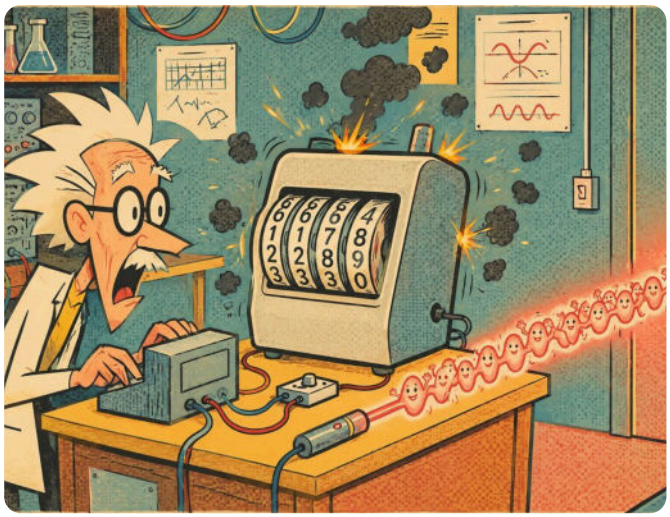
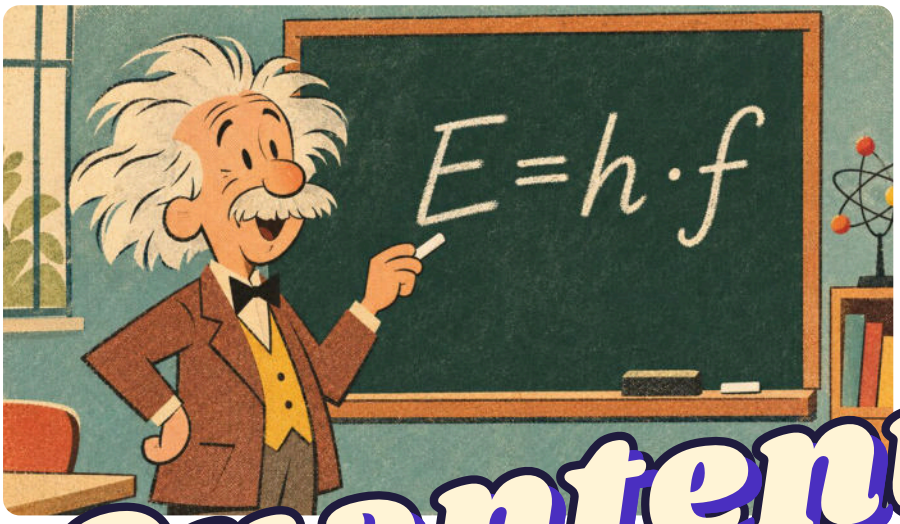








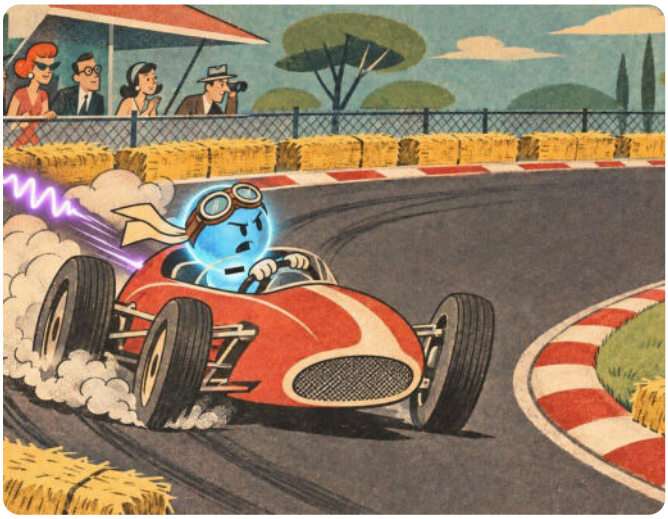


Quantenwelt

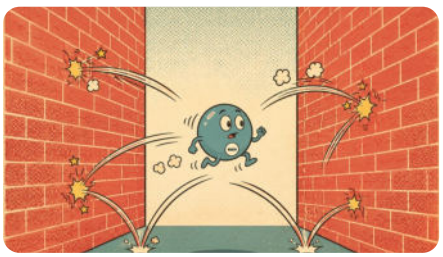


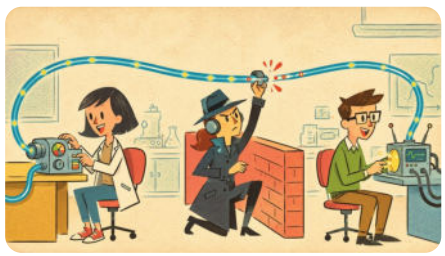














Willkommen in Köllns Quantenwelt

Liebe Lernende,

wenn ich in der Oberstufe Quantenphysik unterrichte, kommt mir dieses Teilgebiet der Physik jedes Mal genauso absurd vor wie die Fantasiewelt aus Douglas Adams' Buchreihe „Per Anhalter durch die Galaxis". In „Das Restaurant am Ende des Universums" schreibt Adams:

> *„Es gibt eine Theorie, die besagt, wenn jemals irgendwer genau herausfindet, wozu das Universum da ist und warum es da ist, dann verschwindet es auf der Stelle und wird durch noch etwas Bizarreres und Unbegreiflicheres ersetzt. Es gibt eine andere Theorie, nach der das schon passiert ist."*

Ich glaube, da ist etwas dran.

Gemeinsam mit der KI Claude habe ich versucht, eine möglichst anschauliche Lernumgebung für diese rätselhafte Quantenwelt zu schaffen. Am Ende füllten meine Prompts mehr als 50 DIN-A4-Seiten. Das finde ich irgendwie beruhigend: Es zeigt, dass es für das Gelingen eines solchen Projekts nach wie vor menschliche Ideen braucht – noch …

Claude und ich hoffen, dass uns etwas Gutes und Hilfreiches gelungen ist. Viel Erfolg!

Martin Kölln

Die interaktive Lernumgebung findest du hier:

Lerntresen.de/quantenphysik

mit Simulationen, Aufgaben mit Rückmeldung und deinem persönlichen Lernfortschritt

Inhalt

1	**Licht kommt in Portionen – das Photon**	Quantenobjekte	3
2	**Der Fotoeffekt – Licht schlägt Elektronen heraus**	Quantenobjekte	5
3	**Den Fotoeffekt vermessen – Gegenfeldmethode und h**	Quantenobjekte	7
4	**Auch Elektronen interferieren – Materiewellen**	Quantenobjekte	9
5	**Die Spielregeln der Quantenwelt**	Quantenobjekte	11
6	**Welcher Weg? Komplementarität und Quantenradierer**	Quantenobjekte	13
7	**Wellenfunktion, Unbestimmtheit und Weltbild**	Quantenobjekte	15
8	**Atome leuchten in ihren eigenen Farben**	Atomvorstellungen	17
9	**Elektronen im Kasten – der Potenzialtopf**	Atomvorstellungen	19
10	**Röntgenstrahlung – Bremsen und Springen**	Atomvorstellungen	21

Dieses Begleitdokument fasst die Lernumgebung **Köllns Quantenwelt** (Lerntresen.de/quantenphysik) zusammen. Die Verweise „(→ Abschnitt *n*)" hinter den Überschriften führen zum passenden Abschnitt der jeweiligen Einheit in der Lernumgebung.

„Köllns Quantenwelt – Begleitdokument" von Martin Kölln, 2026, Lerntresen.de/quantenphysik. Dieses Werk ist lizenziert unter der Creative-Commons-Lizenz **Namensnennung – Nicht kommerziell – Weitergabe unter gleichen Bedingungen 4.0 International (CC BY-NC-SA 4.0)**. Lizenztext: creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.de.
Du darfst das Material vervielfältigen, weitergeben und bearbeiten, wenn du Urheber und Lizenz nennst, Änderungen kenntlich machst, es nicht kommerziell nutzt und Bearbeitungen unter derselben Lizenz weitergibst.
Bilder: KI-generiert (Magnific) bzw. eigene Grafiken. Texte und Grafiken entstanden mit Unterstützung der KI Claude (Anthropic). Schriften: Fira Sans und Shrikhand (SIL Open Font License). Lizenzlogo: Creative Commons.

h·f

Licht kommt in Portionen – das Photon

Licht ist eine Welle – und trotzdem kommt es in einzelnen Energieportionen an. Wie passt das zusammen?

Warum sind Nachtfotos so „krisselig“?

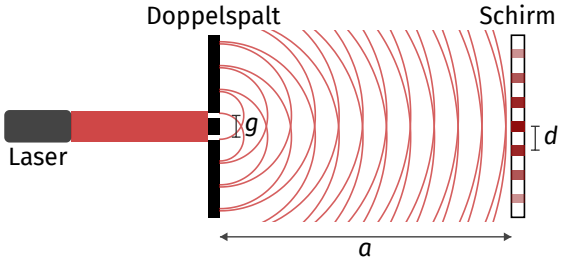
Mach im fast dunklen Zimmer ein Foto mit dem Smartphone: Das Bild wirkt körnig. Der Grund ist nicht (nur) eine schlechte Kamera. Der Bildsensor zählt das ankommende Licht – und im Dunkeln kommen so wenige **Lichtportionen** an, dass man ihre Zufälligkeit sieht: Ein Pixel bekommt zufällig drei Portionen ab, sein Nachbar nur eine (*Photonenrauschen*). Diese Lichtportionen – die **Photonen** – sind der Startpunkt der Reise in die Quantenwelt. Ob im Bildsensor einer Kamera oder in einer Solarzelle: Überall dort wird Licht Photon für Photon absorbiert und in ein elektrisches Signal umgewandelt.

