigen Ebene
- ❑ Bestimmen der Normalenform und Koordinatenform einer Ebene
- ❑ Durchführen einer Punktprobe in der Koordinatenform
- ❑ Umwandeln der Koordinatenform in die Parameterform
- ❑ Berechnen der Spurpunkte einer Ebene

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

8 • Winkel im dreidimensionalen Raum
Von Landeanflugwinkeln zu Sonnenwinkeln



Foto-Quelle: Richie Diesterheft bei Flickr, 2011, verändert, dieses Bild steht unter der Lizenz: CC BY-SA 2.0, creativecommons.org/licenses/by-sa/2.0

(1) Aufgabe: Landeanflugwinkel eines Flugzeugs

Ein Flugzeug befindet sich im Landeanflug. Die Flugbahn lässt sich durch eine Gerade beschreiben, die die folgende Parameterdarstellung hat:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -0{,}5 \end{pmatrix}$$

Das Flugzeug landet auf dem Erdboden, der in dieser Aufgabe durch die Ebene mit der folgenden Parameterform dargestellt wird:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

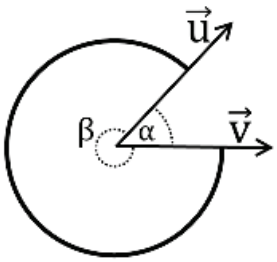
Die Anflugwinkel von Flugzeugen sollten bei der Landung im Bereich zwischen 2,5° und 3,5° liegen.

Untersuchen Sie mithilfe der folgenden Information, ob diese Bedingung an den Anflugwinkel eingehalten wird.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Berechnen von Winkeln im dreidimensionalen Raum



Um den Winkel α zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ im dreidimensionalen Raum zu berechnen, nutzt man die Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

mit α im Gradmaß

Beispiel:

Zur Berechnung des Winkels zwischen $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$, ergibt sich:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 3 \\ 0{,}5 \\ -2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}\right|} = \frac{7{,}5}{3{,}64 \cdot 7{,}89} = 0{,}26$$

Der Winkel berechnet sich dann mit $\alpha = \cos^{-1}(0{,}26) = 74{,}9°$.

Bei der Anwendung auf Geraden und Ebenen werden drei Fälle unterschieden:

1. Winkel zwischen zwei Geraden

Der Winkel zwischen zwei Geraden berechnet sich mithilfe ihrer Richtungsvektoren $\overrightarrow{r_1}$ und $\overrightarrow{r_2}$ und der Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{r_1} * \overrightarrow{r_2}}{|\overrightarrow{r_1}| \cdot |\overrightarrow{r_2}|}$$

2. Winkel zwischen zwei Ebenen

Der Winkel zwischen zwei Ebenen berechnet sich mithilfe ihrer Normalenvektoren $\overrightarrow{n_1}$ und $\overrightarrow{n_2}$ und der Formel:

$$\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_1} * \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$$

3. Winkel zwischen Gerade und Ebene

Um den Winkel zwischen einer Geraden und einer Ebene zu berechnen, nutzt man den Richtungsvektor $\vec{r}$ der Geraden und den Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene.

Gesucht ist aber nicht der Winkel zwischen dem Richtungsvektor und dem Normalenvektor, sondern zwischen dem Richtungsvektor und der Ebene, weswegen die Formel hier folgendermaßen lautet:

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Alternativ kann auch die folgende Formel verwendet werden:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

Also gilt:

$$\alpha = 90° - \cos^{-1}\left(\frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

(2) Übungsaufgabe: Berechnen von Winkeln im dreidimensionalen Raum

Bestimmen Sie für die folgenden Objekte jeweils den eingeschlossenen Winkel.

a) $g_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -8 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $E_1: \overrightarrow{OX} = 40x - 30y = 10$ und $g_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $E_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$ und $E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3{,}2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

CASten

Berechnung von Winkeln

Hinweis: Stellen Sie Ihr CAS auf das Gradmaß ein.

Casio ClassPad II: angle(*vektor1,vektor2*)

Geogebra: Winkel(*vektor1,vektor2*)

Hinweis für Casio ClassPad II und Geogebra: Dieser Befehl rechnet immer mit Cosinus. Wenn es sich um den Winkel zwischen einer Gerade und einer Ebene handelt, muss das Ergebnis noch von 90° subtrahiert werden.

TI-Nspire CAS: $\cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP(vektor1,vektor2)}}{\text{norm(vektor1)}\cdot\text{norm(vektor2)}}\right)$ bzw.
$\sin^{-1}\left(\frac{\text{dotP(vektor1,vektor2)}}{\text{norm(vektor1)}\cdot\text{norm(vektor2)}}\right)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(3) Übungsaufgabe: Planung einer Photovoltaikanlage

Bei der Planung von Photovoltaikanlagen ist zu beachten, dass nicht alle Hausdächer gleich gut geeignet sind. Wichtig ist dabei die Ausrichtung der Anlage zur Sonne und insbesondere der Einfallwinkel der Sonnenstrahlen. Optimal sind Photovoltaikanlagen ausgerichtet, wenn die Sonnenstrahlen im rechten Winkel zur Photovoltaikanlage einfallen.

Im Folgenden soll eine Photovoltaikanlage auf einem Hausdach auf ihre Eignung untersucht werden.

Die Ebene, in der die Photovoltaikanlage liegt, wird folgendermaßen beschrieben:

$$D: 4x + 5z = 60$$

Zur Mittagszeit im Spätsommer lautet der Vektor zur Beschreibung des Sonneneinfalls folgendermaßen:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Das Koordinatensystem ist so ausgerichtet, dass die x-Achse nach Süden zeigt.

a) **Berechnen** Sie den Einfallwinkel der Sonnenstrahlen auf die Photovoltaikanlage zu diesem Zeitpunkt und **beurteilen** Sie die Eignung der Anlage.

Einfacher als den Einfallwinkel an unterschiedlichen Tagen zu betrachten, ist die Beurteilung über die Neigung des Daches. Optimal ist ein Dachneigungswinkel zwischen 30° und 35°.

b) **Berechnen** Sie den Dachneigungswinkel des angegebenen Daches und **beurteilen** Sie die Eignung der Anlage.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Berechnen des Winkels zwischen zwei Vektoren
- ❑ Berechnen des Winkels zwischen zwei Geraden
- ❑ Berechnen des Winkels zwischen einer Geraden und einer Ebene
- ❑ Berechnen des Winkels zwischen zwei Ebenen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

9 • Lagebeziehungen und Abstände bei Ebenen in der Koordinatenform
Von Abständen im Gebäude zu Abständen im Gebirge

Mithilfe der Darstellung von Ebenen in der Koordinatenform, lassen sich einige der vorangegangenen Rechnungen einfacher durchführen. Im Folgenden werden auch noch weitere Beziehungen zwischen Objekten im dreidimensionalen Raum untersucht.

(1) Aufgabe: Laser-Entfernungsmessgerät (siehe auch Seite 57)

Ein Lasermessgerät misst Entfernungen, indem es einen Lichtimpuls aussendet und dessen Laufzeit misst. Der Lichtstrahl eines Lasermessgeräts lässt sich beschreiben durch die folgende Parameterdarstellung einer Geraden:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die gegenüberliegende Wand wird beschrieben durch:

$$E: x + y = 10$$

alle Angaben in m

Bestimmen Sie mithilfe der folgenden Information den Punkt P, in dem der Laserstrahl auf die Wand trifft.

Lagebeziehung von Geraden und Ebenen in Koordinatenform

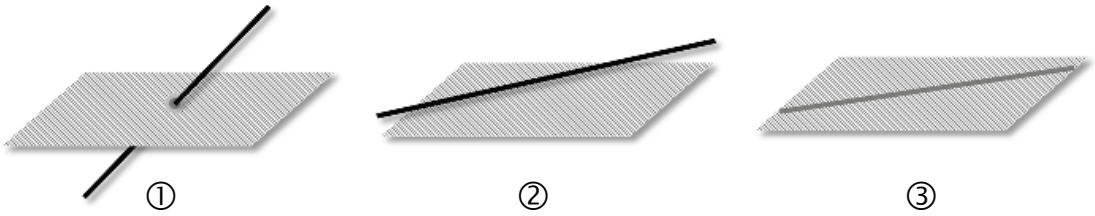
In der Aufgabe (Seite 77) „Laser-Entfernungsmessgerät“ wird der Schnittpunkt einer Geraden und einer Ebene in Koordinatenform gesucht.

Man unterscheidet zwischen den drei bereits bekannten Lagebeziehungen:

① Die Gerade und die Ebene schneiden sich.

② Die Gerade verläuft parallel zur Ebene.

③ Die Gerade liegt in der Ebene.



① ② ③

Um zu untersuchen, wie eine Gerade und eine Ebene zueinander liegen, setzt man die Koordinaten aus der Parameterdarstellung der Geraden in die Koordinatenform der Ebene ein.

① Ergibt sich eine eindeutige Lösung, so schneiden sich die Gerade und die Ebene in einem Punkt.

② Ergibt sich keine Lösung, so verläuft die Gerade parallel zu der Ebene.

③ Ergeben sich unendlich viele Lösungen, so liegt die Gerade in der Ebene.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beispiel:

Im Folgenden wird die Lagebeziehung zwischen der Geraden g und der Ebene E untersucht:

$$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } E\colon 2x + z = 34$$

Zunächst wird die Parameterdarstellung der Geraden als ein Vektor geschrieben, so dass die Koordinaten ablesbar sind:

$$g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 8t \\ 3 + 15t \\ -4 + t \end{pmatrix}$$

Somit lautet $x = 2 + 8t$ und $y = 3 + 15t$ und $z = -4 + t$.

Diese werden nun in die Koordinatenform der Ebene eingesetzt:

$$E\colon 2x + z = 34$$
$$2 \cdot (2 + 8t) + (-4 + t) = 34$$

Diese Gleichung wird nun nach der Unbekannten t aufgelöst. Es ergibt sich $t = 2$.

Der Ortsvektor des Schnittpunktes lautet dann:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 15 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 33 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Zur einfacheren Beurteilung, ob die Gerade die Ebene in einem Punkt schneidet, können der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden auf Orthogonalität untersucht werden. Sind die beiden Vektoren nicht orthogonal, so existiert genau ein Schnittpunkt.

(2) Übungsaufgabe: Lagebeziehungen bei Geraden und Ebenen in Koordinatenform

Untersuchen Sie die Lagebeziehung und **berechnen** Sie ggf. die Schnittmenge.

a) $g\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $E_1\colon 3x - 2y + 7z = 20$

b) $h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $E_2\colon -5x - 3y - 10z = 2$

c) $i\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $E_3\colon 3x - 4y - z = -34$

d) $k\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix}$ und $E_4\colon 10x - z = -140$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

VERDACH$_?$?! Jemand löst den Aufgabenteil d) folgendermaßen:

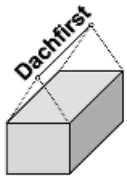
$$\begin{aligned} E_4: 10x - z &= -140 \\ 10 \cdot (-2 + 4r) + (5 - 10r) - (8 - 16r) &= -140 \\ 46r - 23 &= -140 \quad |+23 \\ 46r &= -117 \quad |:46 \\ r &= -2{,}54 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - 2{,}54 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12{,}16 \\ 30{,}4 \\ 48{,}64 \end{pmatrix}$$

Antwort: Die Gerade schneidet die Ebene im Punkt $S(-12{,}16|30{,}4|48{,}64)$.

e) **Untersuchen** Sie die Lösung und **beschreiben** Sie den Fehler.

(3) Aufgabe: Dachplanung 3 (siehe Seite 62)



Für die Planung des Daches des Einfamilienhauses bestimmt das Architekturprogramm die Lage des Dachfirsts, also die Oberkante des Daches.

Die Ebenen, in denen die beiden Dachflächen liegen, lassen sich beispielsweise beschreiben durch:

$$E_1: -14y - 20z = -226$$
$$E_2: -28y + 40z = 228$$

Berechnen Sie die Parameterdarstellung der Geraden, die den Dachfirst beschreibt.

Lagebeziehung zweier Ebenen in Koordinatenform

In der Aufgabe „Dachplanung 3“ (Seite 79) wird die Schnittmenge zweier Ebenen in Koordinatenform bestimmt. In diesem Beispiel ergab sich eine Schnittgerade.

Untersucht man die Lagebeziehung zweier Ebenen, so können, wie bereits bekannt, drei mögliche Ergebnisse auftreten.

Man unterscheidet zwischen den drei bereits bekannten Lagebeziehungen:

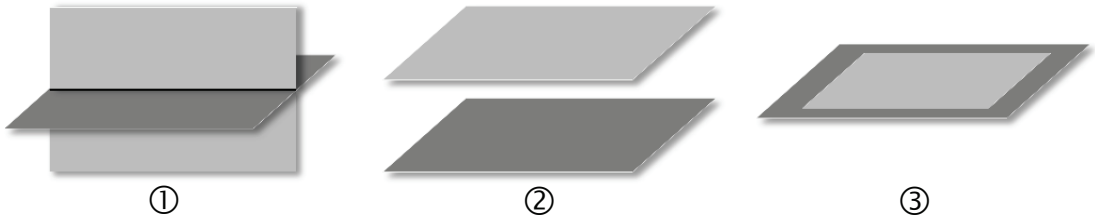
① Die Ebenen schneiden sich in einer Schnittgeraden.

② Die Ebenen verlaufen parallel.

③ Die Ebenen sind identisch.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.



Um zu untersuchen, wie zwei Ebenen zueinander liegen, gibt es zwei verschiedene Verfahren.

1.) Lösen von Gleichungssystemen

Man löst das Gleichungssystem bestehend aus den beiden Koordinatenformen.

① Ergibt sich eine Lösungsmenge, bei der ein Parameter von einem anderen Parameter abhängig ist, so schneiden sich die Ebenen in einer Schnittgerade.

② Ergibt sich keine Lösung, so liegen die Ebenen parallel zueinander.

③ Ergibt sich eine Lösungsmenge, bei der ein Parameter von zwei anderen Parametern abhängig ist, so sind die Ebenen identisch.

Beispiel:

Zu untersuchen ist die Lagebeziehung der beiden Ebenen:

$$E_1: 2x - 7y + 2z = 10$$
$$E_2: -15x + 10y + 2z = -160$$

Es ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 2x - 7y + 2z = 10 \\ -15x + 10y + 2z = -160 \end{matrix} \right|$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\begin{aligned} x &= x \\ y &= x - 10 \\ z &= 2{,}5x - 30 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die beiden Ebenen sich in einer Schnittgerade schneiden.

Die Schnittgerade berechnet sich, indem auf der rechten Seite der Gleichungen x durch den Parameter r ersetzt wird:

$$\begin{aligned} x &= r \\ y &= r - 10 \\ z &= 2{,}5r - 30 \end{aligned}$$

Dieses lässt sich als Vektor folgendermaßen darstellen: $\begin{pmatrix} r+0 \\ r-10 \\ 2{,}5r-30 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix}$

Die Schnittgerade lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ -30 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

2.) Vergleich der Koordinatenformen

Für die schnelle Entscheidung, ob sich die Ebenen schneiden oder nicht, eignet sich der Vergleich der Koordinatenformen. Bei diesem Verfahren wird allerdings nicht die Schnittgerade berechnet, falls es sie gibt.

Zu prüfen ist, ob die beiden Normalenvektoren der Ebenen linear abhängig sind.

- Sind diese nicht linear abhängig, so existiert eine Schnittgerade. Diese lässt sich mit dem oben genannten Verfahren berechnen.

- Sind die Normalenvektoren linear abhängig, so sind die Ebenen entweder parallel oder identisch. Zu unterscheiden ist, ob sich die eine Koordinatenform (beide Seiten der Gleichung) durch Multiplikation mit einem Faktor in die andere überführen lässt.
  - Ist dies der Fall, so sind die Ebenen identisch.
  - Ist dies nicht der Fall, so sind die Ebenen parallel.

Beispiel:

$$E_1: 2x - 7y + 2z = 10$$
$$E_2: -6x + 21y - 6z = -20$$

Der Normalenvektor von E_2 lässt sich durch Multiplikation mit -3 aus dem von E_1 berechnen, das bedeutet, dass die beiden Normalenvektoren linear abhängig sind. Das bedeutet, dass die beiden Ebenen entweder identisch oder parallel sind.

Die Koordinatenformen lassen sich allerdings nicht durch Multiplikation mit dem gleichen Faktor ineinander überführen. Somit sind die Ebenen parallel zueinander.

Sie wären identisch, wenn bei E_2 auf der rechten Seite der Gleichung -30 statt -20 stehen würde.

(4) Übungsaufgabe: Lagebeziehungen zweier Ebenen

Untersuchen Sie die Lagebeziehung und **berechnen** Sie ggf. die Schnittgerade.

a) $D_1: 3x + 2y - 10z = 40$ und $D_2: -6y + 30z = 60$

b) $D_1: 3x + 2y - 10z = 40$ und $D_3: -7{,}5x - 5y + 25z = -100$

c) $D_1: 3x + 2y - 10z = 40$ und $D_4: 9x + 6y - 30z = 100$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(5) Aufgabe: Drohne am Berghang



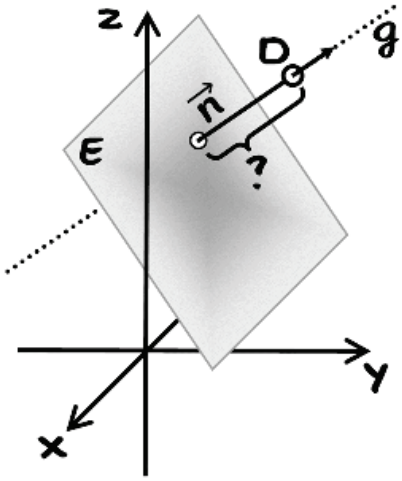
Eine Drohne überprüft ständig den Abstand zu Objekten in ihrer Umgebung. Betrachtet wird eine Drohne, die an einem Berghang schwebt.

Die Ebene, in der der Berghang liegt, kann mathematisch beschrieben werden durch:

$$E: 4x + 20z = 50$$

mit x, y, z in km

Die Drohne befindet sich im Punkt $\mathrm{D}(-0{,}8|0{,}5|2{,}6)$.



Untersucht werden soll nun der kürzeste Abstand zwischen Drohne und Berghang.

a) **Beschreiben** Sie den in der Skizze dargestellten Lösungsansatz.

b) **Berechnen** Sie die (kürzeste) Entfernung der Drohne zum Berghang.

Abstände bei Ebenen

Um Abstände zwischen Ebenen und weiteren Objekten zu bestimmen, ist es von Vorteil, die Beschreibung der Ebene in Koordinatenform vorliegen zu haben, da hier bereits der Normalenvektor gegeben ist, der für die orthogonale Verbindung zwischen Ebene und Objekt benötigt wird. Im Folgenden wird unterschieden zwischen den Abständen zwischen

- Ebene und Punkt
- Ebene und Gerade
- Ebene und Ebene

Abstand zwischen Punkt und Ebene

Zur Bestimmung des Abstandes zwischen einem Punkt P und einer Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ ist folgendes Verfahren zu verwenden:

Schritt 1:

Den Normalenvektor $\vec{n}$ aus der Koordinatenform ablesen.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Schritt 2:

Die Hilfsgerade h durch Punkt P mit dem Richtungsvektor $\vec{n}$ aufstellen: $h\colon \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t \cdot \vec{n}$

Schritt 3:

Den Schnittpunkt S zwischen Hilfsgerade h und Ebene E berechnen.

Schritt 4:

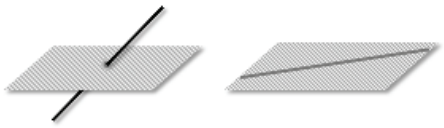
Den Vektor $\overrightarrow{\mathrm{PS}}$ aufstellen und die Länge dieses Vektors bestimmen.

Abstand zwischen Gerade und Ebene

Beim Berechnen des Abstandes zwischen Gerade und Ebene sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1:

Wenn sich die Gerade und die Ebene schneiden, ist der Abstand 0. Das gleiche gilt, wenn die Gerade in der Ebene liegt.



Fall 2:



Nur wenn die Gerade und die Ebene parallel zueinander sind, ist es sinnvoll, einen Abstand zu berechnen. Dazu kann ein beliebiger Punkt auf der Geraden gewählt werden (beispielsweise der zum Stützvektor gehörige Punkt) und dann wird der Abstand dieses Punktes zur Ebene mit dem oben beschriebenen Verfahren berechnet. Da aufgrund der Parallelität alle Punkte auf der Geraden den gleichen kürzesten Abstand zur Ebene haben, ist es egal, welcher Punkt gewählt wird.

Abstand zwischen Ebene und Ebene

Beim Berechnen des Abstandes zwischen zwei Ebenen sind zwei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1:

Wenn sich die Ebenen schneiden, ist der Abstand 0. Das gleiche gilt, wenn die Ebenen identisch sind.



Fall 2:



Es ist nur bei parallelen Ebenen sinnvoll, einen Abstand zu berechnen. Dazu kann ein beliebiger Punkt in der einen Ebene gewählt werden und dann wird der Abstand dieses Punktes zur anderen Ebene mit dem oben beschriebenen Verfahren berechnet. Da aufgrund der Parallelität alle Punkte in der einen Ebene den gleichen kürzesten Abstand zur anderen Ebene haben, kann ein beliebiger Punkt gewählt werden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Übungsaufgabe: Abstände zu Ebenen

Berechnen Sie den Abstand der angegebenen Objekte.

a) $\mathrm{P}_1(1|5|-2)$ und $D_1: 3x+2y-10z=40$

b) $\mathrm{P}_2(-2|-2|-5)$ und $D_1: 3x+2y-10z=40$

c) $l: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix}4\\11\\-6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-7\\7\end{pmatrix}$ und $E_1: 3x-2y+7z=20$

d) $m: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}7\\5\\-5\end{pmatrix}$ und $E_2: -5x-3y-10z=2$

e) $n: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}9\\7\\-1\end{pmatrix}$ und $E_3: 3x-4y-z=-34$

f) $D_1: 3x+2y-10z=40$ und $D_2: -6y+30z=60$

g) $D_1: 3x+2y-10z=40$ und $D_3: -7{,}5x-5y+25z=-100$

h) $D_1: 3x+2y-10z=40$ und $D_4: 9x+6y-30z=100$

Hessesche Normalform

Der Abstand eines Punktes zu einer Ebene lässt sich noch einfacher mithilfe der *Hesseschen Normalform* berechnen. Die Hessesche Normalform ist eine weitere Möglichkeit, eine Ebene zu definieren. Ist die Ebene in dieser Form vorhanden, so lässt sich der Abstand zu einem beliebigen Punkt mithilfe einer Formel berechnen.

Die Hessesche Normalform einer Ebene hat im Allgemeinen die Form:

$$E: \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OX}} - d = 0$$

Dabei ist $\overrightarrow{n_0}$ der *normierte Normalenvektor*, der sich wie folgt berechnen lässt: $\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$.

Der Wert von d berechnet sich mithilfe eines Stützvektors $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ folgendermaßen: $d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OA}}$
Ist die Hessesche Normalform einer Ebene gegeben oder berechnet, so lässt sich der kleinste Abstand zwischen der Ebene und einem beliebigen Punkt mit dem Ortsvektor $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ mithilfe der folgenden Formel berechnen: $\mathrm{Abstand}(\mathrm{Q}, E) = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - d$

<u>Beispiel:</u>
Berechnen des Abstandes von Aufgabenteil a) der vorangegangenen Aufgabe:
$\mathrm{P}_1(1|5|-2)$ und $D_1: 3x+2y-10z=40$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Aufstellen der Hesseschen Normalform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ und $|\vec{n}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + (-10)^2} = \sqrt{113} = 10{,}6301$

$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{113}} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}2822 \\ 0{,}1881 \\ -0{,}9407 \end{pmatrix}$

Ein Punkt in der Ebene lautet beispielsweise $\mathrm{A}(0|0|-4)$.

Somit berechnet sich $d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0{,}2822 \\ 0{,}1881 \\ -0{,}9407 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = -3{,}7628$

Die Hessesche Normalform der Ebene D_1 lautet dann:

$$D_1: \begin{pmatrix} 0{,}2822 \\ 0{,}1881 \\ -0{,}9407 \end{pmatrix} * \overrightarrow{\mathrm{OX}} + 3{,}7628 = 0$$

Der Abstand des Punktes P_1 zur Ebene D_1 berechnet sich dann mit:

$$\mathrm{Abstand}(\mathrm{P}_1, D_1) = \begin{pmatrix} 0{,}2822 \\ 0{,}1881 \\ -0{,}9407 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} + 3{,}7628 = 6{,}8669$$

Das bedeutet, dass der Abstand des Punktes zur Ebene 6,8669 Einheiten entspricht.

(7) Übungsaufgabe: Abstände zu Ebenen mithilfe der Hesseschen Normalform

Berechnen Sie den Abstand der angegebenen Objekte, indem Sie die Hessesche Normalform verwenden.

a) $\mathrm{P}(3|-2|4)$ und $D_1: -2x + 3y + z = 12$

b) $g: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $D_2: 6x - 4y + 10z = 20$

c) $D_3: -4x - 2y + z = -4$ und $D_4: 8x + 4y - 2z = 10$

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Untersuchen der Lagebeziehung zwischen Geraden und Ebenen in Koordinatenform
- ❑ Untersuchen der Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen in Koordinatenform
- ❑ Berechnen des Abstandes zwischen einem Punkt und einer Ebene
- ❑ Berechnen des Abstandes zwischen einer Gerade und einer Ebene
- ❑ Berechnen des Abstandes zwischen zwei Ebenen
- ❑ Hessesche Normalform

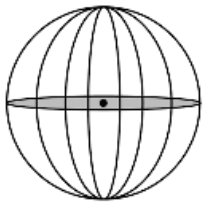
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

10 • Kugeln im dreidimensionalen Raum – GPS
Von der Standortbestimmung zu Schnittmengen von Kugeln

(1) Aufgabe: Grundidee von GPS

Das globale Positionierungssystem (GPS) dient zur Bestimmung der eigenen Position auf der Erde. Dies geschieht mithilfe von Satelliten, welche sich im Weltall um die Erde herumbewegen. Grundlage der Positionsbestimmung ist die Kenntnis über den Abstand zwischen den Satelliten und dem aktuellen Standort.



Alle Punkte, die den gleichen Abstand zu einem Satelliten haben, liegen auf einer Kugeloberfläche. Der Satellit befindet sich daher im Kugelmittelpunkt.

Die Positionsbestimmung mit einem, dann zwei und schließlich mit drei Satelliten und der Erde als idealisierte Kugel ist in den folgenden Abbildungen dargestellt.



Beschreiben Sie anhand der Abbildungen, wie die Positionsbestimmung funktioniert.

Funktionsweise von GPS-Ortung

Ein GPS nutzt (abweichend von der Beschreibung oben) die Daten von mindestens vier Satelliten, um die Position auf der Erde zu bestimmen. Dazu erhält das GPS die Positionen der vier Satelliten und den Zeitpunkt, zu dem das Signal gesendet wurde. Anhand der Zeit, die dieses Signal bis zum GPS benötigt, wird die Entfernung zum Satelliten berechnet.

Mit der Position jedes Satelliten (Mittelpunkt der Kugel) und den Entfernungen zum GPS-Gerät (Radius der Kugel) lassen sich die Kugeln um die Satelliten bestimmen. Das GPS-Gerät befindet sich dann im Schnittpunkt der vier Satellitenkugeln.

In der Realität verwenden GPS meistens die Daten von mehr als vier Satelliten, um Messfehler zu vermeiden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Beschreiben einer Kugel im dreidimensionalen Raum

Wie bereits beschrieben, lässt sich die Kugel um einen Satelliten durch die Position des Satelliten (Mittelpunkt der Kugel) und die Entfernung zum GPS (Radius der Kugel) beschreiben. Allgemein wird für die mathematische Beschreibung einer Kugel ihr Mittelpunkt und ihr Radius benötigt. Alle Punkte, die den gleichen Abstand (Kugelradius) vom Mittelpunkt haben, bilden die Kugel.

Mathematisch lässt sich eine Kugel über die folgende Gleichung beschreiben:

$$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$$

$(x_M|y_M|z_M)$ gibt dabei die Koordinaten des Kugelmittelpunkts an und r ist der Radius der Kugel.

Beispiel:

Eine Kugel hat den Mittelpunkt $\mathrm{M}(10|-3|5)$ und den Radius $r = 2$.

Die Kugelgleichung lautet dann:

$$(x - 10)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 2^2$$

Ein Punkt $\mathrm{P}(x|y|z)$ liegt auf dieser Kugel, wenn x, y und z die Gleichung erfüllen.

(2) Übungsaufgabe: Angeben von Kugelgleichungen und Punktprobe

Geben Sie für die folgenden Kugeln die Kugelgleichungen **an** und **prüfen** Sie jeweils, ob der Punkt $\mathrm{P}(-3|-15|7)$ auf der Kugel liegt.

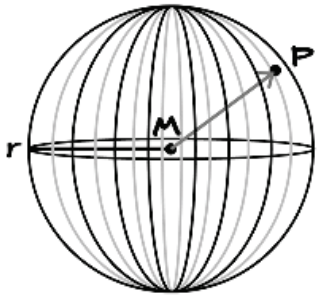
a) Mittelpunkt $\mathrm{M}(-3|5|7)$ und Radius $r = 20$

b) Mittelpunkt $\mathrm{M}(0|8|15)$ und Radius $r = 1$

c) Mittelpunkt $\mathrm{M}(29|11|-31)$ und Radius $r = 5$

Genau hingeschaut: Herleitung der Kugelgleichung

Die Gleichung zur Beschreibung einer Kugel im dreidimensionalen Raum lässt sich auf verschiedenen Wegen herleiten. Einer davon basiert auf der Idee, dass jeder Punkt $\mathrm{P}(x|y|z)$ auf der Kugeloberfläche den gleichen Abstand vom Mittelpunkt $\mathrm{M}(x_M|y_M|z_M)$ der Kugel hat. Das bedeutet, dass der Verbindungsvektor $\overrightarrow{\mathrm{MP}}$ zwischen dem Mittelpunkt und jedem beliebigen Kugeloberflächenpunkt die gleiche Länge hat.



$$\left|\overrightarrow{\mathrm{MP}}\right| = \left|\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OM}}\right| = \left|\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} x - x_M \\ y - y_M \\ z - z_M \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

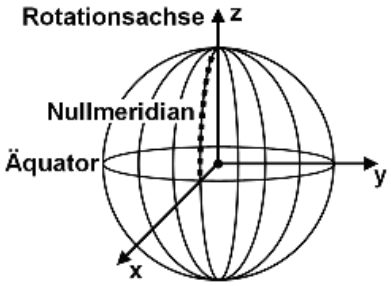
Für alle Punkte auf der Kugeloberfläche entspricht diese Länge dem Radius:

$$\sqrt{(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2}=r$$

So ergibt sich die in der obigen Information angegebene Gleichung:

$$(x-x_M)^2+(y-y_M)^2+(z-z_M)^2=r^2$$

(3) Aufgabe: Standortbestimmung mit Satellitendaten



Im Folgenden soll mithilfe von vier Satelliten die Position P eines GPS-Gerätes auf der Erde bestimmt werden. Beim Angeben von Positionen auf der Erde wird in dieser Aufgabe ein geozentrisches Koordinatensystem genutzt, dessen Ursprung im Erdmittelpunkt liegt.

In der folgenden Tabelle sind die Koordinaten von drei Satelliten und ihre Entfernung zum GPS-Gerät angegeben.

	x	y	z	Entfernung zum Messpunkt
Satellit 1	7625	18871	17080	22133,89305
Satellit 2	13677	5806	22028	20278,75248
Satellit 3	15023	16111	14858	21475,51532

alle Angaben in km

Das folgende Gleichungssystem wird aufgestellt und gelöst:

$$\left|\begin{matrix}(x-7625)^2+(y-18871)^2+(z-17080)^2=22133{,}89305^2\\(x-13677)^2+(y-5806)^2+(z-22028)^2=20278{,}75248^2\\(x-15023)^2+(y-16111)^2+(z-14858)^2=21475{,}51532^2\end{matrix}\right|$$

a) **Begründen** Sie, warum sich dieses Gleichungssystem noch nicht zur Bestimmung der Position des GPS-Gerätes eignet.

Es wird die folgende Gleichung dem Gleichungssystem hinzugefügt:

$$(x-9522)^2+(y-16402)^2+(z-18608)^2=21524{,}71243^2$$

b) **Geben** Sie **an**, in welchem Punkt sich der vierte Satellit befindet.
Geben Sie zudem die Entfernung dieses Satelliten zum Messpunkt **an**.

Die Lösung des Gleichungssystems lautet dann:

$$x=3726{,}761538;\ y=655{,}5144302;\ z=5125{,}542977$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das GPS-Gerät befindet sich folglich im Punkt $P(3726{,}761538|655{,}5144302|5125{,}542977)$.

Am Anfang dieses Kapitels wurde anstelle eines vierten Satelliten die Erde als vierte Kugel betrachtet.

c) **Reality Check:** „Die Erde ist eine Kugel.“

Begründen Sie, warum diese Aussage in der Realität nur mit Einschränkungen zutrifft (vgl. Modellierungskreislauf auf Seite 131).

Berechnen der Schnittmenge mehrerer Kugeln

Um die Schnittmenge mehrerer Kugeln zu berechnen, bilden die Kugelgleichungen ein gemeinsames Gleichungssystem. Dieses kann mithilfe mehrerer Umformungsschritte ohne technische Hilfsmittel gelöst werden. Die Anwendung eines Computer-Algebra-Systems wird empfohlen.

Beispiel:

Berechnen des Schnittpunktes dreier Kugeln mit den folgenden Kugelgleichungen:

$$(x-10)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=2^2$$
$$(x-9)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=2^2$$
$$(x-10)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=2^2$$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}(x-10)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=2^2\\(x-9)^2+(y+3)^2+(z-5)^2=2^2\\(x-10)^2+(y+2)^2+(z-5)^2=2^2\end{matrix}\right|$$

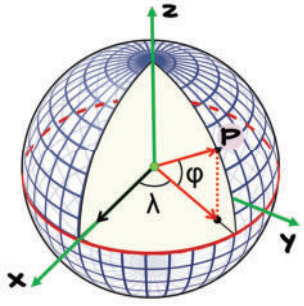
CAS Mit einem CAS ergibt sich die Lösung $P_1(9{,}5|-2{,}5|3{,}13)$ und $P_2(9{,}5|-2{,}5|6{,}87)$.

(4) Aufgabe: Umrechnung von kartesischen zu geografischen Koordinaten

Koordinaten auf der Erde werden gewöhnlich anhand von Längen- und Breitengraden angegeben. Diese Koordinaten werden als geografische Koordinaten bezeichnet.

Ein Beispiel für geografische Koordinaten wäre die Angabe, dass sich die Elbphilharmonie in Hamburg auf 53,54135°N und 9,9851°O befindet.

a) **Beschreiben** Sie, wie man den Ort 53,54135°N und 9,9851°O auf einem Globus finden kann. Informieren Sie sich gegebenenfalls über Längen- und Breitengrade.



Alternativ können, wie bereits zuvor geschehen, alle Orte auf der Erde mithilfe der bekannten kartesischen Koordinaten dargestellt werden. Eine Umrechnung der kartesischen Koordinaten in geografische Koordinaten erfolgt, indem die Winkel, die in der Grafik eingezeichnet sind, berechnet werden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) **Geben** Sie die drei Vektoren **an**, die zur Berechnung der geografischen Koordinaten von Punkt $P(3726{,}761538 \mid 655{,}5144302 \mid 5125{,}542977)$ benötigt werden.

c) **Berechnen** Sie die eingezeichneten Winkel zwischen den Vektoren und **geben** Sie die geografischen Koordinaten **an**.

(5) Aufgabe: Untersuchen von Lagebeziehungen bei Kugeln

Skizzieren und **beschreiben** Sie, welche Lagebeziehung die folgenden Objekte zueinander haben können. **Untersuchen** Sie, wie mathematisch die Lagebeziehung nachgewiesen werden kann.

a) Punkt und Kugel
b) Gerade und Kugel
c) Ebene und Kugel
d) Kugel und Kugel

Untersuchen von Lagebeziehungen bei Kugeln

Um die Lagebeziehung eines beliebigen Objektes (Punkt, Gerade, Ebene, Kugel) zu einer Kugel zu untersuchen, werden der Kugelmittelpunkt und der Kugelradius benötigt. Dann lässt sich die Untersuchung der Lagebeziehung auf bereits bekannte Verfahren zurückführen.

Um allgemein zu untersuchen, wie ein Objekt zu einer Kugel liegt, wird der kürzeste Abstand des Objektes zum Kugelmittelpunkt berechnet. Dieser Abstand wird dann mit dem Radius verglichen und daraus ergibt sich die Lagebeziehung.

- Punkt und Kugel: Abstand zweier Punkte (Seite 23 und 25)
- Gerade und Kugel: Abstand zwischen Punkt und Gerade (Seite 40)
- Ebene und Kugel: Abstand zwischen Punkt und Ebene (Seite 84)
- Kugel und Kugel: Abstand zweier Punkte (Seite 23 und 25)

Beispiel: Lagebeziehung zwischen Punkt und Kugel

Um zu untersuchen, wie ein Punkt zu einer Kugel liegt, wird der Abstand des Punktes zum Kugelmittelpunkt berechnet.

Ist dieser Abstand kleiner als der Radius, so liegt der Punkt innerhalb der Kugel.

Ist dieser Abstand gleich groß wie der Radius, so liegt der Punkt auf der Kugeloberfläche.

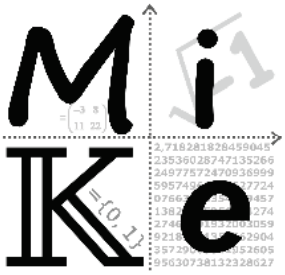
Ist dieser Abstand größer als der Radius, so liegt der Punkt außerhalb der Kugel.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Folgende Begriffe, mathematische Fähigkeiten und Lösungsstrategien sollten Sie in diesem Kapitel gelernt haben:

- ❑ Beschreiben einer Kugel im dreidimensionalen Raum
- ❑ Kugelgleichungen
- ❑ Berechnen der Schnittmenge mehrerer Kugeln
- ❑ Umrechnen von kartesischen zu geografischen Koordinaten
- ❑ Untersuchen von Lagebeziehungen bei Kugeln



Lösungen für die Aufgaben und Übungen

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Hier finden Sie zu allen Aufgaben und Übungsaufgaben des Buches Lösungen oder Lösungsansätze. In [eckigen Klammern] steht die Seitenzahl der zugehörigen (Übungs-) Aufgabe.

Lösungen 1: Dreidimensionale Objekte

(1) Aufgabe zum Einstieg [7]

Alle Darstellungen zeigen Möglichkeiten auf, um das dreidimensionale Gebäude zweidimensional darzustellen. Dabei gibt es Frontal- und Seitenansichten, Darstellungen mit einem oder mehr Fluchtpunkten, Abbildungen, bei denen die Grundfläche ohne Verzerrung dargestellt wird, aber auch perspektivische Darstellungen, bei denen unterschiedliche Winkel verwendet werden oder auch Verzerrungsfaktoren angewendet werden. Je nach Darstellung eigenen sich diese unterschiedlich gut, um beispielsweise eine Vorstellung des Objektes zu bekommen, reale Maße abzumessen oder auch die Dimensionen des Objekts einzuschätzen.

(2) Aufgabe: Elbinselvilla [8]

a) Der linke Gebäudeteil ist 4m breit, da die zweite Koordinate bei A den Wert 0 hat und bei B ist der Wert 4.

b) Der rechte Gebäudeteil ist $7\ \text{m}$ breit. Das kann man an der zweiten Koordinate von B und C erkennen. Diese liegen 7 Einheiten voneinander entfernt. Der Punkt lautet dann $\text{G}(10|11|0)$.

c) Der rechte Gebäudeteil ist 10m hoch. Vergleicht man die 3. Koordinate der Punkte C und G, dann beträgt die Differenz der beiden Werte 10.

d) H muss über B und auf der gleichen Höhe wie C liegen, also bei $\text{H}(10|4|10)$.

I muss ebenfalls über B und auf der gleichen Höhe wie D liegen, also bei $\text{I}(10|4|15)$.

e) I muss über B liegen, deswegen sind die ersten beiden Koordinaten gleich und die Höhe muss noch angepasst werden. Da er auf der gleichen Höhe wie D liegt, befindet sich der Punkt bei $\text{I}(10|4|15)$.

f) Die Tiefe beträgt 10m, da die beiden Punkte sich nur in der ersten Koordinate unterscheiden und dieser Abstand genau 10 Einheiten beträgt.

L muss über F und auf der gleichen Höhe wie C liegen, also bei $\text{L}(0|11|10)$.

g) J liegt genau zwischen B und G, also beträgt die zweite Koordinate 7,5, da 7,5 genau in der Mitte von 4 und 11 liegt. Die erste Koordinate ist genau wie bei B und G, da der Punkt genauso weit vorne ist, also lautet er $\text{J}(10|7{,}5|16)$.

K liegt genau zwischen D und I und auch zwischen E und I. Also beträgt die zweite Koordinate 2; dieser Wert ergibt sich aus den Werten 0 bei D und 4 bei I. Die erste Koordinate beträgt 8, da sie in der Mitte zwischen 6 bei E und 10 bei I liegt. Der Punkt lautet also $\text{K}(8|2|22)$.

(3) Aufgabe: Punkte im Raum finden und angeben [9]

a) Individuelle Lösung

b) Individuelle Lösung

c) Dieser Punkt liegt auf dem Fußboden.

d) Dieser Punkt liegt außerhalb des Raumes hinter der Wand.

(4) Aufgabe: Punkte im Raum [10]

a) Der Punkt A liegt in der xy-Ebene.

b) Der Punkt B liegt in der yz-Ebene.

c) Der Punkt C liegt auf der y-Achse und somit auch in der xy-Ebene und der yz-Ebene.

d) Der Punkt D liegt im Ursprung und somit auf allen drei Koordinatenachsen und in allen drei Koordinatenebenen.

(5) Übung: Fehlerhafte Koordinatensysteme [11]

a) Die x-Achse verläuft falsch: Sie muss ein Kästchen diagonal durchkreuzen und nicht zwei, wie in der Abbildung.

b) Die Skalierung der x-Achse ist fehlerhaft, da hier eine Kästchendiagonale einer

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Einheit entspricht. Eine Kästchendiagonale muss aber zwei Kästchenlängen entsprechen.

c) Die Reihenfolge der Achsen ist falsch.

d) Die x-Achse ist in die falsche Richtung skaliert.

e) Die Achsen sind ungleichmäßig skaliert: Auf der x-Achse entspricht eine Kästchendiagonale 5 Einheiten. Dann müssten bei der y-Achse und der z-Achse zwei Kästchen 5 Einheiten entsprechen. Das gilt aber nur für die y-Achse, bei der z-Achse ist dies verkürzt. So würde ein verzerrtes Bild entstehen.

f) Die x-Achse ist verkehrtherum skaliert und die Pfeilspitze zeigt zusätzlich in die negative x-Richtung.