1 Licht als Welle – das kennst du schon (→ Abschnitt 1)

Das Wellenmodell erklärt die *Ausbreitung* von Licht: Beugung, Polarisation und **Interferenz**. Am Doppelspalt geht von jedem Spalt eine Welle aus; dahinter überlagern sich beide:

- Wellenberg trifft auf Wellenberg: **heller Streifen** (konstruktive Interferenz).
- Wellenberg trifft auf Wellental: **dunkler Streifen** (destruktive Interferenz).

Gerade die dunklen Stellen sind bemerkenswert: Dort ist es dunkel, *obwohl* Licht aus zwei Spalten dorthin gelangen könnte. Das lässt sich nur mit Wellen erklären.



Doppelspalt (schematisch): Spaltabstand g, Abstand zum Schirm a, Abstand benachbarter heller Streifen d.

$$\lambda = \frac{g \cdot d}{a}$$

Wellenlänge aus dem Doppelspaltversuch (Kleinwinkelnäherung)

2 Ganz schwaches Licht: Photonen werden einzeln nachgewiesen (→ Abschnitt 2)

Bei sehr schwachem Licht und sehr empfindlichen Detektoren (z. B. **Photomultiplier**) beobachtet man hinter dem Doppelspalt:

- **Einzelne, punktförmige Ereignisse** („Klicks“) – nie ein schwaches, gleichmäßiges Leuchten.
- Jedes Ereignis überträgt eine **feste Energieportion** (bei gegebener Farbe).
- Wo der nächste Punkt erscheint, ist **nicht vorhersagbar**.
- Nach sehr vielen Ereignissen entsteht **das Interferenzmuster**.

Auch das Auge zählt Photonen: Die Stäbchen der Netzhaut reagieren schon auf einzelne Photonen; wahrgenommen wird ein Lichtblitz aber erst ab etwa zehn Photonen, die fast gleichzeitig auftreffen.

MERKE

Die Energieportionen heißen **Photonen** (**Lichtquanten**). Licht wird in Form von Photonen *nachgewiesen*: lokal, in festen Energieportionen, zu zufälligen Zeitpunkten und an zufälligen Orten. Die *Verteilung* vieler Nachweise wird dagegen durch ein Wellenmodell richtig vorhergesagt.

VERDACHT?!

„Ein Photon ist ein winziges Lichtkügelchen.“
Nein – ein Photon ist ein **Quantenobjekt**, weder klassisches Teilchen noch klassische Welle.

3 Die Energie eines Photons: E = h · f (→ Abschnitt 3)

Versuch mit Fotopapier: Unter einem blauen Filter wird Fotopapier geschwärzt, unter einem roten nicht – auch bei sehr hellem rotem Licht. Ein Körnchen nimmt immer die Energie *eines* Photons auf: Ein blaues Photon hat genug Energie, ein rotes nicht.

Die Photonenenergie ist **proportional zur Frequenz**: je **kürzer die Wellenlänge**, desto **größer die Energie**.

$$E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

Energie eines Photons

Planck’sches Wirkungsquantum:
$h = 6{,}626 \cdot 10^{-34}$ J·s = $4{,}136 \cdot 10^{-15}$ eV·s
Elektronenvolt: 1 eV = $1{,}602 \cdot 10^{-19}$ J. Sichtbares Licht: ca. 1,6 eV (rot) bis 3,3 eV (violett).

3 Die Energie eines Photons: E = h · f (Fortsetzung) (→ Abschnitt 3)

Strahlung	typ. Wellenlänge	Photonenenergie	Was kann ein Photon bewirken?
UKW-Radio	3 m	≈ $4 \cdot 10^{-7}$ eV	nur viele zusammen: Signal in der Antenne
Infrarot	1500 nm	≈ 0,8 eV	Moleküle in Schwingung versetzen
rotes / blaues Licht	700 nm / 450 nm	≈ 1,8 eV / 2,8 eV	Sehzellen anregen; blau: Fotopapier schwärzen
UV-C	250 nm	≈ 5 eV	Bindungen brechen, Elektronen auslösen
Röntgenstrahlung	0,1 nm	≈ 12 000 eV	Atome ionisieren, Gewebe durchdringen

Photonen haben einen Impuls

Photonen übertragen nicht nur Energie, sondern auch Impuls. Trifft Licht auf einen Körper, entsteht dadurch eine sehr kleine Kraft, der **Strahlungsdruck**. Ein Photon hat keine Masse; sein Impuls folgt aus seiner Energie:

$$p = \frac{E}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Impuls eines Photons (→ Einheit 4)

4 Wie viele Photonen? Leistung und Photonenstrom (→ Abschnitt 5)

Ein Strahl der Leistung P transportiert pro Sekunde die Energie $P \cdot 1\,\text{s}$, jedes Photon davon $E = h \cdot f$. Für den **Photonenstrom** gilt:

$$N = \frac{P}{E} = \frac{P \cdot \lambda}{h \cdot c}$$

Photonen pro Sekunde

MERKE

- Die **Frequenz** (Farbe) bestimmt die Energie *eines* Photons.
- Die **Intensität** (Helligkeit) bestimmt die *Anzahl* der Photonen pro Zeit und Fläche.

5 Experiment: h mit Leuchtdioden bestimmen (→ Abschnitt 6)

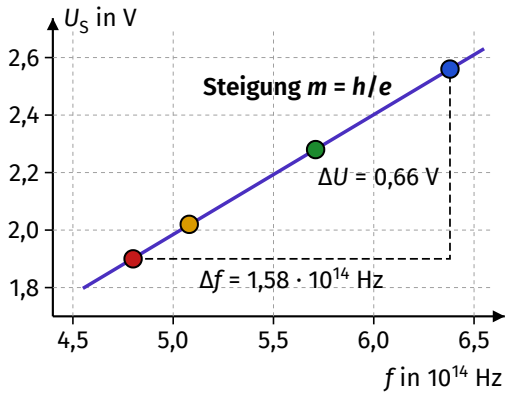
Eine LED leuchtet erst ab der **Schwellenspannung** U_S. Jedes Elektron nimmt dabei die Energie $e \cdot U_S$ auf und gibt sie als **genau ein Photon** wieder ab:

$$e \cdot U_S \approx h \cdot f \;\Rightarrow\; U_S = \frac{h}{e} \cdot f$$

Steigung im f-U_S-Diagramm: $m = h/e \Rightarrow h = e \cdot m$

LED	λ in nm	f in 10^{14} Hz	U_S in V
blau	470	6,38	2,56
grün	525	5,71	2,28
gelb	590	5,08	2,02
rot	625	4,80	1,90

Nur ungefähr genau: Der Einsatz des Leuchtens ist schwer exakt zu erkennen, und die Elektronen haben Energien in einem gewissen Bereich; typisch sind 5–15 % Abweichung.



Messwerte (idealisiert) mit Ausgleichsgerade. Ein für alle LEDs gleicher Versatz der Schwellenspannung ändert die Steigung nicht – daher ist die Steigungsmethode zuverlässiger als eine einzelne LED.

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

Photonenenergie (grünes Licht, λ = 532 nm)

Ansatz: $E = h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$

$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\,\text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\,\text{m/s}}{532 \cdot 10^{-9}\,\text{m}} \approx \mathbf{3{,}74 \cdot 10^{-19}\,J}$

in eV: $\frac{3{,}74 \cdot 10^{-19}\,\text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{J/eV}} \approx \mathbf{2{,}33\,eV}$

Photonenstrom (λ = 650 nm, P = 1,0 mW)

Ansatz: $N = \frac{P}{E}$ mit $E = \frac{h \cdot c}{\lambda} \approx 3{,}06 \cdot 10^{-19}$ J

$N = \frac{1{,}0 \cdot 10^{-3}\,\text{J/s}}{3{,}06 \cdot 10^{-19}\,\text{J}} \approx \mathbf{3{,}3 \cdot 10^{15}}$ Photonen pro Sekunde

Doppelspalt (g = 0,25 mm, a = 3,0 m, d = 7,8 mm)

Ansatz: $\lambda = \frac{g \cdot d}{a}$ (Kleinwinkelnäherung)

$\lambda = \frac{0{,}25 \cdot 10^{-3}\,\text{m} \cdot 7{,}8 \cdot 10^{-3}\,\text{m}}{3{,}0\,\text{m}} = 6{,}5 \cdot 10^{-7}\,\text{m} = \mathbf{650\,nm}$

***h* aus der Steigung** (blaue und rote LED)

Ansatz: $m = \frac{\Delta U_S}{\Delta f} = \frac{h}{e} \Rightarrow h = e \cdot m$

$m = \frac{2{,}56\,\text{V} - 1{,}90\,\text{V}}{(6{,}38 - 4{,}80) \cdot 10^{14}\,\text{Hz}} \approx 4{,}18 \cdot 10^{-15}\,\text{V s}$

$h = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,\text{C} \cdot 4{,}18 \cdot 10^{-15}\,\text{V s} \approx \mathbf{6{,}7 \cdot 10^{-34}\,J s}$

e^-

Der Fotoeffekt – Licht schlägt Elektronen heraus

Warum rotes Licht – egal wie hell – keine Elektronen aus Zink löst, UV-Licht aber sofort. Und warum das Wellenmodell daran scheitert.

Strom aus Licht

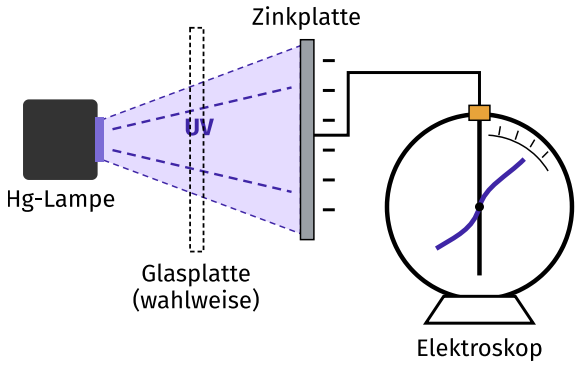
Jedes Solarmodul wandelt Licht direkt in elektrische Energie um – ohne Turbine, ohne bewegliche Teile. Dahinter steckt der **Fotoeffekt** (genauer: der *innere* Fotoeffekt im Halbleiter): Licht gibt seine Energie an Elektronen ab. Derselbe Effekt steckt in Lichtschranken, in Restlichtverstärkern von Nachtsichtgeräten und in den Photomultipliern der Teilchenphysik. Für seine Erklärung erhielt Albert Einstein 1921 den Nobelpreis – nicht für die Relativitätstheorie!

1 Der Hallwachs-Versuch (→ Abschnitt 1)

1888 untersuchte Wilhelm Hallwachs, wie Licht auf eine elektrisch geladene Metallplatte wirkt.

Aufbau: Eine frisch geschmirgelte **Zinkplatte** sitzt auf einem **Elektroskop**; Platte, Stange und Zeiger sind leitend verbunden. Je größer die Ladung, desto größer der Zeigerausschlag; nimmt die Ladung ab, geht der Zeiger zurück.

Beleuchtet wird mit einer **Quecksilberdampflampe**, deren Licht einen großen Anteil **ultravioletter Strahlung (UV)** enthält. Zum Vergleich gibt es eine sehr helle Rotlichtlampe; zusätzlich kann eine **Glasplatte** in den Lichtweg gestellt werden.



Versuchsaufbau des Hallwachs-Versuchs (negativ geladene Zinkplatte)

Beobachtung und Deutung – Schritt für Schritt

Versuch	Beobachtung	Deutung
negativ geladen, UV-Licht	Ausschlag geht zurück	Die Platte verliert negative Ladung: Das Licht löst **Elektronen** aus der Zinkoberfläche, die von der negativen Platte abgestoßen werden und davonfliegen.
positiv geladen, UV-Licht	Ausschlag bleibt gleich	Auch hier werden Elektronen ausgelöst, aber die positive Platte zieht sie sofort zurück. (Es werden also negative Ladungen ausgelöst.)
Glasplatte im Strahlengang	Ausschlag bleibt gleich	Glas lässt sichtbares Licht durch, *absorbiert aber UV*. Es ist also der UV-Anteil, der die Elektronen herauslöst.
sehr helles **rotes** Licht	nichts passiert	Die Helligkeit allein reicht nicht; es kommt auf die Frequenz des Lichts an.
UV-Licht, **größere Intensität**	schnellere Entladung	Mehr Licht löst pro Sekunde mehr Elektronen heraus.

MERKE

Das Herauslösen von Elektronen aus einer Metalloberfläche durch Licht heißt **äußerer fotoelektrischer Effekt** (kurz: **Fotoeffekt**). Bei Zink tritt er nur mit UV-Licht auf – nicht mit sichtbarem Licht, egal wie hell es ist.

Erklärung mit Photonen: Für das Herauslösen eines Elektrons ist ein bestimmter Mindestbetrag an Energie nötig. Nur die Photonen des UV-Lichts tragen jeweils genug Energie, um *ein* Elektron herauszulösen. Photonen des sichtbaren Lichts sind dafür einzeln zu „schwach" – und sie können ihre Energie nicht zusammenlegen.

2 Wellenmodell gegen Experiment (→ Abschnitt 2)

Nach dem Wellenmodell trifft das Licht gleichmäßig auf die ganze Metalloberfläche. Die transportierte Energie hängt von der **Amplitude** ab, also von der Intensität. Die Elektronen würden durch das elektrische Feld der Welle zum Mitschwingen gebracht und nach und nach Energie aufnehmen. Die Vorhersagen im Vergleich mit dem Experiment stehen in der Tabelle auf der nächsten Seite.

2 Wellenmodell gegen Experiment (Fortsetzung) (→ Abschnitt 2)

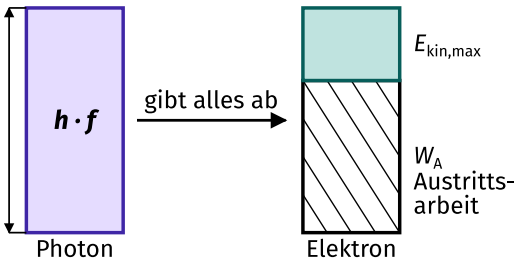
Erwartung nach dem Wellenmodell	Experimenteller Befund
Jede Lichtfarbe löst Elektronen aus, wenn die Intensität nur groß genug ist.	Unterhalb einer **Grenzfrequenz** f_G werden *nie* Elektronen ausgelöst – auch nicht bei riesiger Intensität.
Höhere Intensität ⇒ schnellere Elektronen.	Die maximale kinetische Energie hängt *nur von der Frequenz* ab, nicht von der Intensität.
Bei schwachem Licht dauert es, bis ein Elektron genug Energie „gesammelt" hat.	Die Elektronen treten *ohne messbare Verzögerung* aus (< 10^{-9} s).
—	Höhere Intensität ⇒ *mehr* Elektronen pro Sekunde (größerer Fotostrom).

Drei von drei Vorhersagen sind falsch: Das Wellenmodell versagt bei der Energieübertragung auf Elektronen.

Einsteins Lichtquantenhypothese (1905)

Licht überträgt seine Energie in Portionen $E = h \cdot f$, und **ein Photon gibt seine gesamte Energie an genau ein Elektron ab**. Das Elektron kann die Energie nicht „sammeln" – es bekommt eine ganze Portion oder gar nichts. Die Energie wird auf zwei „Konten" verteilt:

- Ein Teil wird gebraucht, um das Elektron aus dem Metall zu lösen: die **Austrittsarbeit** W_A (auch Austrittsenergie E_A). Sie hängt vom Material ab.
- Der Rest bleibt dem Elektron als kinetische Energie.



Energiebilanz: Die Photonenenergie wird auf Austrittsarbeit und kinetische Energie aufgeteilt.

$$h \cdot f = W_A + E_{kin,max}$$
Einstein'sche Gleichung für den Fotoeffekt · umgestellt: $E_{kin,max} = h \cdot f - W_A$

Warum „max"? Elektronen, die nicht direkt an der Oberfläche sitzen, verlieren auf dem Weg nach draußen noch Energie. Nur Elektronen von der Oberfläche erhalten den vollen Rest – die *maximale* kinetische Energie.

Grenzfrequenz: Ist $h \cdot f$ kleiner als W_A, ergäbe sich eine negative Bewegungsenergie – das ist unmöglich, es wird kein Elektron ausgelöst. An der Grenze gilt $h \cdot f_G = W_A$, also:

$$f_G = \frac{W_A}{h} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_G = \frac{h \cdot c}{W_A}$$
Grenzfrequenz und Grenzwellenlänge

Die Austrittsarbeit ist eine **Materialkonstante** (Werte schwanken je nach Oberfläche um einige Zehntel eV):

Metall	Cäsium	Kalium	Natrium	Zink	Kupfer	Platin
W_A in eV	1,94	2,25	2,28	4,27	4,48	5,65

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

Grenzwellenlänge von Zink (W_A = 4,27 eV)

Ansatz: An der Grenze ist die Photonenenergie gleich der Austrittsarbeit: $\frac{h \cdot c}{\lambda_G} = W_A \Rightarrow \lambda_G = \frac{h \cdot c}{W_A}$

$\lambda_G = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{4{,}27 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-7}\ \text{m} \approx$ **290 nm** (UV – deshalb wirkt sichtbares Licht nicht)

Maximale kinetische Energie
(Natrium, W_A = 2,28 eV, λ = 400 nm)

Ansatz: $E_{kin,max} = h \cdot f - W_A$ mit $h \cdot f = \frac{h \cdot c}{\lambda}$

$h \cdot f = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{400 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 4{,}97 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \approx 3{,}10\ \text{eV}$

$E_{kin,max}$ = 3,10 eV − 2,28 eV = **0,82 eV**

Maximale Geschwindigkeit
($m_e = 9{,}109 \cdot 10^{-31}$ kg)

Ansatz: $E_{kin} = ½\ m_e\ v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\ E_{kin}}{m_e}}$

E_{kin} = 0,82 eV · 1,602 · 10^{-19} J/eV ≈ 1,31 · 10^{-19} J

$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}31 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} \approx$ **5,4 · 10^5 m/s**

h/e

Den Fotoeffekt vermessen – Gegenfeldmethode und h

Wie misst man die Energie von Elektronen, die man nicht sieht? Mit einer Gegenspannung – und aus einer Geraden liest man dann die Naturkonstante h ab.