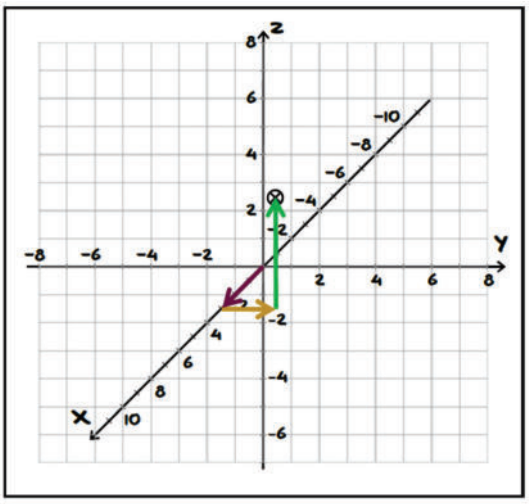
(6) Aufgabe: Drohne über Kaltehofe [12]

a) Hier gibt es unendlich viele verschiedene Lösungen (siehe Aufgabenteil b).

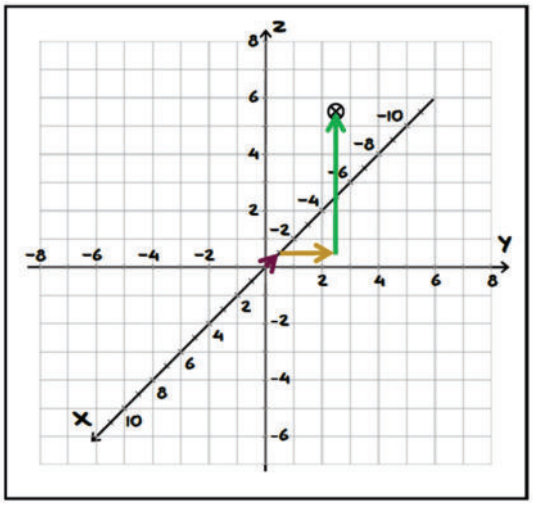
b) Die beiden angegeben Punkte sind beide mögliche Lösungen, da aufgrund der Perspektive keine eindeutige Aussage gemacht werden kann, wo genau die Drohne sich befindet.

(7) Übung: Einzeichnen von Punkten [13]

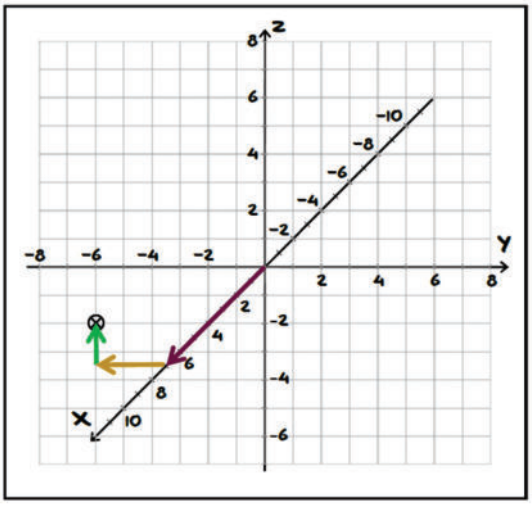
a)



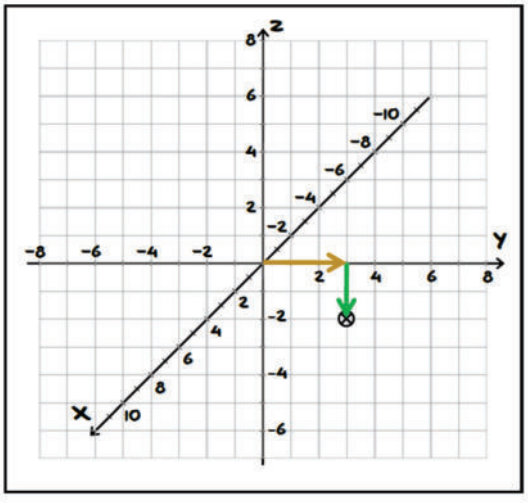
b)



c)



d)



Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(8) Aufgabe: Schattenwurf durch eine Lampe [13]

a) Der Ballmittelpunkt wirft seinen Schatten auf den Punkt $B'(1|0|1{,}5)$.

b) Das Objekt kann sich an einem beliebigen Punkt befinden mit $S(1{,}1|y|1{,}4)$, solange es zwischen der Lampe und der Wand bleibt.

c) Man kann den Punkt nicht genau angeben, da alle Punkte aus b) auf denselben Punkt an der Wand projiziert werden. So ist $S(1{,}1|0{,}5|1{,}4)$ ein möglicher Punkt, aber es gibt noch unendlich viele weitere.

d) Der Ballmittelpunkt wirft nun seinen Schatten auf den Punkt $B'(1|0{,}5|0)$.

e) Der Schatten eines Punktes lässt sich bestimmen, indem zwei der drei Koordinaten des Punktes gleichbleiben und die dritte Koordinate Null wird.

Welche Koordinate Null gesetzt wird, lässt sich mit der folgenden Regel festlegen:

Wird der Schatten auf die xy-Ebene geworfen, so wird die z-Koordinate 0.

Wird der Schatten auf die xz-Ebene geworfen, so wird die y-Koordinate 0.

Wird der Schatten auf die yz-Ebene geworfen, so wird die x-Koordinate 0.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker:innen

Was hat ein Mathematiker, der immer nur im Dreieck läuft? - Kreislaufprobleme

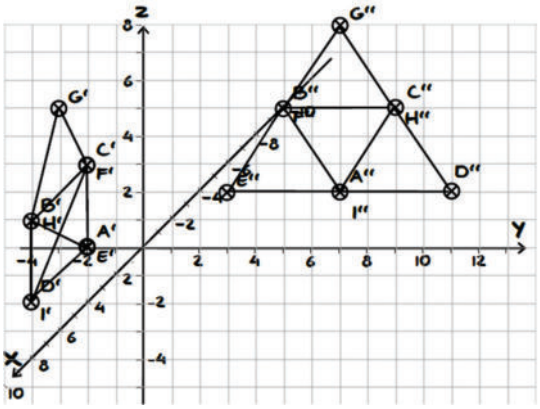
(9) Übung: Projektionsrätsel [14]

Nach Projektion in die xz-Ebene:

$A'(4\|0\|2)$	$B'(8\|0\|5)$	$C'(4\|0\|5)$
$D'(8\|0\|2)$	$E'(4\|0\|2)$	$F'(4\|0\|5)$
$G'(6\|0\|8)$	$H'(8\|0\|5)$	$I'(8\|0\|2)$

Nach Projektion in die yz-Ebene:

$A''(0\|7\|2)$	$B''(0\|5\|5)$	$C''(0\|9\|5)$
$D''(0\|11\|2)$	$E''(0\|3\|2)$	$F''(0\|5\|5)$
$G''(0\|7\|8)$	$H''(0\|9\|5)$	$I''(0\|7\|2)$



(10) Übung: Urbildpunkte rekonstruieren [15]

$A(4{,}5\|6\|7)$	$B(1\|0{,}5\|2{,}5)$	$C(3\|5\|4{,}5)$
$D(5\|6{,}5\|0{,}5)$	$E(5\|6{,}5\|5{,}5)$	

(11) Aufgabe: Doppelhaus [15]

a) Wasseranschluss Küche: $A'(-9|9{,}9|0{,}3)$

Abwasser Gäste-WC: $B'(-11{,}5|10{,}1|0{,}2)$

Telefonanschluss: $C'(-6|21|0{,}25)$

Elektroanschluss Herd: $D(-12|6|0{,}4)$

b) Wie bei der Projektion bleiben zwei Koordinaten gleich. Die dritte Koordinate wird in ihrem Vorzeichen verändert.

Wird der Punkt an der xz-Ebene gespiegelt, so wird das Vorzeichen der y-Koordinate geändert.

Wird der Punkt an der xy-Ebene gespiegelt, so wird das Vorzeichen der z-Koordinate geändert.

Wird der Punkt an der yz-Ebene gespiegelt, so wird das Vorzeichen der x-Koordinate geändert.

(12) Übung: Spiegelungen [17]

a) $B'(3|1{,}5|-5)$

b) $A'(5|-1|12)$

c) $B'(3|1{,}5|5)$

d) $C'(4|9|1)$

e) $A'(-5|1|-12)$

f) $C'(4|-9|-1)$

g) $B'(-3|-1{,}5|5)$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Lösung 2: Bewegungen im drei-dimensionalen Raum

(1) Aufgabe: Drohnensynchronflug 1 [18]

a) Die Drohne hat sich 17 Meter nach vorne, 8 Meter nach links und 14 Meter nach oben bewegt, also 17 Meter in positiver Richtung entlang der x-Achse, 8 Meter in negativer Richtung entlang der y-Achse und 14 Meter in positiver Richtung entlang der z-Achse.

b) Nach der Bewegung befindet sich die Drohne im Punkt $B'(19|-10|17)$.

c) Vor der Bewegung befand sich die Drohne im Punkt $C(2|18|1)$.

(2) Aufgabe: Drohnensynchronflug 2 [20]

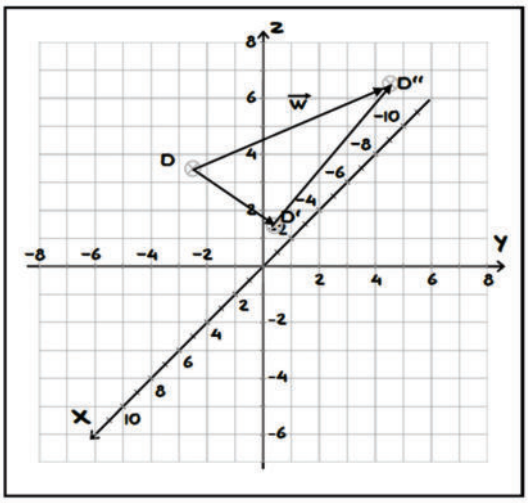
a) $\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OD'} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{OD''} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

d) $\vec{w} = \overrightarrow{DD''} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$

e)



Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker:innen

Kommt der Nullvektor zum Arzt: "Herr Doktor, Herr Doktor, können Sie mir helfen? Ich bin so orientierungslos!"

(3) Übung: Addieren und Subtrahieren von Vektoren [22]

a) $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{u} - \vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}$

d) $\vec{v} + \vec{w} - \vec{u} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} -12 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{u} + \vec{u} + \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -3 \end{pmatrix}$

(4) Aufgabe: Drohnensynchronflug 3 [22]

a) $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{OB'} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} 7{,}5 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

(5) Übung: Mit Vektoren von Punkt zu Punkt [23]

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$= \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}$

c) $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}$

d) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$

e) In dieser Lösung wurden zwei Punkte voneinander subtrahiert. Diese Rechnung ist nicht möglich, da sich formal nur Vektoren (und keine Punkte) addieren oder subtrahieren lassen. Der Ergebnisvektor ist trotzdem richtig.

(6) Aufgabe: Tauchroboter 1 [24]

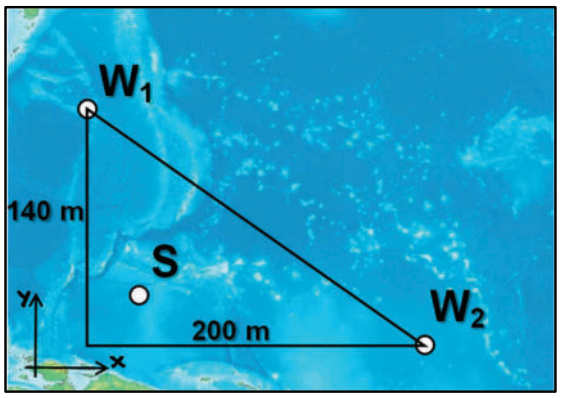
a) $\overrightarrow{SW_1} = \overrightarrow{OW_1} - \overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ -300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -30 \\ 110 \\ -300 \end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{W_1W_2} = \overrightarrow{OW_2} - \overrightarrow{OW_1}$

$= \begin{pmatrix} 200 \\ 10 \\ -300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 150 \\ -300 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -140 \\ 0 \end{pmatrix}$

c) Die Verbindung der beiden Punkte ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, von dem die Längen der Katheten bekannt sind.



Mithilfe des Satzes des Pythagoras kann nun die Entfernung berechnet werden:

$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{200^2 + 140^2}$

$= \sqrt{59600} \approx 244$

Die Wrackteile sind demnach ca. 244m voneinander entfernt.

d) In dieser Lösung wurden nur die Entfernungen aus der Draufsicht betrachtet, nicht aber die Tiefe. Es wird nicht berücksichtigt, dass das Wrackteil 300m unterhalb der Wasseroberfläche liegt.

e) Um auch die Tiefe zu berücksichtigen, muss man zwei Mal den Satz des Pythagoras anwenden. Nachdem man die Entfernung an der Wasseroberfläche berechnet hat, muss man auch noch die Entfernung in die Tiefe mit dem Satz des Pythagoras berechnen.

Entfernung an der Wasseroberfläche:

$c_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{30^2 + 110^2}$

$= \sqrt{13000} \approx 114$

Betrachtung des zweiten Dreiecks mit der Entfernung an der Wasseroberfläche (c_1) als eine Kathete und der Tiefe (z) als die zweite Kathete:

$c_2 = \sqrt{c_1^2 + z^2} = \sqrt{114^2 + 300^2}$

$= \sqrt{102996} \approx 320{,}9$

Der Abstand zwischen dem Schiff und dem ersten Wrackteil beträgt damit 320,9m. Somit kann dieses Wrackteil mit der Versorgungsleine erreicht werden.

f) Entfernung an der Wasseroberfläche:

$c_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{170^2 + 30^2}$

$= \sqrt{29800} \approx 172{,}63$

Betrachtung des zweiten Dreiecks mit der Entfernung an der Wasseroberfläche (c_1) als eine Kathete und der Tiefe (z) als die zweite Kathete:

$c_2 = \sqrt{c_1^2 + z^2} = \sqrt{172{,}63^2 + 300^2}$

$= \sqrt{119801{,}12} \approx 346{,}12$

Der Abstand zwischen dem Schiff und dem ersten Wrackteil beträgt damit 346,12m. Somit reicht die Länge der Versorgungsleine nicht aus.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(7) Übung: Bestimmen der Länge / des Betrages eines Vektors [25]

a) $|\vec{v}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 7^2} = \sqrt{62} \approx 7{,}87$

$|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{41} \approx 6{,}4$

b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -14 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 11^2 + (-14)^2}$

$= \sqrt{321} \approx 17{,}92$

(8) Aufgabe: Tauchroboter 2 [26]

a) $\left|\vec{t}\right| = \sqrt{20^2 + (-30)^2 + (-25)^2}$

$= \sqrt{1925} \approx 43{,}87$

In 3 Minuten legt der Tauchroboter demnach $43{,}87\text{m}$ zurück. Damit legt er pro Minute $14{,}62\text{m}$ zurück und hat somit eine Geschwindigkeit von $14{,}62\ \frac{\text{m}}{\text{min}}$.

b) In sechs Minuten taucht der Roboter das Doppelte des ursprünglichen Vektors:

$\overrightarrow{t_6} = 2 \cdot \vec{t} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -60 \\ -50 \end{pmatrix}$

c) In 30 Minuten taucht der Roboter das Zehnfache des ursprünglichen Vektors:

$\overrightarrow{t_{30}} = 10 \cdot \vec{t} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -30 \\ -25 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 200 \\ -300 \\ -250 \end{pmatrix}$

d) Die Tiefe wird durch die z-Koordinate angegeben. Diese Koordinate muss also -300 sein. Gesucht ist a in der folgenden Gleichung: $-25a = -300$.

Damit ergibt sich $a = \frac{-300}{-25} = 12$.

Der Roboter erreicht nach $12 \cdot 3 = 36$ Minuten eine Tiefe von 300 Metern.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker:innen

Kommt ein Vektor zum Arzt: "Herr Doktor, Herr Doktor, können Sie mir helfen? Ich bin linear abhängig!"

(9) Übung: Skalarmultiplikation [27]

a) $5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 35 \end{pmatrix}$

b) $3{,}5 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ -21 \\ -7 \end{pmatrix}$

c) $2 \cdot \vec{v} + 7 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ -42 \\ -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -36 \\ 0 \end{pmatrix}$

d) $3 \cdot \vec{v} - 2 \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} -6 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -12 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 21 \\ 25 \end{pmatrix}$

e) $-0{,}5 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1{,}5 \\ -3{,}5 \end{pmatrix}$

Lösung 3: Geraden im dreidimensionalen Raum

(1) Aufgabe: Flugbahn eines Flugzeugs [28]

a) $\overrightarrow{OF_1} = \overrightarrow{OF} + \vec{v} = \begin{pmatrix} 22 \\ 41 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 13{,}3 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 26 \\ 54{,}3 \\ 7{,}25 \end{pmatrix}$

Nach einer Minute befindet sich das Flugzeug im Punkt $F_1(26|54{,}3|7{,}25)$.

b) $\overrightarrow{OF_3} = \overrightarrow{OF} + 3 \cdot \vec{v}$

$= \begin{pmatrix} 22 \\ 41 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13{,}3 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 80{,}9 \\ 7{,}15 \end{pmatrix}$

Nach drei Minuten befindet sich das Flugzeug im Punkt $F_3(34|80{,}9|7{,}15)$.

c) $\overrightarrow{OF_{-5}} = \overrightarrow{OF} - 5 \cdot \vec{v}$

$= \begin{pmatrix} 22 \\ 41 \\ 7{,}3 \end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 13{,}3 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -25{,}5 \\ 7{,}55 \end{pmatrix}$

Vor fünf Minuten befindet sich das Flugzeug im Punkt $F_{-5}(2|-25{,}5|7{,}55)$.

d) $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 13{,}3^2 + (-0{,}05)^2} = 13{,}89$

Pro Minute legt das Flugzeug $13{,}89\text{km}$ zurück.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(2) Übung: Parameterdarstellung einer Geraden [29]

a) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ -7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

Bei $t = 3$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ -7 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ 27 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Bei $t = -4$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 26 \\ 24 \\ -7 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 20 \\ -27 \end{pmatrix}$$

b) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$

Bei $t = 3$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ -6 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Bei $t = -4$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -8 \\ -27 \\ 39 \end{pmatrix}$$

c) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Bei $t = 3$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 11 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Bei $t = -4$ gilt:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix} + (-4) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16 \\ 4 \\ 23 \end{pmatrix}$$

(3) Aufgabe: U-Boot-Tauchfahrt [29]

a) $u: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4100 \\ -110 \\ -18 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4100 \\ -110 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6050 \\ 85 \\ -39 \end{pmatrix}$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{matrix} 100 - 4100t = -6050 \\ 250 - 110t = 85 \\ -12 - 18t = -39 \end{matrix} \right|$$

Diese Gleichung ist lösbar, wenn $t = 1{,}5$. Das bedeutet, dass der Punkt auf der Geraden liegt.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4100 \\ -110 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8100 \\ 45 \\ -43 \end{pmatrix}$$

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\left| \begin{matrix} 100 - 4100t = -8100 \\ 250 - 110t = 45 \\ -12 - 18t = -43 \end{matrix} \right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Der Punkt liegt nicht auf der Geraden.

c) Die Tiefe wird durch die z-Koordinate mit $z = -25$ beschrieben, die x- und y-Koordinate sind unbekannt.

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ -12 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4100 \\ -110 \\ -18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ -25 \end{pmatrix}$$

Es ist nur die dritte Zeile des zugehörigen Gleichungssystems zu betrachten.

$$-12 - 18t = -25$$

$$t = \frac{13}{18}$$

$$\begin{pmatrix} 100 \\ 250 \\ -12 \end{pmatrix} + \frac{13}{18} \cdot \begin{pmatrix} -4100 \\ -110 \\ -18 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -2861 \\ 171 \\ -25 \end{pmatrix}$$

(4) Aufgabe: Parameterdarstellung einer Geraden aus 2 Punkten [30]

a) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 17 \\ 975 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 26 \\ -987 \\ 31 \end{pmatrix}$

c) $i: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 985 \\ 63 \\ 19 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1020 \\ -57 \\ -14 \end{pmatrix}$

(5) Übung: Punktprobe [31]

a) $\begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 8 \end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 4 + 3t = 10 \\ 11 - 7t = -3 \\ -6 + 7t = 8 \end{matrix} \right|$$

Der Punkt $P(10|-3|8)$ liegt mit $t = 2$ auf der Geraden.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) $\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-12\\-8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\\8\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}-2-12t=10\\5-8t=-3\\8+0t=8\end{vmatrix}$$

Der Punkt $\mathrm{P}(10|-3|8)$ liegt nicht auf der Geraden.

c) Bestimme zunächst eine Parameterdarstellung der Geraden:

$$g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$
$$=\begin{pmatrix}-3\\-1\\9\end{pmatrix}+t\cdot\left[\begin{pmatrix}6\\11\\12\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3\\-1\\9\end{pmatrix}\right]$$
$$=\begin{pmatrix}-3\\-1\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\3\end{pmatrix}$$

Setze nun die Parameterdarstellung der Geraden und den Ortsvektor zu Punkt C gleich:

$$\begin{pmatrix}-3\\-1\\9\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}9\\12\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7{,}5\\13\\12{,}5\end{pmatrix}$$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}-3+9t=7{,}5\\-1+12t=13\\9+3t=12{,}5\end{vmatrix}$$

Der Punkt $\mathrm{C}(7{,}5|13|12{,}5)$ liegt mit $t=\frac{7}{6}$ auf der Geraden.

(6) Aufgabe: Landeanflug eines Flugzeugs [32]

a) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix}16{,}6\\13{,}5\\0{,}114\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-8\\-15{,}6\\2{,}23\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}24{,}6\\29{,}1\\-2{,}116\end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|=\sqrt{24{,}6^2+29{,}1^2+(-2{,}116)^2}$$
$$\approx 38{,}16$$

Das Flugzeug fliegt $38{,}16\ \mathrm{km}$ innerhalb von 10 Minuten.

$$38{,}16:10=3{,}816$$

Das Flugzeug fliegt mit einer Geschwindigkeit von $3{,}816\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{min}}$ bzw. $228{,}96\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$.

b) $g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}-8\\-15{,}6\\2{,}23\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}24{,}6\\29{,}1\\-2{,}116\end{pmatrix}$

c) $h\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}16{,}6\\13{,}5\\0{,}114\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}9\\-0{,}2\end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix}16{,}6\\13{,}5\\0{,}114\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}9\\-0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18{,}025\\15{,}153\\0\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}16{,}6+2{,}5t=18{,}025\\13{,}5+2{,}9t=15{,}153\\0{,}114-0{,}2t=0\end{vmatrix}$$

Das Flugzeug trifft den idealen Aufsetzpunkt mit $t=0{,}57$.

e) $\begin{pmatrix}16{,}6\\13{,}5\\0{,}114\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}2{,}5\\2{,}9\\-0{,}2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0{,}05\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}16{,}6+2{,}5t=x\\13{,}5+2{,}9t=y\\0{,}114-0{,}2t=0{,}05\end{vmatrix}$$

Das Flugzeug befindet sich mit $t=0{,}32$ im Punkt $\mathrm{P}(17{,}4|14{,}428|0{,}05)$ auf einer Höhe von $0{,}05\mathrm{km}$.

f) In der Realität sind Flugbahnen nicht durchgängig geradlinig, weil weitere Faktoren Einfluss nehmen, zum Beispiel:

- Wind- und Wetterverhältnisse
- Übergang zwischen Flugphasen
- Vermeidung von eingeschränkt nutzbaren Flugräumen
- Berücksichtigung anderen Flugverkehrs
- Berücksichtigung der Erdkrümmung

Für kleinere Streckenabschnitte lässt sich eine Gerade als mathematisches Modell trotzdem sinnvoll als gute Näherung nutzen.

(7) Übung: Punkte einer Geraden bei vorgegebenen Bed. bestimmen [33]

a) $\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}19\\y\\z\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$\left|\begin{matrix}7-4t=19\\1+3t=y\\2+2t=z\end{matrix}\right|$

Es ergibt sich $t=-3$. Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $\mathrm{A}(19|-8|-4)$.

b) $\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\10\\z\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$\left|\begin{matrix}7-4t=x\\1+3t=10\\2+2t=z\end{matrix}\right|$

Es ergibt sich $t=3$. Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten $\mathrm{B}(-5|10|8)$.

c) $\begin{pmatrix}7\\1\\2\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\-6\end{pmatrix}$

Löse das zugehörige Gleichungssystem:

$\left|\begin{matrix}7-4t=x\\1+3t=y\\2+2t=-6\end{matrix}\right|$

Es ergibt sich $t=-4$. Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten:

$\mathrm{C}(23|-11|-6)$.

Lösung 4: Abstände und Lagebeziehungen im dreidimensionalen Raum

(1) Übung: Anwenden des Orthogonalitätskriteriums [35]

a) $\begin{pmatrix}4\\-6\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix}$

$=4\cdot3+(-6)\cdot1+2\cdot(-3)$

$=12-6-6=0$

Die beiden Vektoren sind orthogonal zueinander.

b) $\begin{pmatrix}5\\2\\1\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-3\\7\\2\end{pmatrix}$

$=5\cdot(-3)+2\cdot7+1\cdot2$

$=-15+14+2=1\neq0$

Die beiden Vektoren sind nicht orthogonal zueinander.

c) $\begin{pmatrix}-10\\2\\2{,}5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}$

$=(-10)\cdot1+2\cdot0+2{,}5\cdot4$

$=-10+10=0$

Die beiden Vektoren sind orthogonal zueinander.

d) $\begin{pmatrix}7\\-2\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}2\\7\\0\end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix}7\\-2\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\5\\2\end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix}7\\-2\\5\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}-5\\0\\7\end{pmatrix}=0$

Die beiden Vektoren sind jeweils orthogonal zueinander.

e) $\begin{pmatrix}-2\\5\\3t\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}t\\4\\2\end{pmatrix}$

$=(-2)\cdot t+5\cdot4+3t\cdot2$

$=-2t+20+6t$

$=4t+20$

Löse nun die Gleichung $4t+20=0$.

Die beiden Vektoren sind für $t=-5$ orthogonal zueinander.

f) $\begin{pmatrix}2\\4t\\3\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}t^2\\-3\\6\end{pmatrix}$

$=2\cdot t^2+4t\cdot(-3)+3\cdot6$

$=2t^2-12t+18$

Löse nun die folgende Gleichung:

$2t^2-12t+18=0\ \ |:2$

$t^2-6t+9=0$

Die beiden Vektoren sind für $t=3$ orthogonal zueinander.

(2) Aufgabe: Anwenden des Orthogonalitätskriteriums II [36]

a) $\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}1\\-5\\-1\end{pmatrix}$

$=(-4)\cdot1+3\cdot(-5)+2\cdot(-1)$

$=-4-15-2=-21\neq0$

Der Vektor und die Gerade sind nicht orthogonal zueinander.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) $\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}3\\2\\3\end{pmatrix}$

$= (-4)\cdot 3 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3$

$= -12 + 6 + 6 = 0$

Der Vektor und die Gerade sind orthogonal zueinander.

c) Der Fehler liegt darin, dass für die Berechnung der Stützvektor verwendet wurde und nicht der Richtungsvektor. Der Stützvektor beinhaltet keine Informationen darüber, in welche Richtung eine Gerade verläuft, und kann somit auch nicht verwendet werden, um die Orthogonalität zu einem Vektor oder zu einer anderen Geraden zu überprüfen.

d) $\begin{pmatrix}-4\\3\\2\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}5\\y\\4\end{pmatrix}$

$= (-4)\cdot 5 + 3\cdot y + 2\cdot 4$

$= -20 + 3y + 8$

$= 3y - 12$

Löse nun die Gleichung $3y - 12 = 0$.

Die Gerade und der Vektoren sind für $y = 4$ orthogonal zueinander.

(3) Aufgabe: Lärmbelästigung in der Einflugschneise [38]

a) $\overrightarrow{F_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF_1}$

$= \begin{pmatrix}3{,}029\\4{,}857\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\3\\0{,}114\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}971\\1{,}857\\-0{,}114\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \left|\begin{pmatrix}-0{,}971\\1{,}857\\-0{,}114\end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{(-0{,}971)^2 + 1{,}857^2 + (-0{,}114)^2}$

$\approx 2{,}1$

Das Flugzeug ist ca. $2{,}1\text{km}$ bzw. 2100m vom Messpunkt entfernt.

Die Lärmbelästigung beträgt ca. $62{,}5\text{dB}$.

$\overrightarrow{F_2M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF_2}$

$= \begin{pmatrix}3{,}029\\4{,}857\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3{,}358\\3{,}765\\0{,}059\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}329\\1{,}092\\-0{,}059\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \left|\begin{pmatrix}-0{,}329\\1{,}092\\-0{,}059\end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{(-0{,}329)^2 + 1{,}092^2 + (-0{,}059)^2}$

$\approx 1{,}142$

Das Flugzeug ist ca. $1{,}142\text{km}$ bzw. 1142m vom Messpunkt entfernt.

Die Lärmbelästigung beträgt ca. 70dB.

$\overrightarrow{F_3M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OF_3}$

$= \begin{pmatrix}3{,}029\\4{,}857\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2{,}716\\4{,}530\\0{,}004\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}313\\0{,}327\\-0{,}004\end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{F_3M}\right| = \left|\begin{pmatrix}0{,}313\\0{,}327\\-0{,}004\end{pmatrix}\right|$

$= \sqrt{0{,}313^2 + 0{,}327^2 + (-0{,}004)^2} \approx 0{,}453$

Das Flugzeug ist ca. $0{,}453\text{km}$ bzw. 453m vom Messpunkt entfernt.

Die Lärmbelästigung beträgt ca. 80dB.

b) $\begin{pmatrix}-0{,}971\\1{,}857\\-0{,}114\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-0{,}642\\0{,}765\\-0{,}055\end{pmatrix} \approx 2{,}05 \neq 0$

$\begin{pmatrix}-0{,}329\\1{,}092\\-0{,}059\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-0{,}642\\0{,}765\\-0{,}055\end{pmatrix} \approx 1{,}05 \neq 0$

$\begin{pmatrix}0{,}313\\0{,}327\\-0{,}004\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-0{,}642\\0{,}765\\-0{,}055\end{pmatrix} \approx 0{,}05 \neq 0$

Der gesuchte Punkt ist keiner der drei angegebenen Punkte.

c) Der Vektor $\overrightarrow{MX}$ beschreibt die Menge aller Vektoren, die von dem Messpunkt zu der Geraden, die den Landeanflug des Flugzeugs beschreibt, führen.

d) $\begin{pmatrix}0{,}971 - 0{,}642s\\-1{,}857 + 0{,}765s\\0{,}114 - 0{,}055s\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}-0{,}642\\0{,}765\\-0{,}055\end{pmatrix}$

$= 1{,}000414s - 2{,}050257$

Löse nun die folgende Gleichung:

$1{,}000414s - 2{,}050257 = 0$

Für $s \approx 2{,}0494$ ist der Vektor $\overrightarrow{MX}$ orthogonal zu der Geraden, die den Landeanflug des Flugzeugs beschreibt.

e) $\begin{pmatrix}4\\3\\0{,}114\end{pmatrix} + 2{,}0494 \cdot \begin{pmatrix}-0{,}642\\0{,}765\\-0{,}055\end{pmatrix}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$\approx \begin{pmatrix} 2{,}68428 \\ 4{,}5678 \\ 0{,}00128 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix} 2{,}684{,}28 \\ 4{,}567{,}8 \\ 0{,}00128 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3{,}029 \\ 4{,}857 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}34472 \\ -0{,}2892 \\ 0{,}00128 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{MP}| = \left| \begin{pmatrix} -0{,}34472 \\ -0{,}2892 \\ 0{,}00128 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-0{,}34472)^2 + (-0{,}2892)^2 + 0{,}00128^2}$$

$$\approx 0{,}45$$

Das Flugzeug ist ca. $0{,}45\text{km}$ bzw. 450m vom Messpunkt entfernt.

Die Lärmbelästigung beträgt ca. 80dB.

(4) Übung: Berechnen des Abstands zw. einem Pkt. und einer Geraden [41]

a) $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} s-3 \\ s-3 \\ -4s+3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s-3 \\ s-3 \\ -4s+3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 18s - 18$$

Löse die Gleichung $18s - 18 = 0$.

Es ergibt sich $s = 1$.

Setze nun $s = 1$ in $\overrightarrow{PX}$ ein und berechne die Länge dieses Vektors:

$$\begin{pmatrix} 1-3 \\ 1-3 \\ -4 \cdot 1 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PX}| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3$$

Der Abstand beträgt 3 Längeneinheiten.

b) $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 \\ 17 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 3s+2 \\ -4s-11 \\ 2s+4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3s+2 \\ -4s-11 \\ 2s+4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 29s + 58$$

Löse die Gleichung $29s + 58 = 0$.

Es ergibt sich $s = -2$.

Setze nun $s = -2$ in $\overrightarrow{PX}$ ein und berechne die Länge dieses Vektors:

$$\begin{pmatrix} 3 \cdot (-2) + 2 \\ -4 \cdot (-2) - 11 \\ 2 \cdot (-2) + 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PX}| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{25} = 5$$

Der Abstand beträgt 5 Längeneinheiten.

c) $\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 9 \\ -26 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} s-5 \\ s-5 \\ -4s+20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} s-5 \\ s-5 \\ -4s+20 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = 18s - 90$$

Löse die Gleichung $18s - 90 = 0$.

Es ergibt sich $s = 5$.

Setze nun $s = 5$ in $\overrightarrow{PX}$ ein und berechne die Länge dieses Vektors:

$$\begin{pmatrix} 5-5 \\ 5-5 \\ -4 \cdot 5 + 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{PX}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0$$

Der Punkt liegt auf der Geraden und somit beträgt der Abstand 0 Längeneinheiten.

d) $\overrightarrow{MX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0{,}114 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2{,}779 \\ 4{,}857 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}642s + 1{,}221 \\ 0{,}765s - 1{,}857 \\ -0{,}055s + 0{,}114 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -0{,}642s + 1{,}221 \\ 0{,}765s - 1{,}857 \\ -0{,}055s + 0{,}114 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -0{,}642 \\ 0{,}765 \\ -0{,}055 \end{pmatrix}$$

$$= 1{,}000414s - 2{,}210757$$

Löse die folgende Gleichung:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$1{,}000414s - 2{,}210757 = 0.$

Es ergibt sich $s \approx 2{,}20984$.

Setze nun $s = 2{,}20984$ in $\overrightarrow{MX}$ ein und berechne die Länge dieses Vektors:

$$\begin{pmatrix} -0{,}642 \cdot 2{,}20984 + 1{,}221 \\ 0{,}765 \cdot 2{,}20984 - 1{,}857 \\ -0{,}055 \cdot 2{,}20984 + 0{,}114 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -0{,}19771728 \\ -0{,}1664724 \\ -0{,}0075412 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{MX}\right| = \left|\begin{pmatrix} -0{,}19771728 \\ -0{,}1664724 \\ -0{,}0075412 \end{pmatrix}\right| \approx 0{,}26$$

Das Flugzeug ist ca. $0{,}26\text{km}$ bzw. 260m vom Messpunkt entfernt.

Die Lärmbelästigung beträgt ca. 85dB.

(5) Aufgabe: Tunnelbauprojekt [41]

a) Der kleinste Abstand zweier paralleler Geraden ist an jedem Punkt einer der Geraden gleich. Es gibt also unendlich viele Punkte, an denen die beiden Geraden den kürzesten Abstand zueinander haben. Man kann also einen beliebigen Punkt auswählen, um den Abstand der beiden parallelen Geraden zu berechnen. Aus diesem Grund kann man beispielsweise die Gerade t_1 und den Stützvektor der Geraden t_2 verwenden, um den Abstand der beiden parallelen Geraden zu ermitteln.

b) $$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} -120 \\ 30 \\ 500 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 68 \\ 205 \\ 502 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10r - 188 \\ 8r - 175 \\ 0{,}1r - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 10r - 188 \\ 8r - 175 \\ 0{,}1r - 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 0{,}1 \end{pmatrix}$$

$$= 164{,}01r - 3280{,}2$$

Löse die folgende Gleichung:

$164{,}01r - 3280{,}2 = 0$

Es ergibt sich $r = 20$.

Setze nun $r = 20$ in $\overrightarrow{PX}$ ein und berechne die Länge dieses Vektors:

$$\begin{pmatrix} 10 \cdot 20 - 188 \\ 8 \cdot 20 - 175 \\ 0{,}1 \cdot 20 - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{PX}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \approx 19{,}2$$

Der Abstand der Mittelpunktgeraden beträgt $19{,}2\text{m}$. Die beiden Tunnelröhren halten somit den Mindestabstand von 15m ein.

c) Wenn die beiden Tunnelröhren nicht parallel verlaufen, gibt es nur einen Punkt, an dem die beiden Mittelpunktgeraden den kürzesten Abstand zueinander haben. Man kann also nicht einen beliebigen Punkt auswählen, um den kürzesten Abstand zu berechnen.

(6) Übung: U-Bahn-Tunnelbau [44]

Ermittlung der Menge aller Verbindungsvektoren zwischen jedem Punkt der Geraden t_1 und jedem Punkt der Geraden t_2:

$$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -20 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 17 \\ -15 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 7{,}5 \\ -0{,}05 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 4s + 10t - 8 \\ -3s - 7{,}5t - 14 \\ 0{,}05t - 5 \end{pmatrix}$$

Der kürzeste Verbindungsvektor berechnet sich mit dem Orthogonalitätskriterium zwischen dem Verbindungsvektor und der Geraden t_1:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4s + 10t - 8 \\ -3s - 7{,}5t - 14 \\ 0{,}05t - 5 \end{pmatrix} = 0$$

Orthogonalitätskriterium zwischen dem Verbindungsvektor und der Geraden h:

$$\begin{pmatrix} -10 \\ 7{,}5 \\ -0{,}05 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4s + 10t - 8 \\ -3s - 7{,}5t - 14 \\ 0{,}05t - 5 \end{pmatrix} = 0$$

Daraus ergeben sich zwei Gleichungen:

$4 \cdot (4s + 10t - 8) + 3 \cdot (3s + 7{,}5t + 14) = 0$

$-10 \cdot (4s + 10t - 8) + 7{,}5 \cdot (-3s - 7{,}5t - 14) - 0{,}05 \cdot (0{,}05t - 5) = 0$

Durch Ausmultiplizieren ergeben sich die Gleichungen:

$25s + 62{,}5t + 10 = 0$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$-62{,}5s - 156{,}2525t - 24{,}75 = 0$

Dieses Gleichungssystem wird nach s und t aufgelöst.

$s = -250{,}4$ und $t = 100$

s und t werden in den folgenden Vektor eingesetzt:

$$\begin{pmatrix} 4s + 10t - 8 \\ -3s - 7{,}5t - 14 \\ 0{,}05t - 5 \end{pmatrix}$$

Dann ergibt sich der Verbindungsvektor

$$\begin{pmatrix} -9{,}6 \\ -12{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge dieses Vektors beträgt

$$\left|\begin{pmatrix} -9{,}6 \\ -12{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 16$$

Damit beträgt der Abstand der beiden Mittelpunktgeraden der U-Bahntunnelröhren 16m und der Mindestabstand wird somit eingehalten.

(7) Übung: Abstände von Geraden [44]

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} -4r - 2s - 7 \\ r - s - 2 \\ r + 2s - 8 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -4r - 2s - 7 \\ r - s - 2 \\ r + 2s - 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 18r + 9s + 18$

$\begin{pmatrix} -4r - 2s - 7 \\ r - s - 2 \\ r + 2s - 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = -9r - 9s$

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$18r + 9s + 18 = 0$

$-9r - 9s = 0$

Es ergibt sich $r = -2$ und $s = 2$.

Setze diese beiden Werte ein:

$\begin{pmatrix} -4 \cdot (-2) - 2 \cdot 2 - 7 \\ -2 - 2 - 2 \\ -2 + 2 \cdot 2 - 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$

Berechne nun die Länge des Vektors:

$\left|\begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}\right| = 9$

Die beiden Geraden haben einen Abstand von 9 Längeneinheiten.

b) $\begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 17 \\ -1 \\ 29 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} -8r - 7 \\ 5r - 7s + 9 \\ 6r - 26 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -8r - 7 \\ 5r - 7s + 9 \\ 6r - 26 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

$= 125r - 35s - 55$

$\begin{pmatrix} -8r - 7 \\ 5r - 7s + 9 \\ 6r - 26 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} = 35r - 49s + 63$

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$125r - 35s - 55 = 0$

$35r - 49s + 63 = 0$

Es ergibt sich $r = 1$ und $s = 2$.

Setze diese beiden Werte ein:

$\begin{pmatrix} -8 \cdot 1 - 7 \\ 5 \cdot 1 - 7 \cdot 2 + 9 \\ 6 \cdot 1 - 26 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}$

$\left|\begin{pmatrix} -15 \\ 0 \\ -20 \end{pmatrix}\right| = 25$

Die beiden Geraden haben einen Abstand von 25 Längeneinheiten.

c) $\begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right]$

$= \begin{pmatrix} -s + 3 \\ -2r - 8 \\ r - s + 7 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -s + 3 \\ -2r - 8 \\ r - s + 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = 5r - s + 23$

$\begin{pmatrix} -s + 3 \\ -2r - 8 \\ r - s + 7 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = r - 2s + 10$

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$5r - s + 23 = 0$

$r - 2s + 10 = 0$

Es ergibt sich $r = -4$ und $s = 3$.

Setze diese beiden Werte ein:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$\begin{pmatrix} -3+3 \\ -2\cdot(-4)-8 \\ -4-3+7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Länge des Vektors beträgt 0.

Die beiden Geraden haben somit einen Abstand von 0 Längeneinheiten. Das bedeutet, dass sie sich mindestens an einer Stelle berühren oder schneiden.

Lösung 5: Lagebeziehungen von Geraden im dreidimensionalen Raum

(1) Aufgabe: Flugrouten [45]

a) Wenn die beiden Flugrouten sich schneiden, dann muss es eine Lösung geben, wenn man die Geraden gleichsetzt:

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -800 \\ 310 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 281 \\ 7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -650 \\ 250 \\ 3{,}5 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist also das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 250-800r = 300-650s \\ 300+310r = 281+250s \\ 8-3r = 7+3{,}5s \end{vmatrix}$$

Es ergibt sich $r = 0{,}1$ und $s = 0{,}2$.

Damit haben die beiden Geraden einen Schnittpunkt. Das bedeutet im Sachkontext, dass sich die Flugrouten in einem Punkt schneiden. Da wir aber nicht wissen, zu welcher Zeit die Flugzeuge mit welcher Geschwindigkeit diese Routen entlang fliegen, können wir nicht sagen, ob sie sich dort treffen würden oder lediglich zu unterschiedlichen Zeiten durch denselben Punkt fliegen.

b) Auch hier werden die beiden Geraden gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} 250 \\ 300 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -800 \\ 310 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 350 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 720 \\ -279 \\ 2{,}7 \end{pmatrix}$$

Zu lösen ist das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix} 250-800r = 210+720t \\ 300+310r = 350-279t \\ 8-3r = 8+2{,}7t \end{vmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, was bedeutet, dass die beiden Flugrouten keinen Schnittpunkt haben.

c) Flugrouten, die keinen Schnittpunkt haben, können entweder parallel zueinander verlaufen oder versetzt im Raum (Fachbegriff: windschief). Natürlich können die Flugrouten auch identisch sein.

d) In der Realität können Flugobjekte auch dann kollidieren, wenn sich die Geraden ihrer Flugbahnen nicht schneiden, da reale Flugobjekte nicht punktförmig sind. Um eine Kollision auszuschließen, muss noch die räumliche Ausdehnung der Drohnen berücksichtigt werden.

Darüber lachen (nicht nur) Mathematiker:innen

Treffen sich zwei Geraden. Sagt die eine: „Wenn wir uns beim nächsten Mal treffen, gibst du einen aus.“

(2) Übung: Lagebeziehungen von Geraden [48]

a) Schritt 1:

$$a \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -4a = 2 \\ -2a = 1 \\ 4a = -2 \end{vmatrix}$$

Es ergibt sich $a = -0{,}5$.