Die Zahl, an der das Kilogramm hängt

Rund 130 Jahre lang (seit 1889) war das Kilogramm ein Gegenstand: ein kleiner Zylinder aus Platin und Iridium, das *Urkilogramm*, verwahrt in einem Tresor bei Paris. Seit dem 20. Mai 2019 ist das Kilogramm über eine Naturkonstante festgelegt, die sich niemals ändert: das **Planck'sche Wirkungsquantum** *h*. Einen der ersten genauen Werte für *h* lieferte der Fotoeffekt: Robert Millikan bestimmte *h* um 1915 mit einer Fotozelle und der Gegenfeldmethode.

1 Die Gegenfeldmethode: Elektronenenergie messen (→ Abschnitt 1)

Einsteins Gleichung $h \cdot f = W_A + E_{kin,max}$ aus Einheit 2 macht eine überprüfbare Vorhersage: Die maximale kinetische Energie der Elektronen soll linear mit der Frequenz zunehmen. Dafür muss man diese Energie messen können.

Man verwendet eine **Fotozelle**: eine luftleer gepumpte Glasröhre mit zwei Elektroden. Die großflächige **Katode** ist mit einem Metall beschichtet, auf das das Licht fällt. Ihr gegenüber sitzt eine kleine, oft ringförmige **Anode**, die die herausgelösten Elektronen auffängt. Ein empfindliches Messgerät zeigt den **Fotostrom** an – also wie viele Elektronen pro Sekunde bei der Anode ankommen. Das Vakuum ist wichtig: Sonst würden die Elektronen mit Luftmolekülen zusammenstoßen und Energie verlieren.

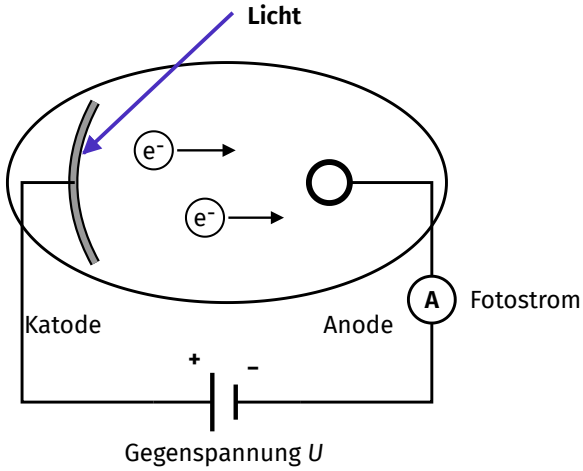
Die Idee: Elektronen „bergauf" laufen lassen. Zwischen Anode und Katode wird eine einstellbare **Gegenspannung** gelegt: Die Anode wird **negativ** gegenüber der Katode. Die Elektronen werden dann von der Anode abgestoßen und auf ihrem Weg abgebremst – wie ein Ball, der einen Hang hinaufrollt.

- Bei kleiner Gegenspannung schaffen es noch viele Elektronen bis zur Anode. Es fließt ein Fotostrom.
- Erhöht man die Gegenspannung, kommen nur noch die schnellsten Elektronen an. Der Strom wird kleiner.
- Bei der **Grenzspannung** U_G (auch Haltespannung oder U_{max}) reicht selbst die Energie der schnellsten Elektronen nicht mehr aus. Der Fotostrom wird null.

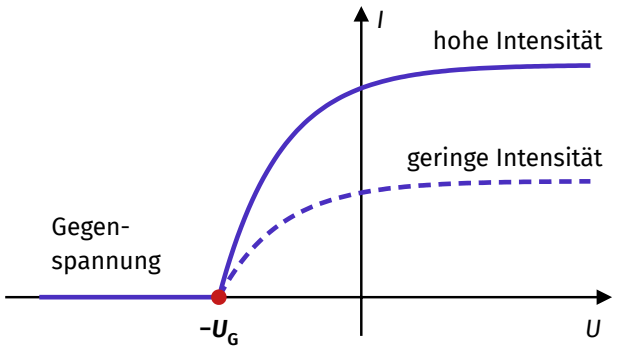
Ein Elektron verliert beim Durchlaufen der Gegenspannung U die Energie $e \cdot U$. Bei der Grenzspannung ist das genau die gesamte kinetische Energie der schnellsten Elektronen:

$$e \cdot U_G = E_{kin,max}$$

Eine Spannungsmessung ersetzt die Energiemessung.



Fotozelle mit Gegenspannung: Die Anode ist negativ gegenüber der Katode, die Elektronen laufen gegen das Feld an.



Fotostrom in Abhängigkeit von der Spannung (qualitativ): Höhere Intensität ergibt einen größeren Strom, aber dieselbe Grenzspannung.

Praktisch: Wird U_G in Volt gemessen, ist $E_{kin,max}$ in Elektronenvolt *genau derselbe Zahlenwert*. Beispiel: U_G = 1,15 V bedeutet $E_{kin,max}$ = 1,15 eV.

MERKE

Die Grenzspannung hängt nur von der Frequenz des Lichts und vom Katodenmaterial ab, **nicht von der Intensität**.

2 Das Frequenz-Grenzspannung-Diagramm: h und die Austrittsarbeit ablesen

(→ Abschnitt 2)

Aus der Gegenfeldmethode wissen wir $E_{kin,max} = e \cdot U_G$. Eingesetzt in Einsteins Gleichung:

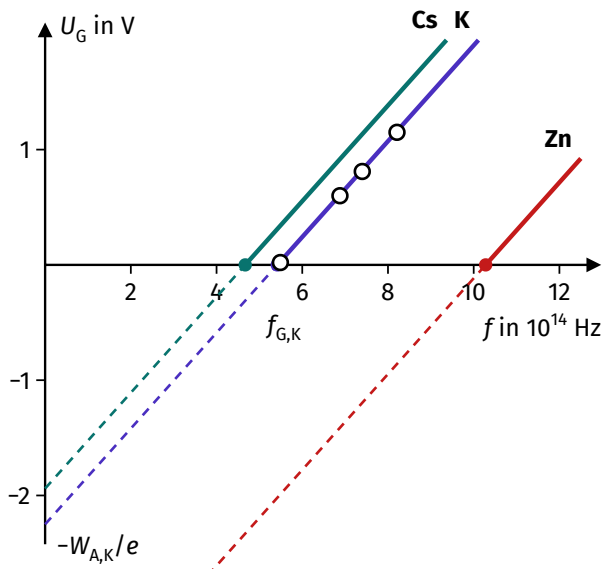
$$h \cdot f = W_A + e \cdot U_G$$

Nach U_G umgestellt (erst W_A abziehen, dann durch e teilen):

$$U_G = \frac{h}{e} \cdot f - \frac{W_A}{e}$$

Eine Geradengleichung der Form $y = m \cdot x + b$

Trägt man die Grenzspannung U_G (y-Achse) gegen die Frequenz f (x-Achse) auf, erhält man eine **Gerade**. Aus ihr lassen sich drei Größen ablesen:



Gerade für Kalium (Kreise: Messwerte unten) sowie für Cäsium und Zink. Unterhalb der Grenzfrequenz gibt es keinen Fotoeffekt; gestrichelt ist nur die *gedachte Verlängerung*.

Am Graphen	bedeutet physikalisch
Steigung m	$m = \frac{h}{e}$, also $h = e \cdot m$ – für alle Metalle gleich
Schnittpunkt mit der f-Achse	Grenzfrequenz $f_G = \frac{W_A}{h}$
verlängerte Gerade schneidet die U-Achse bei	$-\frac{W_A}{e}$: Der Betrag in Volt ist die Austrittsarbeit in eV

MERKE

Für alle Metalle ergeben sich **parallele Geraden** mit derselben Steigung h/e, weil h eine Naturkonstante ist. Die Geraden unterscheiden sich nur in der Austrittsarbeit: Je größer W_A, desto weiter rechts liegt die Grenzfrequenz. Dass der so gemessene Wert von h mit Plancks Wert übereinstimmte, war ein starker Beleg für die Lichtquantenhypothese (Millikan, 1916).

Messwerte einer Fotozelle mit Kaliumkatode (Quecksilberlinien):

λ in nm	365	405	436	546
f in 10^{14} Hz	8,21	7,40	6,88	5,49
U_G in V	1,15	0,81	0,60	0,02

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

***h* aus zwei Messpunkten**

(Kalium, 365 nm und 546 nm)

Ansatz: $m = \frac{\Delta U_G}{\Delta f} = \frac{h}{e} \Rightarrow h = e \cdot \frac{\Delta U_G}{\Delta f}$

$m = \frac{1{,}15\ \text{V} - 0{,}02\ \text{V}}{(8{,}21 - 5{,}49) \cdot 10^{14}\ \text{Hz}} \approx 4{,}15 \cdot 10^{-15}\ \text{V s}$

$h = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 4{,}15 \cdot 10^{-15}\ \text{V s} \approx \mathbf{6{,}65 \cdot 10^{-34}\ J s}$

Messunsicherheiten der Spannung wirken sich umso weniger aus, je größer der Frequenzabstand der beiden Messpunkte ist.