Damit sind die beiden Richtungsvektoren linear abhängig und die Geraden sind entweder identisch oder parallel.

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 15 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 2-4r = 9+2s \\ 5-2r = 7+s \\ 7+4r = 15-2s \end{vmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

Die beiden Geraden sind somit parallel.

b) Schritt 1:

$$a \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} -8a = 0 \\ 5a = 7 \\ 6a = 0 \end{vmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung und die Richtungsvektoren sind somit linear unabhängig. Damit sind die beiden Geraden entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix}10\\8\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-8\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17\\-1\\29\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\7\\0\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left|\begin{matrix}10-8r=17+0s\\8+5r=-1+7s\\3+6r=29+0s\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, weswegen die beiden Geraden windschief sind.

c) Schritt 1:

$$a\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\rightarrow\left|\begin{matrix}0\mathrm{a}=1\\-2a=0\\a=1\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung und die Richtungsvektoren sind somit linear unabhängig. Damit sind die beiden Geraden entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix}8\\3\\6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\11\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left|\begin{matrix}8=5+s\\3-2r=11\\6+r=-1+s\end{matrix}\right|$$

Es ergibt sich $r=-4$ und $s=3$. Damit haben die beiden Geraden genau einen Schnittpunkt.

Der Schnittpunkt kann berechnet werden, indem man r bzw. s in die zugehörige Parameterdarstellung der Geraden einsetzt.

d) Schritt 1:

$$a\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-15\\-6\end{pmatrix}\rightarrow\left|\begin{matrix}-3\mathrm{a}=1\\5a=-15\\0a=-6\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung und die Richtungsvektoren sind somit linear unabhängig. Damit sind die beiden Geraden entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix}8\\3\\7\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-7\\1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-15\\-6\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left|\begin{matrix}8-3r=6+s\\3+5r=-7-15s\\7+0r=1-6s\end{matrix}\right|$$

Es ergibt sich $r=-0{,}8$ und $s=-0{,}4$. Damit haben die beiden Geraden genau einen Schnittpunkt.

Der Schnittpunkt kann berechnet werden, indem man r bzw. s in die zugehörige Parameterdarstellung der Geraden einsetzt.

e) Schritt 1:

$$a\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4{,}5\\-9\\-13{,}5\end{pmatrix}\rightarrow\left|\begin{matrix}-3a=4{,}5\\6a=-9\\9a=-13{,}5\end{matrix}\right|$$

Es ergibt sich $a=-1{,}5$. Damit sind die beiden Richtungsvektoren linear abhängig und die Geraden sind entweder identisch oder parallel.

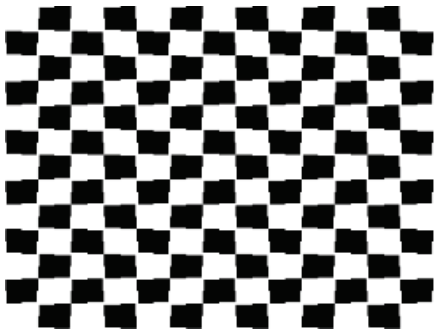
Schritt 2:

$$\begin{pmatrix}2\\-4\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-3\\6\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\8\\19\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4{,}5\\-9\\-13{,}5\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left|\begin{matrix}2-3r=-4+4{,}5s\\-4+6r=8-9s\\1+9r=19-13{,}5s\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat die Lösung $r=-1{,}5s+2$ und $s=s$. Das bedeutet, dass die beiden Geraden identisch sind.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen



Alle Linien sind genau senkrecht oder waagerecht!

(3) Aufgabe: Drohnen bei einem Sportevent [48]

a) Schritt 1:

$$a\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}\rightarrow\left|\begin{matrix}-3\mathrm{a}=28\\2a=-25{,}75\\0{,}1a=-0{,}1\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung und die Richtungsvektoren sind somit

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

linear unabhängig. Damit sind die beiden Geraden entweder windschief oder haben einen Schnittpunkt.

Schritt 2:

$$\begin{pmatrix}510\\40\\20\end{pmatrix}+t_1\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}20\\480\\23\end{pmatrix}+t_2\cdot\begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}$$

$$\rightarrow\left|\begin{matrix}510-3t_1=20+28t_2\\40+2t_1=480-25{,}75t_2\\20+0{,}1t_1=23-0{,}1t_2\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem die Lösung $t_1=14$ und $t_2=16$. Das bedeutet, dass die beiden Flugrouten sich in einem Punkt schneiden.

b) Die Existenz eines Schnittpunktes der Flugrouten bedeutet nicht, dass die Drohnen kollidieren, da sie zu unterschiedlichen Zeitpunkten an diesem Schnittpunkt sein können.

c) In dem Ansatz werden die beiden Parameterdarstellungen der Flugrouten voneinander subtrahiert. Der Ansatz ist derselbe, wie wenn man den Abstand von zwei Geraden bestimmt. Allerdings wurde hier in beiden Parameterdarstellungen der gleiche Parameter t verwendet. Auf diese Weise wird der Abstand zwischen den Drohnen zu dem jeweiligen Zeitpunkt t berechnet und nicht zwischen unterschiedlichen Zeitpunkten.

Wichtig: t_1 und t_2 müssen den gleichen zeitlichen Abstand beschreiben.

d) Hier wird das Minimum mithilfe der notwendigen Bedingung berechnet. Dazu wird die Ableitung der Abstandsfunktion mit 0 gleichgesetzt.

e) $a(15{,}8284)$

$=\sqrt{1731{,}1025\cdot 15{,}8284^2-54801{,}2\cdot 15{,}8284+433709}$

$=1{,}0348$

oder:

Berechnen, an welchen Punkten sich die Drohnen nach jeweils 15,8284 Sekunden befinden:

$$d_1\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}510\\40\\20\end{pmatrix}+15{,}8284\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}462{,}5148\\71{,}6568\\21{,}58284\end{pmatrix}$$

$$d_2\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}20\\480\\23\end{pmatrix}+15{,}8284\cdot\begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}463{,}1952\\72{,}4187\\21{,}41716\end{pmatrix}$$

Der Abstand der beiden Punkte beträgt:

$$\left|\begin{pmatrix}463{,}1952\\72{,}4187\\21{,}41716\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}462{,}5148\\71{,}6568\\21{,}58284\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-0{,}6804\\-0{,}7619\\0{,}16568\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{(-0{,}6804)^2+(-0{,}7619)^2+0{,}16568^2}$$

$$=1{,}0348$$

Damit beträgt der Mindestabstand der beiden Drohnen 1,0348 m und liegt somit unterhalb von 2 m.

(4) Übung: Drohnen bei einem Sportevent II [51]

a) Zunächst wird die Funktion zur Berechnung des Abstands der beiden Drohnen aufgestellt:

$$\begin{pmatrix}200\\220\\20\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\0{,}1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}305\\240\\18\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}17t-105\\2t-20\\0{,}1t+2\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}17t-105\\2t-20\\0{,}1t+2\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{293{,}01t^2-3649{,}6t+11429}=a(t)$$

$$a'(t)=\frac{586{,}02t-3649{,}6}{2\cdot\sqrt{293{,}01t^2-3649{,}6t+11429}}$$

Notwendige Bedingung: $a'(t)=0$

Es ergibt sich $t=6{,}22777$.

$a(6{,}22777)=8{,}035$

Das bedeutet, dass die Drohnen nach ca. 6 Sekunden den geringsten Abstand von ca. 8 Meter haben.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

b) Zunächst wird die Funktion zur Berechnung des Abstands der beiden Drohnen aufgestellt:

$$\begin{pmatrix}190\\310\\23\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}28\\-25{,}75\\-0{,}1\end{pmatrix}-\left(\begin{pmatrix}305\\240\\18\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-20\\0\\0\end{pmatrix}\right)$$

$$=\begin{pmatrix}48t-115\\-25{,}75t+70\\-0{,}1t+5\end{pmatrix}$$

$$\left|\begin{pmatrix}48t-115\\-25{,}75t+70\\-0{,}1t+5\end{pmatrix}\right|$$

$$=\sqrt{2967{,}0725t^2+14646t+18150}$$

$$=a(t)$$

$$a'(t)=\frac{5934{,}145t-14646}{2\cdot\sqrt{2967{,}0725t^2+14646t+18150}}$$

Notwendige Bedingung: $a'(t)=0$

Es ergibt sich $t=2{,}46809$.

$a(2{,}46809)=8{,}728$

Das bedeutet, dass Drohne 2 und Drohne 3 den geringsten Abstand von ca. 8,7 Meter nach ca. 2,5 Sekunden haben.

Lösung 6: Ebenen im drei-dimensionalen Raum / Parameter / Koordinaten / Lagebeziehungen

(1) Aufgabe: Dachplanung (Hausplanung 1) [52]

a) Eine mögliche Parameterdarstellung lautet:

$$E\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}0\\8\\5{,}7\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}10\\-4\\2{,}8\end{pmatrix}$$

b) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}0\\8\\5{,}7\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}10\\8\\5{,}7\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}10\\4\\8{,}5\end{pmatrix}$$

Einige mögliche Richtungsvektoren (auch die Gegenvektoren sind mögliche Richtungs-vektoren):

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}10\\-4\\2{,}8\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-4\\2{,}8\end{pmatrix}$$

(2) Übung: Parameterdarstellungen von Ebenen [53]

a) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}-3\\6\\14\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0\\8\\15\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\-4\\-11\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-12\end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}-3\\6\\14\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\-4\\-11\end{pmatrix}$$

b) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}4\\9\\-2\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}1{,}5\\11\\5\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2{,}3\\-6\\8\end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2{,}5\\2\\7\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1{,}7\\-15\\10\end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0{,}8\\-17\\3\end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}2{,}3\\-6\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-1{,}7\\-15\\10\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0{,}8\\-17\\3\end{pmatrix}$$

c) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA}=\begin{pmatrix}1\\10\\-7\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OB}=\begin{pmatrix}0{,}5\\3{,}2\\14\end{pmatrix};\ \overrightarrow{OC}=\begin{pmatrix}2\\3\\9\end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-0{,}5\\-6{,}8\\21\end{pmatrix};\ \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}1\\-7\\16\end{pmatrix};\ \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1{,}5\\-0{,}2\\-5\end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 3{,}2 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 6{,}8 \\ -21 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -0{,}2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

d) Die beiden Spannvektoren der aufgestellten Ebene sind linear abhängig (Vielfache voneinander) und zeigen somit in die gleiche Richtung. Auf diese Weise spannen sie keine Ebene auf. Das liegt daran, dass die drei Punkte, die zum Aufstellen der Ebene gewählt wurden, auf einer Geraden liegen, also kollinear sind und somit nicht geeignet sind, um eine Ebene aufzuspannen.

(3) Aufgabe: Dachplanung (Hausplanung 2) [53]

a) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix}$$

b) Die beiden Geraden haben den gleichen Stützvektor, dieser kann als Stützvektor übernommen werden, genauso wie die beiden Richtungsvektoren.

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix}$$

c) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5{,}7 \end{pmatrix}$$

Die Richtungsvektoren können nicht beide übernommen werden, da sie identisch sind (die beiden Geraden sind parallel). Ein weiterer Spannvektor muss berechnet werden.

Einige mögliche Spannvektoren (sowie Vielfache und ihre Gegenvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

d) Die Parameterdarstellung besteht aus einem der beiden Stützvektoren, was sinnvoll ist. Es wurden die beiden Richtungsvektoren übernommen und als Spannvektoren der Ebene verwendet. Diese sind jedoch identisch, was dazu führt, dass sich keine Ebene ergibt.

(4) Übung: Parameterdarstellungen von Ebenen [55]

a) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 17 \end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}; \vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

b) Mögliche Stützvektoren:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 11 \\ 5 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OC} = \begin{pmatrix} 2{,}3 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Einige mögliche Spannvektoren (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0{,}8 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1{,}7 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

c) Mögliche Stützvektoren sind die Stützvektoren der beiden Geraden:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -9{,}5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Mögliche Spannvektoren sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Spannvektoren):

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0{,}5 \\ 3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1{,}5 \end{pmatrix}$$

d) Mögliche Stützvektoren sind die Stützvektoren der beiden Geraden:

$$\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Mögliche Spannvektoren sind die Richtungsvektoren der beiden Geraden (auch Vielfache und die Gegenvektoren sind mögliche Richtungsvektoren):

$$\overrightarrow{r_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \underline{\text{oder}} \ \overrightarrow{r_2} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Die beiden Richtungsvektoren der Geraden sind linear abhängig, also lassen sich nicht beide verwenden.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -10 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Eine mögliche Parameterdarstellung:

$$E: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -7 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

d) Die beiden Richtungsvektoren der Geraden sind linear abhängig ($\overrightarrow{r_2} = -2 \cdot \overrightarrow{r_1}$) und können deswegen nicht beide als Spannvektoren der Ebene verwendet werden. Sie sind parallel zueinander und spannen somit keine Ebene auf.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen



(5) Aufgabe: Planung einer Solaranlage [56]

a) Um zu prüfen, ob der Punkt in der Ebene liegt, muss $\overrightarrow{OP_1}$ mit der Ebene gleichgesetzt werden.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 7{,}3 \end{pmatrix}$$

Daraus entsteht das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 10s = 8 \\ 4t = 2 \\ 5{,}7 + 2{,}8t = 7{,}3 \end{matrix} \right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Aus diesem Grund liegt der Punkt nicht auf der Dachfläche.

b) Zu lösen ist die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5{,}7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ z \end{pmatrix}$$

Daraus entsteht das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 10s = 5 \\ 4t = 2 \\ 5{,}7 + 2{,}8t = z \end{matrix} \right|$$

Mit $s = 0{,}5$ und $t = 0{,}5$ ergibt sich $z = 7{,}1$. Das heißt, der Befestigungspunkt befindet sich in $7{,}1\text{m}$ Höhe.

c) Rein mathematisch hat der Architekt Recht, dass der Punkt in der durch das Dach aufgespannten Ebene liegt. Allerdings ist die Ebene unendlich, die Dachfläche endet jedoch bei $x = 10$. Der vorgeschlagene Punkt liegt damit außerhalb des Daches.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

(6) Übung: Punktprobe [57]

a) $\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-12\\-8\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\\8\end{pmatrix}$

Daraus entsteht das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}-2-12s=10\\5-8s-4t=-3\\8=8\end{matrix}\right|$$

Als Lösung ergibt sich $s=-1$ und $t=4$, das heißt, der Punkt liegt in der Ebene.

b) $\begin{pmatrix}4\\11\\-6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-7\\7\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\\8\end{pmatrix}$

Daraus entsteht das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}4+3s+t=10\\11-7s-2t=-3\\-6+7s+2t=8\end{matrix}\right|$$

Als Lösung ergibt sich $s=2$ und $t=0$, das heißt, der Punkt liegt in der Ebene.

c) $\begin{pmatrix}11\\-2\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\-3\\8\end{pmatrix}$

Daraus entsteht das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}11+2s+4t=10\\-2+4s=-3\\9-6s-5t=8\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, das heißt, dass der Punkt nicht in der Ebene liegt.

(7) Aufgabe: Lasermessgerät [57]

a) $g\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}0\\3\\1{,}5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

b) Um den Punkt zu berechnen, muss die Ebene mit der Geraden gleichgesetzt werden:

$$\begin{pmatrix}0\\3\\1{,}5\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}r=10+t\\3+r=-t\\1{,}5=3+s\end{matrix}\right|$$

Als Lösung ergibt sich $r=3{,}5$, $s=-1{,}5$ und $t=-6{,}5$.

Einsetzen von r in g ergibt den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}0\\3\\1{,}5\end{pmatrix}+3{,}5\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\6{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Zur Probe: Einsetzen von s und t in E ergibt:

$$\begin{pmatrix}10\\0\\3\end{pmatrix}-1{,}5\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}-6{,}5\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3{,}5\\6{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}$$

Somit schneiden sich der Laserstrahl und die Wand im Punkt $\mathrm{P}(3{,}5|6{,}5|1{,}5)$.

c) $\left|\overrightarrow{\mathrm{LP}}\right|=\left|\begin{pmatrix}3{,}5\\6{,}5\\1{,}5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\3\\1{,}5\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}3{,}5\\3{,}5\\0\end{pmatrix}\right|$

$=\sqrt{3{,}5^2+3{,}5^2}=4{,}9497$

Somit sind die beiden Punkte ca. $4{,}95\mathrm{m}$ voneinander entfernt.

d) Zwei mögliche Ansätze:

<u>Ansatz 1:</u>

Zu berechnen ist der in der Zeit zurückgelegte Weg:

$3{,}3\cdot10^{-8}\mathrm{s}\cdot299792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}=$
$9{,}893151114\mathrm{m}$

Da dieses der Weg zur Wand und zurück ist, muss dieser noch halbiert werden:

$9{,}893151114\mathrm{m}:2=4{,}946575557\mathrm{m}$

$\approx4{,}9466\mathrm{m}$

Im Anschluss wird die Differenz berechnet:

$4{,}9497\mathrm{m}-4{,}9466\mathrm{m}=0{,}0031$

Das Lasermessgerät misst also relativ genau, die Abweichung beträgt lediglich $0{,}0031\mathrm{m}$.

<u>Ansatz 2:</u>

Zu berechnen ist die Zeit, die das Licht braucht, um die Strecke zur Wand und zurück zurückzulegen. Zunächst wird berechnet, wie lange das Licht bis zur Wand braucht:

$\frac{4{,}949747468\ \mathrm{m}}{299792458\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}}=1{,}6511\cdot10^{-8}\mathrm{s}$

Um den Rückweg auch zu berücksichtigen, wird diese Zeit verdoppelt:

$1{,}6511\cdot10^{-8}\mathrm{s}\cdot2=3{,}3022\cdot10^{-8}\mathrm{s}$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das Lasermessgerät misst also relativ genau.

(8) Übung: Lagebeziehungen bei Geraden und Ebenen [59]

a) $\begin{pmatrix}4\\11\\-6\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-7\\7\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}11\\-2\\9\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-9\\21\\-21\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\-5\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}4+3r=11-9s+4t\\11-7r=-2+21s\\-6+7r=9-21s-5t\end{vmatrix}$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, somit verläuft die Gerade parallel zur Ebene.

b) $\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}-10\\10\\6\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}-2+3r=-10+2s+5t\\5-3r=10+4s\\8-5r=6-6s-5t\end{vmatrix}$$

Als Lösung ergibt sich:

$r=1$, $s=-2$ und $t=3$

Einsetzen von r in h ergibt den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Zur Probe: Einsetzen von s und t in E_2 ergibt:

$$\begin{pmatrix}-10\\10\\6\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

Somit schneiden sich die Gerade h und die Ebene E_2 im Punkt $S(1|2|3)$.

c) $\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}7{,}5\\-7{,}5\\-12{,}5\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}-2+3r=1+2s+7{,}5t\\5-3r=2+4s-7{,}5t\\8-5r=3-6s-12{,}5t\end{vmatrix}$$

Als Lösung ergibt sich:

$r=0{,}5\cdot(5t+2)=2{,}5t+1$, $s=0$ und $t=t$

Somit gibt es unendlich viele Lösungen und damit liegt die Gerade in der Ebene.

d) $\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-10\\-16\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}15\\-10\\-5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\begin{vmatrix}-2+4r=15+2s+5t\\5-10r=-10+4s\\8-16r=-5-6s-5t\end{vmatrix}$$

Als Lösung ergibt sich:

$r=0{,}5$, $s=2{,}5$ und $t=-4$

Einsetzen von r in i ergibt den Schnittpunkt:

$$\begin{pmatrix}-2\\5\\8\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}4\\-10\\-16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Zur Probe: Einsetzen von s und t in E_4 ergibt:

$$\begin{pmatrix}15\\-10\\-5\end{pmatrix}+2{,}5\cdot\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}-4\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

Somit schneiden sich die Gerade i und die Ebene E_4 im Punkt $S(0|0|0)$.

(9) Aufgabe: Schattenwurf einer Windkraftanlage [59]

a) Der Schatten des höchsten Punktes lässt sich als Gerade darstellen, die den Ortsvektor des höchsten Punktes $\overrightarrow{OP_1}$ als Stützvektor besitzt und den Richtungsvektor $\vec{r}$.

$$g\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}20\\-80\\200\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}$$

b) Um zu untersuchen, wann dieser Schatten auf den Boden trifft, wird die folgende Gleichung aufgestellt:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$\begin{pmatrix}20\\-80\\200\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

Mit $r=25$ ergibt sich:

$y=-80$ und $x=-105$

Somit lautet der Schattenpunkt $\mathrm{P_1}'(-105|-80|0)$.

c) $\left|\overrightarrow{\mathrm{F_1P_1}'}\right|=\left|\begin{pmatrix}-105\\-80\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}20\\-80\\0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-125\\0\\0\end{pmatrix}\right|$

$=\sqrt{(-125)^2+(0)^2+(0)^2}=125$

Das bedeutet, dass der Fußpunkt der Windanlage und der Schattenpunkt des höchsten Punktes $125\mathrm{m}$ voneinander entfernt sind.

d) Der Schatten des höchsten Punktes lässt sich als Gerade darstellen, die den Ortsvektor des höchsten Punktes $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ als Stützvektor besitzt und den Richtungsvektor $\vec{r}$.

$$g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}-40\\8\\205\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}$$

e) Um zu untersuchen, wann dieser Schatten auf den Boden trifft, wird die folgende Gleichung aufgestellt:

$$\begin{pmatrix}-40\\8\\205\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}=$$
$$\begin{pmatrix}-40\\8\\5\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-90\\0\\3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}-40-5r=-40-90s\\8=8+2t\\205-8r=5+3s\end{matrix}\right|$$

Mit $r=24{,}4898$ ergibt sich:

$t=0$ und $s=1{,}3605$

Einsetzen von r in g ergibt den Schattenpunkt:

$$\begin{pmatrix}-40\\8\\205\end{pmatrix}+24{,}4898\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-162{,}449\\8\\9{,}0816\end{pmatrix}$$

Zur Probe: Einsetzen von s und t in E ergibt:

$$\begin{pmatrix}-40\\8\\5\end{pmatrix}+1{,}3605\cdot\begin{pmatrix}-90\\0\\3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}-162{,}449\\8\\9{,}0816\end{pmatrix}$$

Somit befindet sich der Schattenpunkt im Punkt $\mathrm{P_2}'(-162{,}449|8|9{,}0816)$.

f) $\left|\overrightarrow{\mathrm{F_2P_2}'}\right|=\left|\begin{pmatrix}-162{,}449\\8\\9{,}0816\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-40\\8\\5\end{pmatrix}\right|$

$=\left|\begin{pmatrix}-122{,}449\\0\\4{,}0816\end{pmatrix}\right|$

$=\sqrt{(-122{,}449)^2+0^2+(4{,}0816)^2}$

$=122{,}51700$

Das bedeutet, dass der Fußpunkt der Windanlage und der Schattenpunkt des höchsten Punktes $122{,}52\mathrm{m}$ voneinander entfernt sind. Damit ist dieser Schatten kürzer als derjenige der ersten Windkraftanlage. Dieses liegt daran, dass er auf den geneigten Hang fällt.

g) In der Realität kann die Erdoberfläche nicht immer durch eine Ebene beschrieben werden, weil weitere Faktoren Einfluss nehmen, zum Beispiel:

- Unebene Oberfläche (Berge und Täler, Gebäude und andere Objekte)
- Erdkrümmung

Für kleinere, ebene Flächen lässt sich eine Ebene als mathematisches Modell trotzdem sinnvoll als gute Näherung nutzen.

(10) Übung: Optische Täuschung [62]

a) Die Höhe ist sinnvoll gewählt, da die Plaza auf einer Höhe von $37\mathrm{m}$ liegt und eine Augenhöhe von $1{,}5\mathrm{m}$ angenommen wird.

b) Gerade zur Projektion von $\mathrm{L_2}$:

Als Stützvektor wird $\overrightarrow{\mathrm{OL_2}}$ gewählt.

Der Richtungsvektor lautet:

$$\overrightarrow{\mathrm{BL_2}}=\begin{pmatrix}0\\10\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0\\38{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\10\\-34{,}5\end{pmatrix}$$

Somit lautet die Gerade:

$$g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}0\\10\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\-34{,}5\end{pmatrix}$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Nun ist der Schnittpunkt mit dem Boden zu berechnen, also

$$\begin{pmatrix}0\\10\\4\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\10\\-34{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}$$

Es ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}0=x\\10+10r=y\\4-34{,}5r=0\end{matrix}\right|$$

Mit $r=0{,}1159$ ergibt sich:

$x=0$ und $y=11{,}1594$

Das bedeutet, der Bildpunkt zu L_2 lautet $\mathrm{L}_2'(0|11{,}1594|0)$.

Die anderen Punkte werden nach dem gleichen Verfahren projiziert, dabei ergibt sich:

$\mathrm{L}_3'(1{,}1159|11{,}1594|0)$

$\mathrm{L}_4'(1{,}0267|10{,}2667|0)$

$\mathrm{L}_5'(3{,}08|10{,}2667|0)$

c) Die beiden Punkte liegen bereits auf dem Boden und müssen deswegen nicht projiziert werden.

(11) Aufgabe: Dachplanung 2 [62]

a) Der Dachfirst lässt sich sinnvoll durch eine Gerade beschreiben.

b) In dem Ansatz werden die beiden Geraden gleichgesetzt. Auf diese Weise wird die Schnittmenge berechnet, was in diesem Fall genau die Gerade sein müsste, die den Dachfirst beschreibt.

(12) Übung: Lagebeziehung zweier Ebenen [64]

a) $\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}1\\10\\7\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}2+3s+4t=12+10u+v\\10-s+5t=13+3u+10v\\-4+2t=-2+2u+7v\end{matrix}\right|$$

Als Lösung ergibt sich:

$t=\frac{s}{2}=0{,}5s$, $u=\frac{s-2}{2}=0{,}5s-1$, $v=0$ und $s=s$

Diese Lösungsmenge ist von einem Parameter abhängig, also schneiden sich die beiden Ebenen in einer Geraden. Die Parameterdarstellung dieser Gerade lässt sich wie folgt berechnen:

Einsetzen der Lösung in D_1:

$$g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{s}{2}\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}2\\2{,}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix}$$

Alternativ einsetzen der Lösung in D_2:

$$g\colon\overrightarrow{\mathrm{OX}}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}+\frac{s-2}{2}\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}1\\10\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}+\left(\frac{s}{2}-\frac{2}{2}\right)\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}+\left(\frac{s}{2}-1\right)\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}+\frac{s}{2}\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\13\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}5\\1{,}5\\1\end{pmatrix}$$

b) $\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11\\26\\2\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}2+3s+4t=11+10u+7v\\10-s+5t=26+3u+4v\\-4+2t=2+2u+2v\end{matrix}\right|$$

Als Lösung ergibt sich:

$t=0{,}5\cdot(s+v+7)=0{,}5s+0{,}5y+3{,}5,$

$u=0{,}5\cdot(s-v+1)=0{,}5s-0{,}5v+0{,}5,$

$v=v$ und $s=s$.

Diese Lösungsmenge ist von zwei Parametern abhängig, also sind die beiden Ebenen identisch. Als Lösungsmenge

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

kann eine der beiden Parameterdarstellungen der Ebenen angegeben werden.

c) $\begin{pmatrix}2\\10\\-4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}6\\15\\-3\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}-9\\3\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-1\\13\\4\end{pmatrix}$

Daraus ergibt sich das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}2+3s+4t=6-9u-v\\10-s+5t=15+3u+13v\\-4+2t=-3+4v\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung. Das bedeutet, dass die beiden Ebenen parallel zueinander verlaufen.

Lösung 7: Ebenen im dreidimensionalen Raum in Koordinatenform und Lagebeziehungen

(1) Aufgabe: Solaranlage [65]

a) Wenn der Vektor $\vec{b}$ orthogonal zur Dachfläche ist, muss er jeweils mit den beiden Spannvektoren der Ebene im Skalarprodukt 0 ergeben:

$\begin{pmatrix}0\\-7\\9\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}=0$

$\begin{pmatrix}0\\-7\\9\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\4\\2{,}8\end{pmatrix}=-2{,}8$

Der Vektor $\vec{b}$ ist nur zu einem der Spannvektoren orthogonal und damit nicht zu der gesamten Ebene.

b) Der Architekt hat das Skalarprodukt nur mit einem der Spannvektoren gebildet. Zu diesem ist der Vektor tatsächlich orthogonal, aber er hätte noch den zweiten Spannvektor untersuchen müssen.

c) Der Vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-7\\z\end{pmatrix}$ ist unabhängig von dem Wert von z orthogonal zu dem ersten Spannvektor:

$\begin{pmatrix}0\\-7\\z\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}=0$

Nun muss z so berechnet werden, dass die folgende Gleichung erfüllt ist:

$\begin{pmatrix}0\\-7\\z\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}0\\4\\2{,}8\end{pmatrix}=0$

Also $-7\cdot 4+z\cdot 2{,}8=0$

Es ergibt sich $z=10$.

Das bedeutet, dass der Vektor $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\-7\\10\end{pmatrix}$ orthogonal zur Ebene D ist.

(2) Übung: Normalenvektor und Kreuzprodukt [66]

a) $\begin{pmatrix}10\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\4\\2{,}8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot 2{,}8-0\cdot 4\\0\cdot 0-10\cdot 2{,}8\\10\cdot 4-0\cdot 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-28\\40\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\5\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\cdot 2-0\cdot 5\\0\cdot 4-3\cdot 2\\3\cdot 5-(-1)\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\19\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}10\\3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot 2-2\cdot 4\\2\cdot 7-10\cdot 2\\10\cdot 4-3\cdot 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-6\\19\end{pmatrix}$

d) Diese Aussage ist falsch. Es kann sich auch um parallele Ebenen handeln. Der Nachweis könnte über eine Punktprobe erfolgen, indem der Stützvektor der einen Ebene mit der Parameterdarstellung der anderen Ebene gleichgesetzt wird

(3) Aufgabe: Spiegeln an einer beliebigen Ebene [67]

a) Berechnung des Normalenvektors:

$\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$
$=\begin{pmatrix}0\cdot 2-4\cdot(-1)\\4\cdot(-2)-(-3)\cdot 2\\(-3)\cdot(-1)-0\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$

Aufstellen einer Geraden durch den Punkt P mit dem Normalenvektor als Richtungsvektor.

$g\colon\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunktes der Gerade g und der Ebene E_1:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}=$

$\begin{pmatrix}5\\-4\\17\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$

Als Lösung ergibt sich:

$r=2$, $s=-1$ und $t=-2$

Der Schnittpunkt berechnet sich entweder über die Gerade oder die Ebene:

$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-2\\9\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}5\\-4\\17\end{pmatrix}+(-1)\cdot\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}+(-2)\cdot\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\-2\\9\end{pmatrix}$

Damit lautet der Schnittpunkt $S(12|-2|9)$.

Damit P nun an der Ebene gespiegelt wird, muss der Vektor von S zu P berechnet werden und dann sein Gegenvektor verwendet werden, um von S aus genau in die andere Richtung zu zeigen.

$\overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12\\-2\\9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\4\\-6\end{pmatrix}$

Der Gegenvektor, bzw. der Vektor von P zu S lautet dann:

$-\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}8\\-4\\6\end{pmatrix}$

Um nun zu dem Bildpunkt zu gelangen, muss dieser Vektor zu dem Ortsvektor von S addiert werden.

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OS}+(-\overrightarrow{SP})=$

$\begin{pmatrix}12\\-2\\9\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}8\\-4\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\-6\\15\end{pmatrix}$

Der Bildpunkt lautet dann $P'(20|-6|15)$.

b) Berechnung des Normalenvektors:

$\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}(-5)\cdot(-1)-1\cdot(-1)\\1\cdot(-4)-1\cdot(-1)\\1\cdot(-1)-(-5)\cdot(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\-3\\-21\end{pmatrix}$

Aufstellen einer Geraden durch den Punkt P mit dem Normalenvektor als Richtungsvektor.

$g:\overrightarrow{OX}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-21\end{pmatrix}$

Berechnung des Schnittpunktes der Gerade g und der Ebene E_2:

$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}$

Als Lösung ergibt sich:

$r=-0,\overline{1}$, $s=0,\overline{3}$ und $t=-1$

Der Schnittpunkt berechnet sich entweder über die Gerade oder die Ebene:

$\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}-0,\overline{1}\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-21\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,\overline{3}\\2,\overline{3}\\5,\overline{3}\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}-1\\3\\4\end{pmatrix}+0,\overline{3}\cdot\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-4\\-1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3,\overline{3}\\2,\overline{3}\\5,\overline{3}\end{pmatrix}$

Damit lautet der Schnittpunkt $S(3,\overline{3}|2,\overline{3}|5,\overline{3})$.

Damit P nun an der Ebene gespiegelt wird, muss der Vektor von S zu P berechnet werden und dann sein Gegenvektor verwendet werden, um von S aus genau in die andere Richtung zu zeigen.

$\overrightarrow{SP}=\begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3,\overline{3}\\2,\overline{3}\\5,\overline{3}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,\overline{6}\\-0,\overline{3}\\-2,\overline{3}\end{pmatrix}$

Der Gegenvektor, bzw. der Vektor von P zu S lautet dann:

$-\overrightarrow{SP}=\overrightarrow{PS}=\begin{pmatrix}-0,\overline{6}\\0,\overline{3}\\2,\overline{3}\end{pmatrix}$

Um nun zu dem Bildpunkt zu gelangen, muss dieser Vektor zu dem Ortsvektor von S addiert werden.

$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OS}+(-\overrightarrow{SP})=\begin{pmatrix}3,\overline{3}\\2,\overline{3}\\5,\overline{3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0,\overline{6}\\0,\overline{3}\\2,\overline{3}\end{pmatrix}$

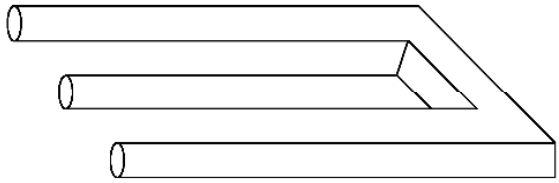
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$= \begin{pmatrix} 2,\overline{6} \\ 2,\overline{6} \\ 7,\overline{6} \end{pmatrix}$$

Der Bildpunkt lautet dann $P'(2,\overline{6}|2,\overline{6}|7,\overline{6})$.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen



(4) Übung: Normalen- und Koordinatenform einer Ebene [69]

a) Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 2{,}8 - 0 \cdot 4 \\ 0 \cdot 0 - 10 \cdot 2{,}8 \\ 10 \cdot 4 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Die Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 40 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die alternative Darstellung der Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 40 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -28 \\ 40 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform lässt sich dann berechnen:

$E: 0 \cdot x + (-28) \cdot y + 40 \cdot z = 200$ mit
$d = 0 \cdot 0 + (-28) \cdot 0 + 40 \cdot 5 = 200$

Die Koordinatenform der Ebene lautet:

$E: -28y + 40z = 200$

b) Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 2 - 0 \cdot 5 \\ 0 \cdot 4 - 3 \cdot 2 \\ 3 \cdot 5 - (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Die Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die alternative Darstellung der Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform lässt sich dann berechnen:

$E: (-2) \cdot x + (-6) \cdot y + 19 \cdot z = -140$ mit
$d = (-2) \cdot 2 + (-6) \cdot 10 + 19 \cdot (-4) = -140$

Die Koordinatenform der Ebene lautet:

$E: -2x - 6y + 19z = -140$

c) Normalenvektor:

$$\begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \\ 2 \cdot 7 - 10 \cdot 2 \\ 10 \cdot 4 - 3 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix}$$

Die Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

Die alternative Darstellung der Normalenform lautet:

$$E: \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ 19 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 11 \\ 26 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Koordinatenform lässt sich dann berechnen:

$E: (-2) \cdot x + (-6) \cdot y + 19 \cdot z = -140$ mit
$d = (-2) \cdot 11 + (-6) \cdot 26 + 19 \cdot 2 = -140$

Die Koordinatenform der Ebene lautet:

$E: -2x - 6y + 19z = -140$

(5) Übung: Durchführen der Punktprobe in der Koordinatenform [70]

a) $-2 \cdot 4 + (-8) + 4 \cdot 10 = 24$

Damit liegt der Punkt P in der Ebene E_1.

b) b) $7 \cdot 4 + 3 \cdot (-8) = 4 \neq 24$

Damit liegt der Punkt P nicht in der Ebene E_2.

c) c) $3 \cdot 4 - 3 \cdot (-8) + 3 \cdot 10 = 66$

Damit liegt der Punkt P in der Ebene E_3.

d) Beispielsweise liegen die folgenden Punkte in der Ebene E_1:

$A(-12|0|0)$ da $-2 \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot 0 = 24$

$B(0|24|0)$ da $-2 \cdot 0 + 24 + 4 \cdot 0 = 24$

$C(0|0|6)$ da $-2 \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 6 = 24$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$D(2|28|0)$ da $-2 \cdot 2 + 28 + 4 \cdot 0 = 24$

$E(-1|10|3)$ da $-2 \cdot (-1) + 10 + 4 \cdot 3 = 24$

Es gibt unendlich viele weitere Punkte in der Ebene, die alle die Gleichung erfüllen.

Aus den Punkten A, B und C ergibt sich die folgende Parameterdarstellung der Ebene:

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC}$$
$$= \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

(6) Übung: Umwandeln der Koordinaten- in die Parameterform [71]

a) Anwendung der zwei Wege:

Aufstellen durch drei Punkte:

Genutzt werden beispielweise die folgenden drei Punkte

$A(-12|0|0)$ da $-2 \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot 0 = 24$

$B(0|24|0)$ da $-2 \cdot 0 + 24 + 4 \cdot 0 = 24$

$C(0|0|6)$ da $-2 \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot 6 = 24$

Es ergibt sich eine mögliche Parameterform der Ebene:

$$E_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 24 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Aufstellen durch Umformungen:

$E_1: -2x + y + 4z = 24$

$-2x + y + 4z = 24$

Lässt sich umformen zu: $x = -12 + \frac{1}{2}y + 2z$

Damit ergibt sich die Parameterform der Ebene:

$$E_1: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Anwendung der zwei Wege:

Aufstellen durch drei Punkte:

Genutzt werden beispielweise die folgenden drei Punkte

$A(0|0|1)$ da $7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$B(0|0|2)$ da $7 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$

$C(3|-7|0)$ da $7 \cdot 3 + 3 \cdot (-7) + 0 \cdot 0 = 0$

Es ergibt sich eine mögliche Parameterform der Ebene:

$$E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aufstellen durch Umformungen:

$E_2: 7x + 3y = 0$

$7x + 3y = 0$

Lässt sich umformen zu: $x = 0 - \frac{3}{7}y$

Damit ergibt sich die Parameterform der Ebene:

$$E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

c) Anwendung der zwei Wege:

Aufstellen durch drei Punkte:

Genutzt werden beispielweise die folgenden drei Punkte

$A(22|0|0)$ da $3 \cdot 22 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 66$

$B(0|-22|0)$ da $3 \cdot 0 - 3 \cdot (-22) + 3 \cdot 0 = 66$

$C(0|0|22)$ da $3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 3 \cdot 22 = 66$

Es ergibt sich eine mögliche Parameterform der Ebene:

$$E_3: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ -22 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -22 \\ 0 \\ 22 \end{pmatrix}$$

Aufstellen durch Umformungen:

$E_3: 3x - 3y + 3z = 66$

$3x - 3y + 3z = 66$

Lässt sich umformen zu: $x = 22 + y - z$

Damit ergibt sich die Parameterform der Ebene:

$$E_2: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 22 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(7) Übung: Berechnen der Spurpunkte einer Ebene [72]

a) Die folgenden Punkte sind Spurpunkte:

$A(-12|0|0)$ da $(-2) \cdot (-12) + 0 + 4 \cdot 0 = 24$

$B(0|24|0)$ da $(-2) \cdot 0 + 24 + 4 \cdot 0 = 24$

$C(0|0|6)$ da $(-2) \cdot 0 + 0 + 4 \cdot 6 = 24$

b) Die folgenden Punkte sind Spurpunkte:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$A(6|0|0)$ da $11 \cdot 6 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 0 = 66$

$B(0|11|0)$ da $11 \cdot 0 + 6 \cdot 11 + 3 \cdot 0 = 66$

$C(0|0|22)$ da $11 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 3 \cdot 22 = 66$

(8) Aufgabe: Anzahl der Spurpunkte einer Ebene [72]

a) Eine Ebene hat genau einen Spurpunkt, wenn sie parallel zu einer der Koordinatenebenen liegt. Liegt sie beispielsweise parallel zur xy -Ebene, dann hat sie nur einen Spurpunkt, nämlich den Schnittpunkt mit der z -Achse. Alternativ hat auch eine Ebene, die durch den Koordinatenursprung verläuft und nicht parallel zu einer Koordinatenachse oder -ebene liegt, nur genau einen Spurpunkt.

b) Eine Ebene hat genau zwei Spurpunkte, wenn sie zu einer der Koordinatenachsen, aber zu keiner der Koordinatenebenen parallel ist. Liegt sie beispielsweise parallel zur x-Achse, dann hat sie genau zwei Spurpunkte, nämlich den Schnittpunkt mit der y-Achse und den mit der z-Achse.

c) Eine Ebene hat genau drei Spurpunkte, wenn sie nicht durch den Koordinatenursprung verläuft und zu keiner der Koordinatenachsen parallel ist, dann schneidet sie alle drei Koordinatenachsen.

d) Eine Ebene hat unendlich viele Spurpunkte, wenn mindestens eine der Koordinatenachsen in der Ebene liegt. Dann sind alle Punkte dieser Koordinatenachse auch Spurpunkte.

e) Die Koordinatenform einer Ebene mit genau einem Spurpunkt hat nur eine Variable in ihrer Darstellung, also entweder nur x, y oder z und es gilt $d \neq 0$. Wenn die Koordinatendarstellung beispielsweise nur das x enthält, dann liegt die Ebene parallel zur yz-Ebene und hat nur einen Spurpunkt mit der x-Achse.

   Zusätzlich existiert genau ein Spurpunkt, wenn die Koordinatendarstellung x, y und z enthält und $d = 0$ ist.

f) Die Koordinatenform einer Ebene mit genau zwei Spurpunkten hat nur zwei Variablen in ihrer Darstellung und es gilt $d \neq 0$. Wenn die Koordinatendarstellung beispielsweise nur das x und das y enthält, dann liegt die Ebene parallel zur z-Achse und hat zwei Spurpunkte mit der x-Achse und der y-Achse.

g) g) Die Koordinatenform einer Ebene mit genau drei Spurpunkten hat drei Variablen in ihrer Darstellung und $d \neq 0$.

   Wenn $d = 0$ ist, verläuft die Ebene durch den Koordinatenursprung und hat somit nur einen Spurpunkt.

h) Die Koordinatenform einer Ebene hat unendlich viele Spurpunkte, wenn sie nur eine oder zwei Variablen enthält und $d = 0$ ist.

Lösung 8: Winkel im dreidimensionalen Raum

(1) Aufgabe: Einflugwinkel eines Flugzeugs [73]

Zunächst wird der Normalenvektor der Ebene berechnet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 \cdot 0 - 0 \cdot 1\\0 \cdot 0 - 1 \cdot 0\\1 \cdot 1 - 0 \cdot 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

Berechnen des Winkels, entweder mit Sinus:

$$\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix}10\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}10\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{-0{,}5}{10{,}0125 \cdot 1} = -0{,}0499$$

$$\alpha = \sin^{-1}(-0{,}0499) = -2{,}86°$$

Oder mit Cosinus:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{\begin{pmatrix}10\\0\\-0{,}5\end{pmatrix} * \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}10\\0\\-0{,}5\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{-0{,}5}{10{,}0125 \cdot 1} = -0{,}0499$$

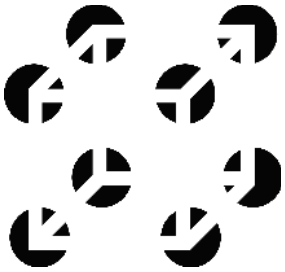
$$\alpha = 90° - \cos^{-1}(-0{,}0499) = -2{,}86°$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen

Sehen Sie den Würfel?