Austrittsarbeit (Kalium, λ = 365 nm, U_G = 1,15 V)

Ansatz: $W_A = h \cdot f - e \cdot U_G = \frac{h \cdot c}{\lambda} - e \cdot U_G$

$\frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{365 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 5{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

in eV: $\frac{5{,}45 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} \approx 3{,}40\ \text{eV}$

$W_A \approx 3{,}40\ \text{eV} - 1{,}15\ \text{eV} = \mathbf{2{,}25\ eV}$

Geschwindigkeit der schnellsten Elektronen

(U_G = 1,15 V)

Ansatz: $\frac{1}{2} m_e v^2 = e \cdot U_G \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\,e \cdot U_G}{m_e}}$

$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 1{,}15\ \text{V}}{9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg}}} \approx \mathbf{6{,}4 \cdot 10^{5}\ m/s}$

λ = h/p

Auch Elektronen interferieren – Materiewellen

Wenn Licht Teilcheneigenschaften hat – haben dann Teilchen auch Welleneigenschaften? De Broglies kühne Idee.

Bilder vom Allerkleinsten

Bilder von Coronaviren oder einzelnen Atomreihen stammen aus **Elektronenmikroskopen**; ein Lichtmikroskop kann keine Strukturen auflösen, die viel kleiner sind als die Wellenlänge des Lichts. Elektronenmikroskope nutzen eine erstaunliche Tatsache: Auch **Elektronen** verhalten sich bei der Ausbreitung wie Wellen – mit einer Wellenlänge, die tausendfach kleiner ist als die von Licht.

1 De Broglies Hypothese (→ Abschnitt 1)

Licht, das wir als Welle kennen, wird in einzelnen Portionen (Photonen) nachgewiesen, und jedes Photon hat den Impuls $p = h/\lambda$ (Einheit 1). Louis de Broglie drehte diesen Gedanken 1924 um: Zu einem Elektron mit dem Impuls $p = m \cdot v$ gehört eine Welle mit der Wellenlänge $\lambda = h/p$ – dieselbe Gleichung, nur umgestellt.

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$$

de-Broglie-Beziehung

De Broglie behauptete also: **Jedem** Objekt mit Impuls kann man eine Wellenlänge zuordnen, die **de-Broglie-Wellenlänge**. Das war zunächst nur eine Vermutung (Hypothese), die sich im Experiment bewähren musste. Ein schnelleres Elektron hat einen größeren Impuls und damit eine *kürzere* Wellenlänge.

Wellenlänge von beschleunigten Elektronen

1. Ein Elektron, das aus der Ruhe die Spannung U_B durchläuft, erhält die Bewegungsenergie $E_{kin} = e \cdot U_B$.
2. Aus $E_{kin} = \frac{1}{2}\, m\, v^2$ und $p = m\, v$ folgt $E_{kin} = \frac{p^2}{2\, m}$.
3. Gleichsetzen und nach p auflösen: $e \cdot U_B = \frac{p^2}{2\, m_e}$, also $p = \sqrt{2\, m_e\, e\, U_B}$.

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2\, m_e\, e\, U_B}}$$

gilt, solange die Elektronen viel langsamer als Licht sind (gut bis einige 10 kV)

Bei $U_B = 1{,}0$ kV ist $\lambda \approx 0{,}039$ nm – kleiner als ein Atomdurchmesser (≈ 0,1 nm) und rund 10 000-mal kleiner als die Wellenlänge von sichtbarem Licht.

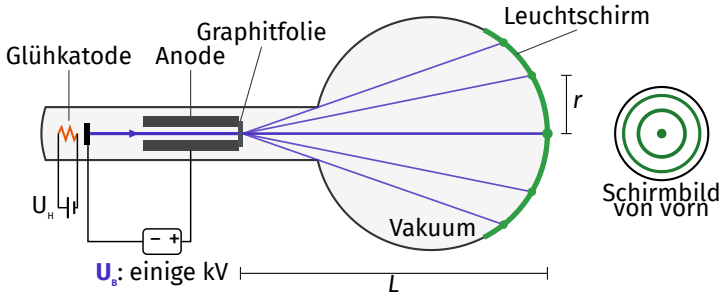
MERKE

Die de-Broglie-Beziehung verknüpft eine typische Teilchengröße (Impuls) mit einer typischen Wellengröße (Wellenlänge). Es gilt $\lambda \sim 1/\sqrt{U_B}$: Vierfache Spannung halbiert die Wellenlänge.

2 Die Elektronenbeugungsröhre (→ Abschnitt 2)

1927 wiesen Davisson und Germer (USA) sowie G. P. Thomson (Großbritannien) nach, dass Elektronen an Kristallen Interferenzmuster erzeugen. In der Schule nutzt man dafür die **Elektronenbeugungsröhre**.

1. Eine **Glühkatode** setzt Elektronen frei.
2. Die **Beschleunigungsspannung** U_B (einige Kilovolt) zwischen Katode und Anode bringt sie auf hohe Geschwindigkeit.
3. Der Strahl trifft auf eine hauchdünne Folie aus **polykristallinem Graphit** (sehr viele winzige, ungeordnet liegende Kristalle).
4. Dahinter treffen die Elektronen auf den **Leuchtschirm**.

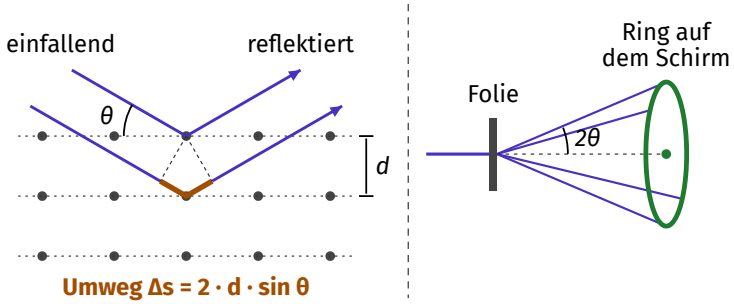


Elektronenbeugungsröhre (Seitenansicht); rechts der Schirm von vorn: heller Mittelfleck und zwei Ringe.

Beobachtung: Auf dem Schirm sieht man nicht nur einen hellen Fleck in der Mitte, sondern zusätzlich zwei **helle Ringe**. Kleine Kügelchen würden hinter einer Folie höchstens einen verwaschenen Fleck erzeugen. Ringe mit dunklen Zwischenräumen sind ein Interferenzmuster.

2 Die Elektronenbeugungsröhre (Fortsetzung) (→ Abschnitt 2)

Deutung: Reflexion an Netzebenen. Im Graphitkristall liegen die Atome in parallelen Ebenen, den **Netzebenen**, vor allem mit den Abständen d_1 = 0,213 nm und d_2 = 0,123 nm. Die Elektronenwelle wird an jeder Netzebene zu einem kleinen Teil reflektiert; der an der tieferen Ebene reflektierte Anteil legt einen längeren Weg zurück.



Links: Umweg an zwei Netzebenen. Rechts: Kristallite in allen Drehlagen ergeben einen Ring.

- Beide Anteile verstärken sich, wenn der Umweg ein Vielfaches der Wellenlänge ist: $2 \cdot d \cdot \sin\theta = k \cdot \lambda$ mit k = 1, 2, … (**Bragg-Bedingung**). Ein reflektiertes Elektron ist um den Winkel 2θ abgelenkt.
- Die vielen kleinen Kristalle sind beliebig um die Strahlachse gedreht. Zu jedem Netzebenenabstand entsteht deshalb ein ganzer **Ring**: der innere zu d_1, der äußere zu d_2.

$$\lambda \approx \frac{d \cdot r}{L}$$

r: Ringradius, L: Abstand Folie–Schirm (k = 1, Kleinwinkelnäherung)

Herleitung: $\tan 2\theta = r/L$. Für kleine Winkel gilt $\tan 2\theta \approx 2\theta$ und $\sin\theta \approx \theta$, also $\theta \approx r/(2L)$ und $\lambda = 2\,d \sin\theta \approx d \cdot r/L$.

Ergebnis: Bei höherer Beschleunigungsspannung werden die Ringe *kleiner* – wie de Broglie vorhersagt. Die aus den Ringradien bestimmte Wellenlänge stimmt mit $\lambda = h/p$ überein. Mit einem Magneten verschiebt sich das Ringmuster als Ganzes: Es stammt von *geladenen* Objekten, also wirklich von Elektronen.

3 Elektronen am Doppelspalt (→ Abschnitt 4)

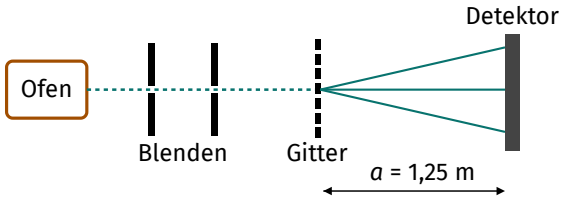
Claus Jönsson gelang 1961 in Tübingen ein Doppelspaltversuch mit Elektronen (Spaltbreite ≈ 0,3 µm). 1989 führte **Akira Tonomura** das Experiment mit so wenigen Elektronen durch, dass sich jeweils nur eines in der Apparatur befand: Jedes Elektron hinterlässt einen Punkt auf dem Schirm; erst viele Punkte zeigen die Interferenzstreifen. Das gleicht exakt dem Verhalten einzelner Photonen. Elektronen und Photonen sind beide **Quantenobjekte**.

MERKE

Weder „Teilchen“ noch „Welle“ beschreibt ein Elektron vollständig. Es wird stets *lokal* nachgewiesen, seine *Nachweiswahrscheinlichkeit* verteilt sich aber wie die Intensität einer Welle mit $\lambda = h/p$.