(2) Übung: Berechnen von Winkeln im dreidimensionalen Raum [75]

a) Berechnen des Winkels zwischen zwei Geraden mit $\cos(\alpha) = \frac{\vec{r_1} * \vec{r_2}}{|\vec{r_1}| \cdot |\vec{r_2}|}$ mit $\vec{r_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{r_2} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot 0}{3 \cdot 5}$$

$$= -\frac{2}{15}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{2}{15}\right) = 97{,}66°$$

b) Berechnen des Winkels zwischen einer Geraden und einer Ebene beispielsweise mit $\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} = \frac{1 \cdot 40 - 2 \cdot 30 + 2 \cdot 0}{3 \cdot 50}$$

$$= -\frac{20}{150}$$

$$\alpha = \sin^{-1}\left(-\frac{20}{150}\right) = -7{,}66°$$

Alternativ kann der Winkel wie folgt berechnet werden:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{1 \cdot 40 - 2 \cdot 30 + 2 \cdot 0}{3 \cdot 50} = -\frac{20}{150}$$

$$90° - \alpha = \cos^{-1}\left(-\frac{20}{150}\right) = 97{,}66°$$

$$\alpha = 90° - 97{,}66° = -7{,}66°$$

c) Berechnen des Winkels zwischen zwei Ebenen mit $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} * \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

mit $\vec{n_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}$

und $\vec{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -24 \end{pmatrix}$:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -24 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 40 \\ -30 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -12 \\ -24 \\ -24 \end{pmatrix}\right|}$$

$$= \frac{40 \cdot (-12) - 30 \cdot (-24) + 0 \cdot (-24)}{50 \cdot 36} = \frac{240}{1800}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{240}{1800}\right) = 82{,}3377°$$

(3) Übung: Planung einer Photovoltaikanlage [76]

a) Berechnen des Winkels zwischen dem Sonneneinfallvektor und der Ebene, in der die Photovoltaikanlage liegt, beispielsweise mit $\sin(\alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\sin(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = -0{,}9999$$

$$\alpha = \sin^{-1}(-0{,}9999) = -89{,}14°$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Alternativ Berechnung beispielsweise mit $\cos(90° - \alpha) = \frac{\vec{r} * \vec{n}}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}|}$

mit $\vec{r} = \begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$:

$$\cos(90° - \alpha) = \frac{\begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -3{,}3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right|} = -0{,}9999$$

$90° - \alpha = \cos^{-1}(-0{,}9999) = 179{,}14°$

$\alpha = 90° - 179{,}14° = -89{,}14°$

Das bedeutet, dass die Sonnenstrahlen fast senkrecht auf die Photovoltaikanlage fallen.

b) Berechnen des Winkels zwischen zwei Ebenen mit $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{n_1} * \overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}| \cdot |\overrightarrow{n_2}|}$ mit $\overrightarrow{n_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{n_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{n_2}$ ist der Normalenvektor zur Bodenebene, also zur xy-Ebene:

$$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right|} = 0{,}78$$

$\propto = \cos^{-1}(0{,}78) = 38{,}09°$

Damit ist die Anlage ein wenig stärker geneigt, als optimal wäre.

Lösung 9: Lagebeziehungen und Abstände bei Ebenen in der Koordinatenform

(1) Aufgabe: Lasermessgerät [77]

Zunächst wird die Parameterdarstellung der Geraden als ein Vektor geschrieben, so dass die Koordinaten ablesbar sind:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 3 + t \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

Somit lautet $x = t$ und $y = 3 + t$ und $z = 1{,}5$. Diese werden nun in die Koordinatenform der Ebene eingesetzt:

$$\begin{aligned} E: x + y &= 10 \\ t + (3 + t) &= 10 \\ 2t + 3 &= 10 \quad |-3 \\ 2t &= 7 \quad |:2 \\ t &= 3{,}5 \end{aligned}$$

Somit schneidet die Gerade die Ebene. Der Ortsvektor des Schnittpunktes lautet dann: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1{,}5 \end{pmatrix} + 3{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3{,}5 \\ 6{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$

Der Schnittpunkt lautet dann $P(3{,}5|6{,}5|1{,}5)$.

(2) Übung: Lagebez. bei Geraden und Ebenen in Koordinatenform [78]

a) $g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3r \\ 11 - 7r \\ -6 + 7r \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$E_1: 3x - 2y + 7z = 20$

$3 \cdot (4 + 3r) - 2 \cdot (11 - 7r) + 7 \cdot (-6 + 7r) = 20$

Es ergibt sich $r = 1$. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene schneiden. Der Ortsvektor des Schnittpunkts berechnet sich mit: $\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Der Schnittpunkt lautet $S(7|4|1)$.

b) $h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 7r \\ 5 + 5r \\ 8 - 5r \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$E_2: -5x - 3y - 10z = 2$

$-5 \cdot (-2 + 7r) - 3 \cdot (5 + 5r) - 10 \cdot (8 - 5r) = 2$

Es ergibt sich $-85 = 2$. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene sich nicht schneiden. Das bedeutet, dass sie parallel sind.

c) $i: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 9r \\ 5 + 7r \\ 8 - r \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$E_3: 3x - 4y - z = -34$

$3 \cdot (-2 + 9r) - 4 \cdot (5 + 7r) - (8 - r) = -34$

Es ergibt sich $-34 = -34$. Das bedeutet, dass es unendlich viele Lösungen gibt und

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

die Gerade in der Ebene liegt. Die Schnittmenge ist dann die Gerade selbst.

d) $k: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4r \\ 5-10r \\ 8-16r \end{pmatrix}$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$E_4: 10x - z = -140$

$10 \cdot (-2+4r) - (8-16r) = -140$

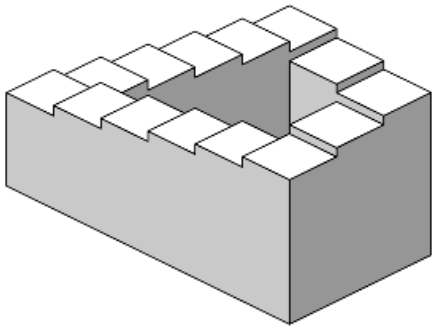
Es ergibt sich $r = -2$. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene schneiden. Der Ortsvektor des Schnittpunkts berechnet sich mit:

$$\overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -10 \\ -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ -24 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt lautet $S(6|-15|-24)$.

e) Bei dieser Lösung wurde der Term der y-Koordinate in die Ebenengleichung eingesetzt, obwohl diese keine y-Koordinate enthält. Dadurch ergibt sich ein falscher Schnittpunkt.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen



(3) Aufgabe: Dachplanung 3 [79]

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} -14y - 20z = -226 \\ -28y + 40z = 228 \end{matrix} \right|$$

Die Lösung lautet $y = 4$ und $z = 8{,}5$.

Da x in beiden Ebenengleichungen nicht vorkommt, kann es frei gewählt werden.

$x = \quad x$

$y = 4$

$z = 8{,}5$

Ersetzt man nun x durch den Parameter r, so lässt sich die Parameterdarstellung der Schnittgeraden aufstellen.

Die Schnittgerade, die den Dachfirst beschreibt, lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 8{,}5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 4 \\ 8{,}5 \end{pmatrix}$$

(4) Übung: Lagebeziehungen zweier Ebenen [81]

a) Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 3x + 2y - 10z = 40 \\ -6y + 30z = 60 \end{matrix} \right|$$

Die Lösung lautet:

$x = 20$

$y = \quad y$

$z = 2 + 0{,}2y$

Die Lösung ist somit von einem Parameter abhängig, das heißt, die beiden Ebenen schneiden sich in einer Schnittgerade.

Diese lautet:

$$g: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0{,}2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ r \\ 2 + 0{,}2r \end{pmatrix}$$

Alternativ: Die beiden Normalenvektoren sind keine Vielfachen voneinander und damit nicht linear abhängig. Das bedeutet, dass die Ebenen sich schneiden. Die Schnittgerade muss wie oben rechnerisch bestimmt werden.

b) Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left| \begin{matrix} 3x + 2y - 10z = 40 \\ -7{,}5x - 5y + 25z = -100 \end{matrix} \right|$$

Die Lösung lautet:

$x = \frac{40}{3} - \frac{2}{3}y + \frac{10}{3}z$

$y = \quad y$

$z = \quad z$

Die Lösung ist somit von zwei Parametern abhängig, das heißt, die beiden Ebenen sind identisch.

Alternativ:

Die beiden Normalenvektoren der Ebenen sind linear abhängig (der Normalenvektor von D_3 ist das -2,5-fache des Normalenvektors von D_1) und die Koordinatenform der Ebene D_3 lässt sich berechnen, indem man die gesamte Koordinatenform der Ebene D_1 mit dem

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Wert $-2{,}5$ multipliziert. Das bedeutet, dass die beiden Ebenen identisch sind.

c) Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix}3x+2y-10z=40\\9x+6y-30z=100\end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, somit sind die beiden Ebenen parallel.

Alternativ:

Die beiden Normalenvektoren der Ebene sind Vielfache voneinander (Der Normalenvektor von D_4 ist das Dreifache von dem von D_1), aber die beiden Koordinatenformen lassen sich nicht ineinander überführen durch Multiplikation mit 3, da $40 \cdot 3 = 120 \neq 100$. Das bedeutet, dass die Ebenen parallel sind.

(5) Aufgabe: Drohne am Berghang [82]

a) In der Skizze wird der Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E so auf die Ebene E gesetzt, dass er durch den Punkt D geht. Die aus dem Stützvektor $\overrightarrow{OD}$ und dem Normalenvektor zusammengesetzte Gerade g wird dann mit der Ebene geschnitten. Der Abstand des Schnittpunktes zum Punkt D ist der minimale Abstand.

b) Schritt 1:

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}4\\0\\20\end{pmatrix}$

Schritt 2:

Hilfsgerade h:

$$h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}5\\2{,}6\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\20\end{pmatrix}$$

Schritt 3:

Berechnung des Schnittpunktes:

$E\colon 4x + 20z = 50$

$4 \cdot (-0{,}8 + 4r) + 20 \cdot (2{,}6 + 20r) = 50$

$-3{,}2 + 16r + 52 + 400r = 50$

$48{,}8 + 416r = 50$

$416r = 1{,}2$

$r = 0{,}0029$

Einsetzen in h:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}5\\2{,}6\end{pmatrix} + 0{,}0029 \cdot \begin{pmatrix}4\\0\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}7884\\0{,}5\\2{,}658\end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\overrightarrow{DS} = \begin{pmatrix}-0{,}7884\\0{,}5\\2{,}658\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-0{,}8\\0{,}5\\2{,}6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}0116\\0\\0{,}058\end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{DS}\right| = 0{,}0591486$

Das bedeutet, dass die Drohne zum Berghang den kürzesten Abstand von $0{,}059\text{km}$ hat, bzw. 59m.

(6) Übung: Abstände zu Ebenen [84]

a) Schritt 1:

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix}3\\2\\-10\end{pmatrix}$

Schritt 2:

Hilfsgerade h:

$$h\colon \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-10\end{pmatrix}$$

Schritt 3:

Berechnung des Schnittpunktes:

$D_1\colon 3x + 2y - 10z = 40$

$3 \cdot (1 + 3r) + 2 \cdot (5 + 2r) - 10 \cdot (-2 - 10r) = 40$

Es ergibt sich: $r = 0{,}0619$

Einsetzen in h:

$$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix} + 0{,}0619 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-10\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}1857\\5{,}1238\\-2{,}619\end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\overrightarrow{P_1S} = \begin{pmatrix}1{,}1857\\5{,}1238\\-2{,}619\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0{,}1857\\0{,}1238\\-0{,}619\end{pmatrix}$$

$\left|\overrightarrow{P_1S}\right| = 0{,}658$

Das bedeutet, dass der kürzeste Abstand des Punktes zur Ebene 0,658 Einheiten beträgt.

b) Schritt 1:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

Hilfsgerade h:

$h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Schritt 3:

Berechnung des Schnittpunktes:

$D_1: 3x + 2y - 10z = 40$

$3 \cdot (-2 + 3r) + 2 \cdot (-2 + 2r) - 10 \cdot (-5 - 10r) = 40$

Es ergibt sich: $r = 0$

Das bedeutet, dass der Punkt P_2 in der Ebene D_1 liegt. Damit beträgt der Abstand der beiden Objekte 0.

c) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

$l: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 + 3r \\ 11 - 7r \\ -6 + 7r \end{pmatrix}$

einsetzen in

$E_1: 3x - 2y + 7z = 20$

$3 \cdot (4 + 3r) - 2 \cdot (11 - 7r) + 7 \cdot (-6 + 7r) = 20$

Es ergibt sich $r = 1$

Das bedeutet, dass die Gerade die Ebene schneidet. Somit beträgt der Abstand der beiden Objekte 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

Alternatives Verfahren zum Prüfen der Lagebeziehung:

Überprüfen der Orthogonalität des Richtungsvektors der Geraden und des Normalenvektors der Ebene.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix}$

$3 \cdot 3 - 7 \cdot 2 + 7 \cdot (-10) = -75$

Die beiden Vektoren sind nicht orthogonal zueinander. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene weder parallel noch identisch sind. Damit gibt es einen Schnittpunkt und der Abstand der beiden Objekte beträgt 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

d) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

$m: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 7r \\ 5 + 5r \\ 8 - 5r \end{pmatrix}$

einsetzen in

$E_2: -5x - 3y - 10z = 2$

$-5 \cdot (-2 + 7r) - 3 \cdot (5 + 5r) - 10 \cdot (8 - 5r) = 2$

Es ergibt sich keine Lösung.

Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene parallel sind. Das bedeutet, dass der Abstand der beiden Objekte berechnet werden muss. Dazu wird das gleiche Verfahren verwendet, wie bei einem Punkt und einer Ebene. Als Punkt kann jeder Punkt der Gerade gewählt werden. Am einfachsten ist es, den Stützvektor der Gerade zu verwenden, also in diesem Fall $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Alternatives Verfahren zum Prüfen der Lagebeziehung:

Überprüfen der Orthogonalität des Richtungsvektors der Geraden und des Normalenvektors der Ebene.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$.

$7 \cdot (-5) + 5 \cdot (-3) - 5 \cdot (-10) = 0$

Die beiden Vektoren sind orthogonal zueinander. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene entweder parallel sind oder die Gerade in der Ebene liegt.

Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, kann der Stützvektor in die Ebenengleichung eingesetzt werden (Punktprobe).

$-5 \cdot (-2) - 3 \cdot 5 - 10 \cdot 8 = -85 \neq 2$

Das bedeutet, dass der Punkt nicht in der Ebene liegt und somit sind die Gerade und die Ebene parallel. Der Abstand der beiden muss nun berechnet werden. Dazu wird das gleiche Verfahren verwendet, wie bei einem Punkt und einer Ebene. Als Punkt kann jeder Punkt der Gerade gewählt werden. Am einfachsten ist es, den Stützvektor der Gerade zu verwenden, also in diesem Fall $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Berechnen des minimalen Abstands:

Vorüberlegung:

Als Punkt kann jeder Punkt der Gerade gewählt werden. Am einfachsten ist es, den Punkt zum Stützvektor der Gerade zu verwenden, also in diesem Fall $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Schritt 1:

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

Hilfsgerade h:

$h: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix}$

Schritt 3:

Berechnung des Schnittpunktes:

$E_2: -5x - 3y - 10z = 2$

$-5 \cdot (-2 - 5r) - 3 \cdot (5 - 3r) - 10 \cdot (8 - 10r) = 2$

Es ergibt sich: $r = 0{,}6493$

Einsetzen in h:

$\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + 0{,}6493 \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ -10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5{,}2465 \\ 3{,}0521 \\ 1{,}507 \end{pmatrix}$

Schritt 4:

$\overrightarrow{PS} = \begin{pmatrix} -5{,}2465 \\ 3{,}0521 \\ 1{,}507 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3{,}2465 \\ -1{,}9479 \\ -6{,}493 \end{pmatrix}$

$\left|\overrightarrow{PS}\right| = 7{,}5162$

Das bedeutet, dass der kürzeste Abstand des Punktes zur Ebene 7,5162 Einheiten beträgt. Damit beträgt auch der kürzeste Abstand jedes Punktes auf der Geraden zur Ebene 7,5162 Einheiten beträgt.

e) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

$n: \overrightarrow{OX} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 + 9r \\ 5 + 7r \\ 8 - r \end{pmatrix}$

einsetzen in

$E_3: 3x - 4y - z = -34$

$3 \cdot (-2 + 9r) - 4 \cdot (5 + 7r) - (8 - r) = -34$

Es ergeben sich unendlich viele Lösungen.

Das bedeutet, dass die Gerade in der Ebene liegt. Somit beträgt der Abstand der beiden Objekte 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

Alternatives Verfahren zum Prüfen der Lagebeziehung:

Überprüfen der Orthogonalität des Richtungsvektors der Geraden und des Normalenvektors der Ebene.

$\vec{r} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{n} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$9 \cdot 3 + 7 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1) = 0$

Die beiden Vektoren sind orthogonal zueinander. Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene entweder parallel oder identisch sind.

Um zu prüfen, ob die Gerade in der Ebene liegt, kann der Stützvektor in die Ebenengleichung eingesetzt werden (Punktprobe).

$3 \cdot (-2) - 4 \cdot 5 - 8 = -34$

Das bedeutet, dass der Stützvektor in der Ebene liegt und damit auch die gesamte Gerade. Somit beträgt der Abstand der Gerade und der Ebene 0.

f) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$\left|\begin{matrix} 3x + 2y - 10z = 40 \\ -6y + 30z = 60 \end{matrix}\right|$

Die Lösung lautet $x = 20, y = 5z - 10$ und $z = z$.

Die Lösung ist somit von einem Parameter abhängig, das heißt, die beiden Ebenen schneiden sich. Somit haben Sie einen Abstand von 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

Alternativ: Die Koordinatenform der Ebene D_2 lässt sich nicht herleiten, indem man die gesamte Koordinatenform der Ebene D_1 mit einer beliebigen Zahl multipliziert. Die beiden Normalenvektoren sind nicht linear abhängig. Das

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

heißt, dass die beiden Ebenen sich schneiden. Somit haben Sie einen Abstand von 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

g) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix} 3x+2y-10z=40 \\ -7{,}5x-5y+25z=-100 \end{matrix}\right|$$

Die Lösung lautet:

$x = -0{,}\bar{3}\cdot(2y-10z-40) = -\frac{2}{3}y + \frac{10}{3}z + \frac{40}{3}$ $y = y$ und $z = z$

Die Lösung ist somit von zwei Parametern abhängig, das heißt, die beiden Ebenen sind identisch. Somit haben Sie einen Abstand von 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

Alternatives Verfahren zum Prüfen der Lagebeziehung

Die Koordinatenform der Ebene D_3 lässt sich herleiten, indem man die gesamte Koordinatenform der Ebene D_1 mit dem Wert $-2{,}5$ multipliziert. Das heißt, dass die beiden Ebenen identisch sind. Somit haben Sie einen Abstand von 0. Der Abstand muss nicht berechnet werden.

h) Prüfen der Lagebeziehung:

Rechnerisch:

Zu lösen ist das Gleichungssystem:

$$\left|\begin{matrix} 3x+2y-10z=40 \\ 9x+6y-30z=100 \end{matrix}\right|$$

Das Gleichungssystem hat keine Lösung, das heißt, die beiden Ebenen sind parallel. Der Abstand muss berechnet werden. Dazu wird das gleiche Verfahren verwendet, wie bei einem Punkt und einer Ebene. Als Punkt kann jeder Punkt der einen Ebene gewählt werden, um dann den Abstand zur anderen Ebene zu berechnen.

Alternatives Verfahren zum Prüfen der Lagebeziehung

Die Koordinatenform der Ebene D_4 lässt sich nur teilweise herleiten, indem man die gesamte Koordinatenform der Ebene D_1 mit dem Wert 3 multipliziert. Allerdings müsste sich dann hinter dem Gleichheitszeichen 120 ergeben. Damit sind die Normalenvektoren zwar linear abhängig, aber die Ebenen nicht identisch. Das heißt, dass die beiden Ebenen parallel sind. Der Abstand muss berechnet werden. Dazu wird das gleiche Verfahren verwendet, wie bei einem Punkt und einer Ebene. Als Punkt kann jeder Punkt der einen Ebene gewählt werden, um dann den Abstand zur anderen Ebene zu berechnen

Berechnung des minimalen Abstands:

Vorüberlegung:

Zunächst muss ein Punkt der einen Ebene gewählt werden, um den Abstand zur anderen Ebene zu berechnen. Hier wird der Punkt $\mathrm{P}(0|0|-4)$ auf D_1 gewählt und dann der Abstand zu D_4 berechnet. Bei einer anderen Wahl unterscheidet sich der Rechenweg, aber der sich ergebene minimale Abstand muss derselbe sein, wie in dieser Rechnung.

Schritt 1:

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix}$

Schritt 2:

Hilfsgerade h:

$$h: \overrightarrow{\mathrm{OX}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Schritt 3:

Berechnung des Schnittpunktes:

$D_4: 9x+6y-30z = 100$

$9\cdot(9r) + 6\cdot(6r) - 30\cdot(-4-30r) = 100$

Es ergibt sich: $r = -0{,}0197$

Einsetzen in h:

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} - 0{,}0197 \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 6 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1773 \\ -0{,}1182 \\ -3{,}409 \end{pmatrix}$$

Schritt 4:

$$\overrightarrow{\mathrm{PS}} = \begin{pmatrix} -0{,}1773 \\ -0{,}1182 \\ -3{,}409 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}1773 \\ -0{,}1182 \\ 0{,}591 \end{pmatrix}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PS}}\right| = 0{,}6282$$

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Das bedeutet, dass der kürzeste Abstand der beiden Ebenen 0,6282 Einheiten beträgt.