4 Wie groß darf ein Quantenobjekt sein? Moleküle am Gitter (→ Abschnitt 5)

Die Gruppe um **Anton Zeilinger** und **Markus Arndt** (Wien) wies 1999 Interferenz mit Fullerenen nach: fußballförmigen Molekülen aus 60 Kohlenstoffatomen (C_{60}, Durchmesser ≈ 0,7 nm). Die Moleküle verdampfen in einem Ofen bei rund 900 K, fliegen durch Blenden und ein Gitter mit 100 nm Gitterkonstante und werden 1,25 m dahinter nachgewiesen. Inzwischen interferieren sogar Moleküle aus mehr als 2000 Atomen (2019).



Vereinfachter Aufbau nach Arndt/Zeilinger (1999), nicht maßstäblich.

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

de-Broglie-Wellenlänge (U_B = 4,0 kV)

Ansatz: $e \cdot U_B = \frac{p^2}{2\,m_e} \Rightarrow p = \sqrt{2\,m_e\,e\,U_B}$

$p = \sqrt{2 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 4000\ \text{V}}$
$\approx 3{,}42 \cdot 10^{-23}\ \text{kg m/s}$

$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{3{,}42 \cdot 10^{-23}\ \text{kg m/s}} \approx$ **0,0194 nm**

Netzebenenabstand (r = 1,23 cm, L = 13,5 cm)

Ansatz: $\lambda \approx \frac{d \cdot r}{L} \Rightarrow d \approx \frac{\lambda \cdot L}{r} = \frac{0{,}0194\ \text{nm} \cdot 13{,}5\ \text{cm}}{1{,}23\ \text{cm}}$

≈ **0,213 nm**

Molekülinterferenz (C_{70}, v = 190 m/s)

Ansatz: $\lambda = \frac{h}{m \cdot v}$ mit $m = 1{,}40 \cdot 10^{-24}$ kg

$\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s}}{1{,}40 \cdot 10^{-24}\ \text{kg} \cdot 190\ \text{m/s}} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{m}$
= **0,0025 nm**

Erstes Maximum (g = 100 nm, a = 1,25 m)

Ansatz: $d \approx \frac{\lambda \cdot a}{g}$ (Kleinwinkelnäherung)

$d \approx \frac{2{,}5 \cdot 10^{-12}\ \text{m} \cdot 1{,}25\ \text{m}}{100 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx$ **3,1 · 10⁻⁵ m = 31 µm**

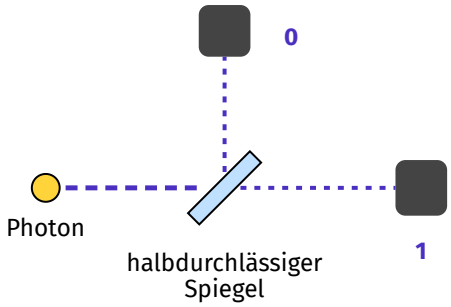
P(x)

Die Spielregeln der Quantenwelt

Zufall mit festen Regeln, Interferenz einzelner Objekte, Superposition – die Wesenszüge, die für alle Quantenobjekte gelten.

Echter Zufall – zum Kaufen

Für Verschlüsselung braucht ein Gerät **Zufallszahlen**. Ein Computer berechnet „Zufallszahlen" nach festen Regeln (**Pseudozufall**) – wer die Regel kennt, kann sie vorhersagen. Ein **Quanten-Zufallszahlengenerator** schickt dagegen einzelne Photonen auf einen **halbdurchlässigen Spiegel**. Bei jedem Photon klickt nur *einer* der beiden Detektoren (0 oder 1) – welcher, ist **prinzipiell** nicht vorhersagbar.

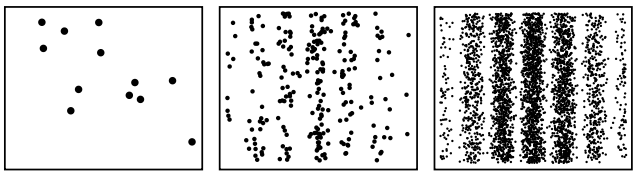


50 % : 50 % – echt zufällig

1 Ein Quantenobjekt nach dem anderen (→ Abschnitt 1)

Durch einen Doppelspalt werden Quantenobjekte – Photonen oder Elektronen – **einzeln** geschickt. Jedes Objekt erzeugt auf dem Schirm genau einen Punkt.

- Wo der nächste Punkt erscheint, lässt sich **nicht vorhersagen**.
- Wiederholt man den Versuch, landen die ersten Objekte an **anderen Stellen**.
- Erst nach vielen Objekten wird ein Muster sichtbar – und bei jeder Wiederholung entsteht **dasselbe** Interferenzmuster.



Schirmbilder nach unterschiedlich vielen einzeln nachgewiesenen Quantenobjekten (simuliert)

2 Stochastische Vorhersagbarkeit und Determiniertheit der Verteilung (→ Abschnitt 2)

Aus dem Experiment lassen sich zwei Grundregeln ablesen, die **Wesenszüge** der Quantenphysik:

WESENSZUG 1 – STOCHASTISCHE VORHERSAGBARKEIT

Für das Verhalten eines *einzelnen* Quantenobjekts lassen sich im Allgemeinen nur **Wahrscheinlichkeitsaussagen** machen. Einzelne Messergebnisse (z. B. Auftreffort, Zeitpunkt einer Emission) sind zufällig.

„Stochastisch" heißt: vom Zufall bestimmt, aber mit festen Wahrscheinlichkeiten. Man kann sagen: „Mit 12 % Wahrscheinlichkeit landet das Elektron in diesem Streifen" – aber nicht, ob es das nächste Elektron tatsächlich tut.

WESENSZUG 2 – DETERMINIERTHEIT DER ZUFALLSVERTEILUNG

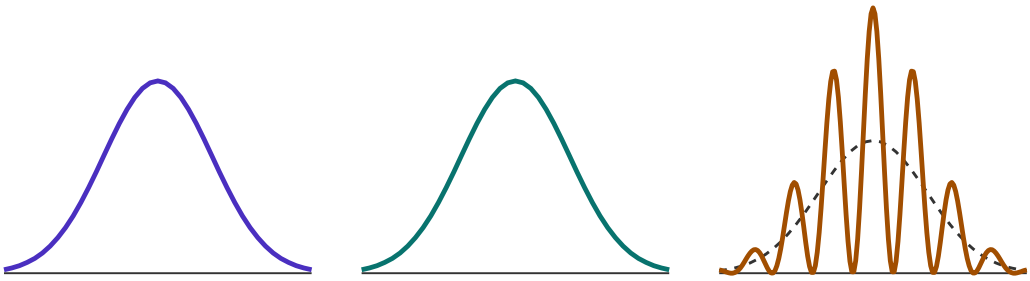
Die **Verteilung** der Ergebnisse vieler gleich präparierter Quantenobjekte ist durch die Versuchsbedingungen festgelegt (determiniert) und reproduzierbar.

„Determiniert" heißt: festgelegt. Derselbe Aufbau liefert immer dieselbe Verteilung. Ändert man den Aufbau (z. B. den Spaltabstand), ändert sich die Verteilung in vorhersagbarer Weise.

Echter Zufall: Der Zufall in der Quantenphysik ist nach heutigem Wissen **nicht** auf fehlende Information zurückzuführen (anders als beim Würfeln). Es gibt keine „verborgenen" Eigenschaften, die den Auftreffort schon vorher festlegen.

3 Interferenz einzelner Quantenobjekte und Superposition (→ Abschnitt 4)

Am Doppelspalt gibt es zwei klassisch denkbare Möglichkeiten, zum Schirm zu gelangen: durch Spalt 1 oder durch Spalt 2. Die Kurven zeigen für drei Messungen, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Quantenobjekt an welcher Stelle nachgewiesen wird:



nur Spalt 1 offen: P_1 nur Spalt 2 offen: P_2 beide offen: $P \neq P_1 + P_2$

waagerecht: Ort auf dem Schirm · senkrecht: Nachweiswahrscheinlichkeit

Gestrichelt: die Summe $P_1 + P_2$, die man für klassische Teilchen erwarten würde. Gemessen wird ein Interferenzmuster.

Mit beiden offenen Spalten gibt es Stellen, an denen *weniger* ankommt als mit nur einem offenen Spalt – an manchen Stellen *gar nichts*. Für Kügelchen wäre das unmöglich. Man beschreibt das so: Der Zustand des Quantenobjekts ist eine **Superposition** (Überlagerung) der beiden Möglichkeiten „durch Spalt 1" und „durch Spalt 2". Keine der beiden ist verwirklicht – beide zusammen bestimmen, wo das Objekt nachgewiesen werden kann.

Maxima und Minima berechnet man wie in der Wellenoptik mit dem Gangunterschied Δs und der (de-Broglie-)Wellenlänge. Neu ist die Deutung: Das Muster gibt die **Wahrscheinlichkeit** an, ein einzelnes Quantenobjekt an einer Stelle nachzuweisen.

$$\text{Maxima: } \Delta s = k \cdot \lambda$$

$$\text{Minima: } \Delta s = (2k + 1) \cdot \frac{\lambda}{2}$$

WESENSZUG 3 – FÄHIGKEIT ZUR INTERFERENZ

Ein einzelnes Quantenobjekt kann Interferenz zeigen, wenn es für ein Messergebnis **mehrere klassisch denkbare Möglichkeiten** gibt und diese **prinzipiell nicht unterscheidbar** sind.

VERDACHT?!

„Das Elektron geht durch beide Spalte gleichzeitig." – „Das Elektron geht durch einen Spalt, wir wissen nur nicht, durch welchen." *Beide* Sätze sind irreführend: Das Elektron wird immer nur als Ganzes nachgewiesen, und der zweite Satz würde das falsche Ergebnis $P_1 + P_2$ liefern. **Fachlich korrekt:** „Es lässt sich nicht sagen, durch welchen Spalt das Elektron gegangen ist; der Zustand ist eine Superposition beider Möglichkeiten."

4 VERDACHT?! Typische Fehlvorstellungen – und was stattdessen gilt (→ Abschnitt 8)

Verbreitete Vorstellung	Fachlich angemessen
Ein Elektron ist eine winzige Kugel, die auf einer Bahn fliegt.	Einem Quantenobjekt kann man (ohne Messung) im Allgemeinen keine Bahn zuschreiben.
Ein Elektron ist mal Teilchen, mal Welle („Dualismus").	Es ist immer ein Quantenobjekt. Je nach Experiment ist ein Teilchen- oder ein Wellen*modell* zur Beschreibung nützlich.
Die Welle ist ein schwingendes Medium, in dem das Elektron surft.	Die Welle (Wellenfunktion) beschreibt Nachweiswahrscheinlichkeiten; sie ist nicht direkt messbar (Einheit 7).
Die Interferenz entsteht durch Stöße vieler Elektronen miteinander.	Interferenz tritt auch auf, wenn die Elektronen einzeln durch die Apparatur gehen.
Quantenzufall = Messungenauigkeit.	Der Zufall ist prinzipiell; nur die Verteilung ist determiniert.

MZI

Welcher Weg? Komplementarität und Quantenradierer

Sobald man herausfinden könnte, welchen Weg ein Photon genommen hat, verschwindet die Interferenz. Selbst wenn niemand hinschaut.

Abhörsichere Kommunikation

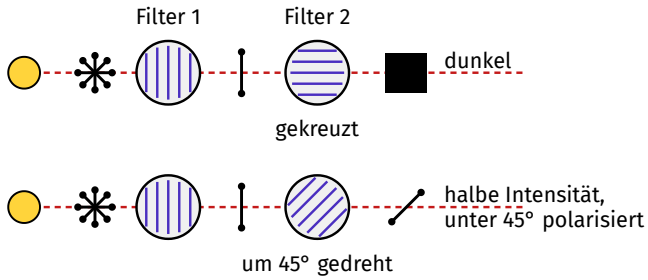
Bei der **Quantenkryptographie** wird ein geheimer Schlüssel mit einzelnen Photonen übertragen. Jeder Lauschangriff ist eine *Messung* und verändert den Zustand der Photonen. Am deutlichsten zeigt sich das am Gegensatz zwischen **Weginformation** und **Interferenz**.

1 Polarisation von Licht – kurz erklärt (→ Abschnitt 1)

Licht ist eine **Transversalwelle**: Das elektrische Feld schwingt senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Bei Licht aus einer Glühlampe oder von der Sonne wechselt die Schwingungsrichtung ständig und regellos: Das Licht ist **unpolarisiert**. Schwingt das Feld immer in derselben Richtung, heißt das Licht **linear polarisiert**.

Ein **Polarisationsfilter** (Polfilter) lässt nur den Anteil des Lichts durch, der in seiner *Durchlassrichtung* schwingt; dahinter ist das Licht in dieser Richtung polarisiert. Von unpolarisiertem Licht kommt die Hälfte der Intensität durch.

- **Durchlassrichtungen parallel:** Das polarisierte Licht kommt vollständig durch den zweiten Filter.
- **Durchlassrichtungen senkrecht** („gekreuzte" Filter): Es kommt kein Licht durch.
- **Zweiter Filter um 45° gedreht:** Die Hälfte kommt durch; danach ist das Licht unter 45° polarisiert.



Unpolarisiertes Licht, nach Filter 1 senkrecht polarisiert. Entscheidend ist der Winkel zwischen den Durchlassrichtungen.

MERKE

Senkrecht zueinander polarisierte Lichtanteile interferieren nicht miteinander. Deshalb kann man mit Polfiltern den Weg eines Photons *markieren*: Die Polarisation verrät dann den Weg.

2 Weginformation zerstört Interferenz (→ Abschnitt 3)

Ein **Welcher-Weg-Detektor** ist jede Vorrichtung, die an einem Spalt eine **Spur** hinterlässt, wenn dort ein Quantenobjekt vorbeikommt – ohne es aufzuhalten. Beispiele:

- **Elektronen:** Man beleuchtet den Bereich hinter den Spalten. Ein vorbeifliegendes Elektron streut ein Photon – ein Lichtblitz zeigt den Spalt an.
- **Photonen:** Hinter Spalt 1 ein Polfilter mit senkrechter, hinter Spalt 2 einer mit waagerechter Durchlassrichtung. Die Polarisation verrät den Spalt.

Ergebnis: Mit eingeschalteten Detektoren verschwinden die Interferenzstreifen. Übrig bleibt eine breite Verteilung ohne Minima – die Summe der Einzelspalt-Verteilungen: $P = P_1 + P_2$. Entscheidend ist nicht ein „Anrempeln", sondern allein, dass eine Spur entsteht, aus der man den Weg ablesen *könnte*.

WESENSZUG 4 – KOMPLEMENTARITÄT

Weginformation („welcher Weg?") und **Interferenzfähigkeit** schließen sich gegenseitig aus. Liegt (prinzipiell) Weginformation vor, gibt es keine Interferenz. Gibt es Interferenz, kann keine Weginformation vorliegen.

Superposition: Keine Weginformation. Der Zustand ist eine Überlagerung beider Möglichkeiten. Es gibt *Interferenz*: $P \neq P_1 + P_2$.

Gemisch: Jedes Objekt hat einen bestimmten Weg genommen (oder trägt eine Markierung). Es gibt *keine Interferenz*: $P = P_1 + P_2$.

3 Die vier Wesenszüge auf einen Blick (→ Abschnitt 4)

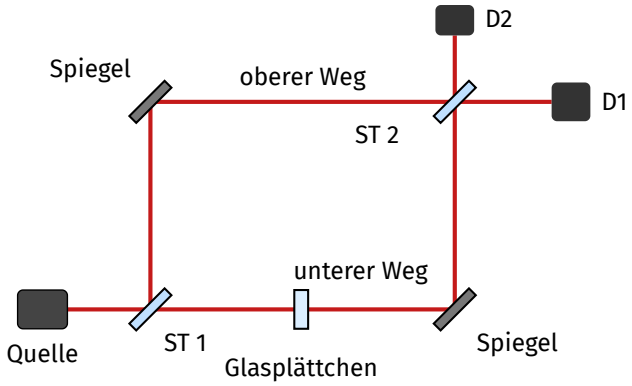
Wesenszug	Was er besagt	Daran erkennst du ihn im Experiment
1 · Stochastische Vorhersagbarkeit	Für ein *einzelnes* Quantenobjekt gibt es nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Wo und wann es nachgewiesen wird, ist zufällig.	Einzelne Auftreffpunkte erscheinen an unvorhersehbaren Stellen; die Zählrate eines Detektors schwankt.
2 · Determiniertheit der Zufallsverteilung	Die *Verteilung* vieler gleich präparierter Quantenobjekte ist durch den Versuchsaufbau festgelegt und reproduzierbar.	Bei vielen Objekten entsteht immer wieder dasselbe Muster; ändert man den Aufbau, ändert es sich vorhersagbar.
3 · Fähigkeit zur Interferenz	Ein einzelnes Quantenobjekt kann interferieren, wenn es mehrere klassisch denkbare Möglichkeiten gibt, die *prinzipiell nicht unterscheidbar* sind (Superposition).	Auch bei sehr geringer Intensität – einzeln nacheinander – baut sich ein Interferenzmuster mit Minima auf.
4 · Komplementarität	Weginformation und Interferenzfähigkeit schließen sich aus. Schon die *prinzipielle* Möglichkeit, den Weg zu kennen, zerstört die Interferenz.	Mit Welcher-Weg-Detektor (oder Markierung per Polfilter) verschwinden die Streifen: $P = P_1 + P_2$.

So argumentierst du: Beobachtung beschreiben (einzelnes Objekt, viele Objekte) – Wesenszug benennen – Bedingung prüfen (Möglichkeiten unterscheidbar? Weginformation?) – Folgerung ziehen (Interferenz ja oder nein, und warum?).

4 Das Mach-Zehnder-Interferometer (→ Abschnitt 5)

Das **Mach-Zehnder-Interferometer (MZI)** hat genau **zwei Wege** und **zwei Ausgänge**.

1. **Strahlteiler ST 1** (halbdurchlässiger Spiegel) lässt die Hälfte des Lichts durch (unterer Weg) und reflektiert die andere Hälfte (oberer Weg).
2. Auf jedem Weg lenkt ein **Spiegel** das Licht zum zweiten Strahlteiler.
3. **ST 2** mischt die beiden Wege: Dahinter kann man nicht mehr erkennen, aus welchem Weg das Licht stammt.
4. Die **Detektoren D1 und D2** zählen die Photonen.



Das Mach-Zehnder-Interferometer von oben (ST: Strahlteiler).