(7) Übungsaufgabe: Abstände zu Ebenen mithilfe der Hesseschen Normalform [85]

a) $\mathrm{P}(3|-2|4)$ und $D_1: -2x + 3y + z = 12$

Aufstellen der Hesseschen Normalform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und

$|\vec{n}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14} = 3{,}74$

$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0{,}5345 \\ 0{,}8018 \\ 0{,}2673 \end{pmatrix}$

Ein Punkt in der Ebene lautet beispielsweise $\mathrm{A}(0|4|0)$.

Somit ergibt sich:

$$d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} -0{,}5345 \\ 0{,}8018 \\ 0{,}2673 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 3{,}2072$$

Die Hessesche Normalform der Ebene D_1 lautet dann:

$$D_1: \begin{pmatrix} -0{,}5345 \\ 0{,}8018 \\ 0{,}2673 \end{pmatrix} * \overrightarrow{\mathrm{OX}} - 3{,}2072 = 0$$

Der Abstand des Punktes P zur Ebene D_1 berechnet sich dann mit:

$$d(\mathrm{P}, D_1) = \begin{pmatrix} -0{,}5345 \\ 0{,}8018 \\ 0{,}2673 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} - 3{,}2072$$

$$= -5{,}3451$$

Das bedeutet, dass der Abstand des Punktes zur Ebene 5,3451 Einheiten entspricht.

b) Zunächst Prüfen der Lagebeziehung:

Untersuchung des Richtungsvektors der Geraden und des Normalenvektors der Ebene auf Orthogonalität:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = 1 \cdot 6 + 9 \cdot (-4) + 3 \cdot 10 = 0$$

Das bedeutet, dass die Gerade und die Ebene parallel sind oder die Gerade in der Ebene liegt.

Um zu untersuchen, welcher der beiden Fälle zutrifft, wird geprüft, ob der Punkt des Stützvektors der Geraden in der Ebene liegt:

$6 \cdot 5 - 4 \cdot 4 + 10 \cdot (-3) = -16 \neq 20$

Damit liegt die Gerade nicht in der Ebene, sondern parallel. Nun kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Gerade zur Ebene berechnet werden. Als Punkt wird hier der Punkt des Stützvektors der Geraden verwendet, also $\mathrm{P}(5|4|-3)$

<u>Berechnung des Abstands:</u>

Aufstellen der Hesseschen Normalform:

$\vec{n} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix}$

und $|\vec{n}| = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 10^2} = \sqrt{152}$

$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{152}} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}4867 \\ -0{,}3244 \\ 0{,}8111 \end{pmatrix}$

Ein Punkt in der Ebene lautet beispielsweise $\mathrm{A}(0|0|2)$.

Somit ergibt sich:

$$d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0{,}4867 \\ -0{,}3244 \\ 0{,}8111 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 1{,}6222$$

Die Hessesche Normalform der Ebene D_2 lautet dann:

$$D_2: \begin{pmatrix} 0{,}4867 \\ -0{,}3244 \\ 0{,}8111 \end{pmatrix} * \overrightarrow{\mathrm{OX}} - 1{,}6222 = 0$$

Der Abstand des Punktes B zur Ebene D_2 berechnet sich dann mit:

$$d(\mathrm{B}, D_2) = \begin{pmatrix} 0{,}4867 \\ -0{,}3244 \\ 0{,}8111 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 1{,}6222$$

$$= -2{,}9196$$

Das bedeutet, dass der Abstand des Punktes zur Ebene 2,9196 Einheiten entspricht. Damit ist die gesamte Gerade 2,9196 Einheiten von der Ebene entfernt.

$D_3: -4x - 2y + z = -4$ und

$D_4: 8x + 4y - 2z = 10$

c) Zunächst Prüfen der Lagebeziehung:

Untersuchung der Normalenvektoren der Ebenen auf lineare Abhängigkeit:

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

$$a \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

In allen drei Zeilen ergibt sich $a = -2$. Das bedeutet, dass die beiden Normalenvektoren linear abhängig sind und damit sind die beiden Ebenen parallel oder identisch.

Um zu untersuchen, welcher der beiden Fälle zutrifft, wird geprüft, ob ein Punkt der Ebene D_3 (hier $\mathrm{C}(0|2|0)$) in D_4 liegt:

$8 \cdot 0 + 4 \cdot 2 - 2 \cdot 0 = 8 \neq 10$

Damit sind die Ebenen nicht identisch, sondern parallel. Nun kann der Abstand eines beliebigen Punktes der Ebene D_3 zur Ebene D_4 berechnet werden. Als Punkt wird hier der Punkt $\mathrm{C}(0|2|0)$.

Berechnung des Abstands:

Aufstellen der Hesseschen Normalform der Ebene D_4:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ und } |\vec{n}| = \sqrt{8^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{84}$$

$$\overrightarrow{n_0} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{84}} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}8729 \\ 0{,}4364 \\ -0{,}2182 \end{pmatrix}$$

Ein Punkt in der Ebene D_4 lautet beispielsweise $\mathrm{A}(0|0|-5)$.

Somit ergibt sich:

$$d = \overrightarrow{n_0} * \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix} 0{,}8729 \\ 0{,}4364 \\ -0{,}2182 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = 1{,}091$$

Die Hessesche Normalform der Ebene D_4 lautet dann:

$$D_4: \begin{pmatrix} 0{,}8729 \\ 0{,}4364 \\ -0{,}2182 \end{pmatrix} * \overrightarrow{\mathrm{OX}} - 1{,}091 = 0$$

Der Abstand des Punktes C zur Ebene D_4 berechnet sich dann mit:

$$d(\mathrm{C}, D_4) = \begin{pmatrix} 0{,}8729 \\ 0{,}4364 \\ -0{,}2182 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - 1{,}091 = -0{,}2182$$

Das bedeutet, dass der Abstand des Punktes zur Ebene 0,2182 Einheiten entspricht. Damit ist die gesamte Ebene D_3 0,2182 Einheiten von der Ebene D_4 entfernt.

Lösung 10: Kugeln im drei-dimensionalen Raum

(1) Aufgabe: Grundidee von GPS [86]

Bei der Positionsbestimmung mit drei Satelliten werden die drei Kugeln, die um die Satelliten herum entstehen, jeweils mit der Erdkugel geschnitten.

In der ersten Abbildung wird die Kugel des ersten Satelliten mit der Erdkugel geschnitten. Dabei entsteht ein Schnittkreis. Die Position des GPS-Geräts kann überall auf diesem Schnittkreis liegen.

Wird ein zweiter Satellit hinzugefügt, so entsteht ein weiterer Schnittkreis. Die beiden Kreise haben zwei Schnittpunkte. Die Position des GPS-Geräts kann dann an diesen beiden Orten liegen.

Mit einem dritten Satelliten entsteht ein dritter Schnittkreis, welcher nur einen gemeinsamen Punkt mit den anderen beiden Schnittkreisen besitzt. Dieses ist der genaue Standort des GPS-Geräts.

(2) Übung: Angeben von Kugelgleichungen und Punktprobe [87]

a) $(x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-7)^2 = 20^2$

Punktprobe:

$\mathrm{P}(-3|-15|7)$ einsetzen in die Kugelgleichung:

$(-3+3)^2 + (-15-5)^2 + (7-7)^2 = 0^2 + (-20)^2 + 0^2 = 400 = 20^2$

Das bedeutet, der Punkt P liegt auf dieser Kugel.

b) $(x-0)^2 + (y-8)^2 + (z-15)^2 = 1^2$, also $x^2 + (y-8)^2 + (z-15)^2 = 1^2$

Punktprobe:

$\mathrm{P}(-3|-15|7)$ einsetzen in die Kugelgleichung:

$(-3)^2 + (-15-8)^2 + (-7-15)^2 = (-3)^2 + (-23)^2 + (-21)^2 = 9 + 529 + 441 = 979 \neq 1^2$

Das bedeutet, der Punkt P liegt nicht auf dieser Kugel.

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

c) $(x-29)^2+(y-11)^2+(z+31)^2=5^2$

Punktprobe:

$P(-3|-15|7)$ einsetzen in die Kugelgleichung:

$(-3-29)^2+(-15-11)^2+(7+31)^2=(-32)^2+(-26)^2+38^2=1024+676+1444=3144\neq 5^2$

Das bedeutet, der Punkt P liegt nicht auf dieser Kugel.

(3) Aufgabe: Standortbestimmung mit Satellitendaten [88]

a) In dem Gleichungssystem werden drei Kugeln miteinander geschnitten. Im besten Fall gibt es dann aber noch immer zwei mögliche Schnittpunkte, an denen das Gerät stehen kann. Zwei Kugeln lassen einen Schnittkreis entstehen und eine weitere Kugel ergibt dann zwei Schnittpunkte.

b) Der Satellit befindet sich im Punkt $S(9522|16402|18608)$ und hat einen Abstand von 21524,71243 km zum GPS-Gerät.

c) In der Realität ist die Erde keine perfekte mathematisch Kugel, weil nicht alle Punkte die gleiche Entfernung zum Erdmittelpunkt haben, da:

- es Gebirge und Täler gibt,
- aufgrund der Erdrotation die Erde an den Polen abgeflacht ist.

Für viele mathematische Betrachtungen lässt sich eine Kugel als mathematisches Modell trotzdem sinnvoll als gute Näherung nutzen.

(4) Aufgabe: Umrechnen von kartesischen zu geografischen Koordinaten [89]

a) Der Ort 53,54135°N und 9,9851°O lässt sich auf einem Globus finden, indem man vom Äquator aus auf den Breitengrad 53,54135° nach Norden geht und vom Nullmeridian (Längengrad bei 0°) aus auf den Längengrad bei 9,9851° in Richtung Osten.

b) Die drei benötigten Vektoren sind:

1. Der Ortsvektor $\overrightarrow{OP}=\begin{pmatrix}3726{,}761538\\655{,}5144302\\5125{,}542977\end{pmatrix}$
2. Der in die xy-Ebene projizierte Ortsvektor $\overrightarrow{OP'}=\begin{pmatrix}3726{,}761538\\655{,}5144302\\0\end{pmatrix}$
3. Der Vektor entlang der x-Achse:

$$\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

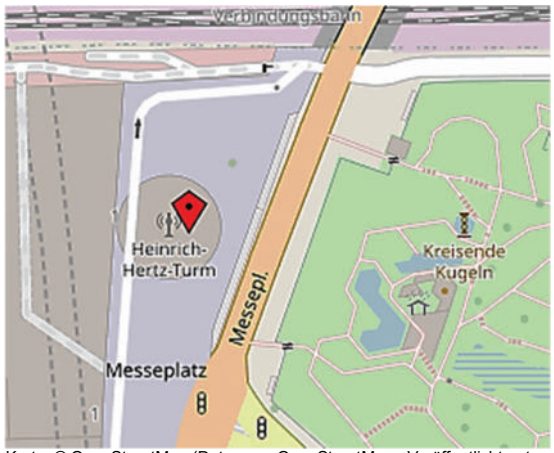
c) Der Winkel φ zwischen $\overrightarrow{OP}$ und $\overrightarrow{OP'}$ gibt den Breitengrad an und beträgt 53,563107°.

Der Winkel λ zwischen $\overrightarrow{OP'}$ und $\vec{v}$ gibt den Längengrad an und beträgt 9,9759299°.

An der positiven z -Koordinate des Punktes P, lässt sich erkennen, dass er auf der Nordhalbkugel liegt.

An der positiven y -Koordinate des Punktes P, lässt sich erkennen, dass der Punkt östlich des Nullmeridians liegt.

Das bedeutet, der Ort befindet sich auf dem Breitengrad 53,563107° Nord und dem Längengrad 9,9759299° Ost. Dieses ist genau der Ort, an dem der Heinrich-Hertz-Turm in Hamburg steht.



Karte: © OpenStreetMap (Daten von OpenStreetMap - Veröffentlicht unter ODbL

)

(5) Aufgabe: Untersuchen von Lagebeziehungen bei Kugeln [90]

a) Ein Punkt kann:

- innerhalb der Kugel liegen,
- auf der Kugel liegen,

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

- außerhalb der Kugel liegen.

b) Eine Gerade kann:

- die Kugel mit zwei Schnittpunkten schneiden,
- eine Tangente sein und die Kugel nur in einem Punkt berühren,
- außerhalb der Kugel liegen.

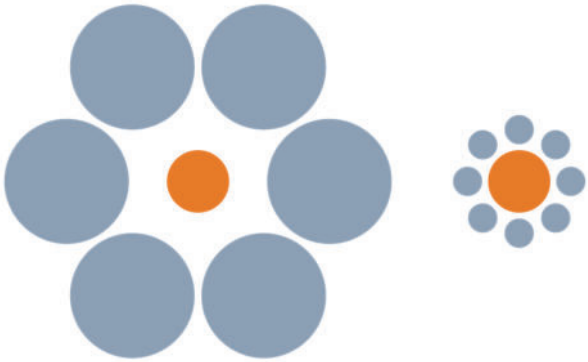
c) Eine Ebene kann:

- die Kugel in einem Schnittkreis schneiden,
- die Kugel in einem Punkt berühren,
- außerhalb der Kugel liegen.

d) Zwei Kugeln können:

- identisch sein,
- sich in einem Schnittkreis schneiden,
- sich in einem Punkt berühren,
- sich nicht schneiden, indem entweder eine innerhalb der anderen liegt oder sie nebeneinander liegen, ohne sich zu berühren.

Darüber staunen (nicht nur) Mathematiker:innen



Die Kreise in der Mitte sind genau gleich groß.

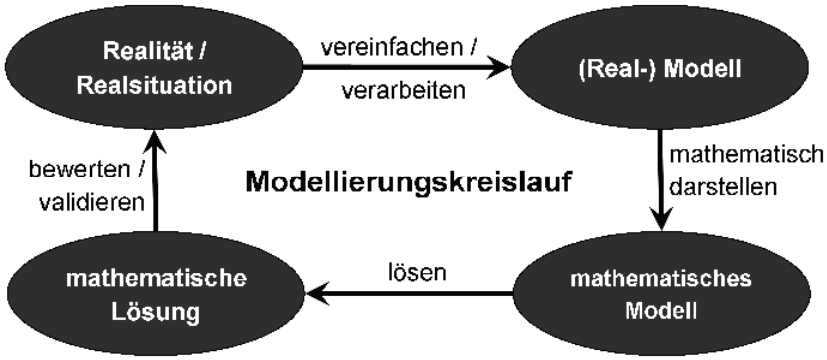
Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches?
Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„**Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie** - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

Reality Check und Modellierungskreislauf

Beim **Reality Check** werden Sie in einigen Aufgaben aufgefordert, zu begründen, warum gewisse Aussagen in der Realität nur mit Einschränkungen zutreffen. Diese Aussagen stellen immer eine Verbindung zwischen der Realität und der verwendeten Mathematik her.

Wenn die Realität durch mathematische Methoden beschrieben wird, spricht man von Modellen. Der Prozess der Modellierung wird häufig durch den sogenannten Modellierungskreislauf dargestellt, der vereinfacht hier dargestellt ist:



Der Kreislauf beginnt mit einem Problem in der Realität. Zunächst müssen Annahmen über den Sachverhalt in der Realität getroffen werden, da nicht alle Aspekte, die in der Realität eine Rolle spielen, in dem mathematischen Modell berücksichtigt werden können.

An dieser Stelle knüpfen die Aufgaben zum **Reality Check** an, da hier die in den Aufgaben getroffenen Annahmen kritisch hinterfragt werden.

Bei einer vollständigen Modellierung schließen sich die folgenden Arbeitsschritte an.

Das entstandene Realmodell wird in ein mathematisches Modell überführt, indem das Problem mathematisch dargestellt wird. Mithilfe von mathematischen Methoden kann dieses mathematische Problem nun gelöst werden.

Im Anschluss muss überprüft werden, ob die mathematische Lösung zu dem ursprünglichen Problem in der Realität passt. Wird bei dieser Bewertung der mathematischen Lösung festgestellt, dass die Lösung nicht sinnvoll ist zur Bearbeitung des ursprünglichen Problems, so wird der Prozess von vorne begonnen.

Stichwortverzeichnis

Abstände
  bei Ebenen 82
  Geraden unter Berücksichtigung der Zeit.. 49
  Punkt und Gerade..... 40
  von zwei Geraden..... 42
  zwischen Punkten..... 25
Betrag eines Vektors 25
Bildpunkt.....14, 16
Ebenen 52
  Abstände 82
  Hessesche Normalform 84
  identische 63
  Koordinatenform 67
  Lagebeziehung Ebenen in Koordinatenform79
  Lagebeziehung Ebenen in Parameterform 63
  Lagebeziehung zu Geraden 58
  Lagebeziehungen zu Geraden.....77
  Normalenform.....67
  Normalenvektor 65
  parallele.....63
  Parameterdarstellung 52
  Parameterdarstellung bestimmen 54
  Punktprobe.....57
  Schnittgerade 63
  Spurpunkte.....71
  Winkel berechnen.....74
Gegenvektoren 19
Geraden.....28
  Abstand zu einem Punkt.....40
  Abstände.....42

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!

Dieses Dokument ist urheberrechtlich geschützt. Das Nutzungsrecht wird ausschließlich Käufer:innen des Buches
„Mathematik in Kontexten entdecken: Analytische Geometrie - Eine anwendungsorientierte Einführung in die analytische Geometrie“
(von Vera Hauptmann, Dr. Hannah Heinrichs und Martin Kölln) eingeräumt. Jede Nutzung ohne vorherigen Erwerb des Buches ist untersagt.

- Abstände von Ebenen ... 82
- identische ... 46
- Lagebeziehungen ... 46
- Lagebeziehungen zu Ebenen ... 77
- parallele ... 46
- Parameterdarstellung ... 28
- Parameterdarstellungaus zwei Punkten ... 30
- Punktprobe ... 30
- windschiefe ... 46
- Winkeln berechnen ... 74

GPS-Ortung ... 86
Hessesche Normalform ... 84
kollinear ... 52
Koordinatenachsen
- Spurpunkte ... 71

Koordinatenebenen
- Projizieren auf die ... 14
- Spiegelung an den ... 16

Koordinatenform ... 67
- Punktprobe ... 69
- Spurpunkte ... 71
- Umwandeln aus der Parameterform ... 67
- Umwandeln in Parameterform ... 70

Koordinatensystem
- Zeichnen ... 10

Koordinatenursprung
- Spiegelung am ... 16

Koordinatenzug ... 12
Kreuzprodukt ... 65
Lagebeziehung
- Ebenen in Koordinatenform ... 79
- Ebenen in Parameterform ... 63
- Gerade und Ebene in Paramterform ... 58
- Geraden und Ebenen ... 77
- von Geraden ... 46

Länge eines Vektors ... 25
linear abhängig ... 26
Lotfußpunkt ... 40
Normalenform ... 67
Normalenvektor ... 65
- normiert ... 84

Nullvektor ... 22
Orthogonalität ... 35
Orthogonalitätskriterium ... 35
Ortsvektoren ... 19
Parallelprojektion ... 14, 60
Parameterdarstellung
- Ebenen ... 52
- einer Ebene bestimmen ... 54
- Gerade ... 28
- Gerade aus zwei Punkten ... 30

Parameterform
- Lagebeziehung zweier Ebenen ... 63
- Umwandeln aus der Koordinatenform ... 70
- Umwandeln in die Koordinatenform ... 67

Projektion ... 14
- Parallel- ... 60
- Zentral- ... 60

Punkte
- Abstand von Ebenen ... 82
- Abstand zu einer Geraden ... 40
- einer Geraden bei vorgeg. Bed. ... 32
- Einzeichnen von ... 12
- kollineare ... 52
- Projizieren auf die Koordinatenebenen ... 14

Punkteprobe
- Ebenen ... 57

Punktprobe
- Geraden ... 30
- Koordinatenform ... 69

Richtungsvektor ... 28
- Zentral- und Parallelprojektion ... 60

Schattenwurf ... 60
Schnittpunkt
- Gerade und Ebene ... 58
- Geraden ... 46
- mehrere Kugeln ... 89

Skalarmultiplikation ... 26
Skalarprodukt ... 35
Spaltenvektor ... 19
Spannvektoren ... 52
Spiegelebene ... 16
Spiegelung ... 16
Spurpunkte ... 71
Stützvektor ... 28
Urbildpunkt ... 14, 16
Ursprung
- Spiegelung am ... 16

Vektoren ... 19
- Addieren und Subtrahieren von ... 21
- Bestimmen des Betrags ... 25
- Darstellung als Pfeil ... 19
- Kreuzprodukt ... 65
- linear abhängige ... 26
- Normalenvektor ... 65
- orthogonale ... 35
- Skalaprodukt ... 35
- Verschiebung ... 23
- Vielfache ... 26
- Winkel berechnen ... 74

Verschiebungsvektor ... 23
windschief ... 46
Winkel im dreidimensionalen Raum ... 74
Zentralprojektion ... 60

Hinweis für Lernende: Sie haben dieses Dokument digital oder in gedruckter Form von Ihrer Lehrkraft erhalten, aber kein eigenes Exemplar des Buches? Dann stimmt etwas nicht! Die Nutzung dieses Dokuments ist nur zusammen mit einem rechtmäßig erworbenen Buch gestattet. Wenn Sie das gedruckte Buch nicht erhalten haben, sprechen Sie Ihre Lehrkraft darauf an und fragen Sie nach, warum Ihnen das Dokument ohne das dazugehörige Buch zur Verfügung gestellt wurde.
Ideen wertschätzen – Copyright respektieren!