Interferenz am Ausgang: Hinter ST 2 überlagern sich die Anteile beider Wege. Das Interferometer ist so justiert, dass sie sich am Ausgang zu D1 **verstärken** und am Ausgang zu D2 **auslöschen**: Alles Licht kommt bei D1 an. Ein leicht gekipptes **Glasplättchen** in einem Weg verändert den Gangunterschied. Dann kann alles Licht bei D2 ankommen oder sich auf beide Detektoren verteilen.

Einzelne Photonen: Schickt man die Photonen einzeln durch das justierte MZI, landen *alle* bei D1, obwohl jedes einzeln unterwegs war. Würde jedes Photon genau einen Weg nehmen, müsste die Hälfte bei D2 ankommen. Jedes Photon „interferiert mit sich selbst“: Sein Zustand ist eine Superposition beider Wege.

KOMPLEMENTARITÄT IM MZI
Blockiert man einen Weg oder markiert die Wege mit senkrecht zueinander stehenden Polfiltern, liegt Weginformation vor. Dann verteilen sich die Photonen zu gleichen Teilen auf D1 und D2: Die Interferenz ist verschwunden.

|ψ|²

Wellenfunktion, Unbestimmtheit und Weltbild

Was die Wellenfunktion bedeutet, warum Ort und Impuls nie gleichzeitig scharf sind – und was das mit Realität und Zufall macht.

Nobelpreis für „spukhafte Fernwirkung“

2022 erhielten Alain Aspect, John Clauser und Anton Zeilinger den Physik-Nobelpreis. Sie hatten mit **verschränkten** Photonenpaaren gezeigt, dass die Natur Zusammenhänge kennt, die sich mit unseren Alltagsvorstellungen von „Wirklichkeit“ und „Ort“ nicht erklären lassen. Heute sind genau diese Effekte die Grundlage von **Quantencomputern** und **Quantenkommunikation**.

1 Die Wellenfunktion und ihr Betragsquadrat (→ Abschnitt 1)

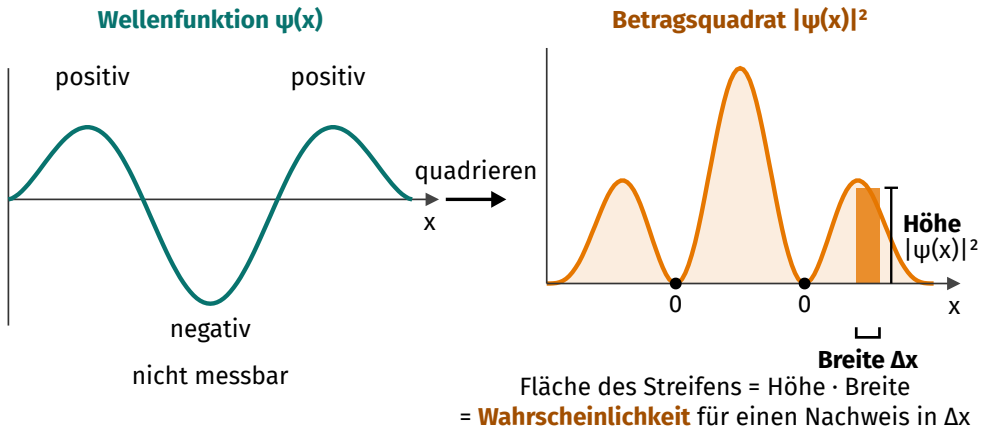
Die Verteilung vieler Nachweise am Doppelspalt sieht aus wie das Intensitätsmuster einer Welle; dort ist die Intensität proportional zum Quadrat der **Amplitude**. Die Quantenphysik fasst die Information für *alle* Orte in einer Funktion zusammen, der **Wellenfunktion** $\psi(x)$ (Erwin Schrödinger, 1926). Zu jedem Ort x gehört ein Wert $\psi(x)$ – so wie zu jedem Ort einer Welle eine Amplitude gehört.

Max Born erkannte: $\psi(x)$ selbst ist *keine* Wahrscheinlichkeit. Erst das Betragsquadrat $|\psi(x)|^2$ gibt an, wie „dicht“ die Nachweiswahrscheinlichkeit an der Stelle x ist: die **Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte**. Für eine Wahrscheinlichkeit braucht man zusätzlich die Breite eines Bereichs – wie bei der Bevölkerungsdichte: Erst „Einwohner pro km² mal Fläche“ ergibt eine Anzahl.

$$P \approx |\psi(x)|^2 \cdot \Delta x$$

Wahrscheinlichkeit, das Quantenobjekt in einem kleinen Intervall der Breite Δx an der Stelle x nachzuweisen

- **ψ selbst kann man nicht messen.** Messen kann man nur Nachweise – und wie häufig sie an einer Stelle auftreten, bestimmt $|\psi(x)|^2$. $\psi(x)$ kann positive und negative Werte annehmen. Das Vorzeichen ist wichtig, wenn sich zwei Anteile überlagern: Ein positiver und ein gleich großer negativer Anteil heben sich auf – destruktive Interferenz.
- **Das Betragsquadrat ist nie negativ** – negative Wahrscheinlichkeiten gibt es nicht. Wo $|\psi(x)|^2 = 0$ ist, wird das Quantenobjekt nie nachgewiesen (beim Doppelspalt: die Minima).
- **Irgendwo wird das Objekt sicher gefunden.** Die Wahrscheinlichkeiten aller kleinen Intervalle ergeben zusammen 1 (100 %): Die gesamte Fläche unter der Kurve $|\psi(x)|^2$ ist 1. Die Wellenfunktion ist **normiert**.

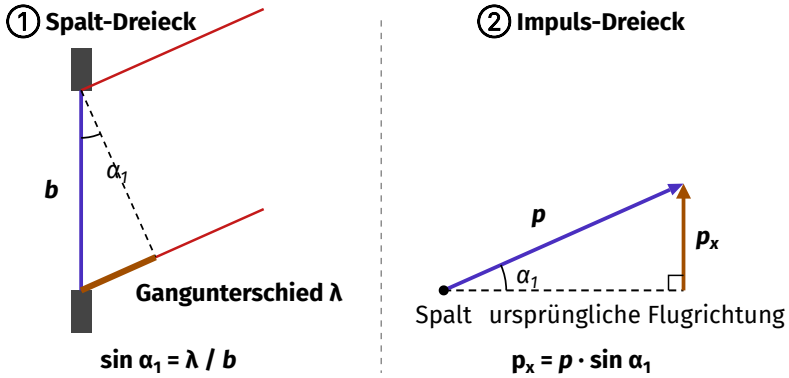


Links: Die Wellenfunktion hat positive und negative Bereiche. Rechts: Ihr Betragsquadrat ist überall ≥ 0. Der markierte Streifen hat die Breite Δx und die Höhe $|\psi(x)|^2$; seine **Fläche** gibt an, wie wahrscheinlich ein Nachweis in genau diesem Bereich ist.

2 Die Ort-Impuls-Unbestimmtheit (→ Abschnitt 2)

Schickt man Quantenobjekte durch einen schmalen Spalt der Breite b, ist ihr Ort quer zum Strahl (Richtung x) bis auf die Spaltbreite bekannt: $\Delta x = b$. Doch hinter dem Spalt laufen sie durch **Beugung** fächerförmig auseinander: Sie erhalten einen Impulsanteil p_x quer zur ursprünglichen Richtung. Welchen Wert ein einzelnes Objekt bekommt, ist nicht vorhersagbar; man kennt nur den Bereich Δp_x, in dem die Werte streuen. **Je schmaler der Spalt, desto breiter wird das Beugungsbild** – und desto größer Δp_x.

2 Die Ort-Impuls-Unbestimmtheit (Fortsetzung) (→ Abschnitt 2)



Fast alle Objekte landen im Hauptmaximum, also zwischen $-\alpha_1$ und $+\alpha_1$.

1. **Spalt-Dreieck:** $\sin \alpha_1 = \lambda / b$
2. **Impuls-Dreieck:** $\Delta p_x \approx p \cdot \sin \alpha_1$
3. Mit $p = h/\lambda$: $\Delta p_x \approx \frac{h}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{b} = \frac{h}{b}$ – λ kürzt sich heraus.
4. Mit $\Delta x = b$: $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ – unabhängig von der Spaltbreite.

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation (im Abitur ohne Rechnungen)

SO DEUTEN WIR DIE UNBESTIMMTHEIT

Es ist **unmöglich, einen Zustand zu präparieren**, in dem zueinander komplementäre Größen wie Ort und Impuls (in derselben Richtung) **beide einen exakten Wert** haben.

VERDACHT?!

„Unbestimmtheit heißt: Wir können nur nicht genau genug messen." Nein – sie ist *keine Messungenauigkeit* und nicht nur eine „Störung durch die Messung". Das Quantenobjekt *besitzt* die beiden Eigenschaften gar nicht gleichzeitig scharf.

3 Realität, Lokalität, Kausalität, Determinismus (→ Abschnitt 4)

Begriff	Klassische Vorstellung	Quantenphysik
Realität	Objekte haben ihre Eigenschaften (Ort, Weg …) unabhängig von einer Messung.	Eigenschaften wie „der Weg" sind vor der Messung im Allgemeinen nicht festgelegt.
Lokalität	Wirkungen gehen nur von der unmittelbaren Umgebung aus, höchstens mit Lichtgeschwindigkeit.	Verschränkte Objekte zeigen Korrelationen, die sich nicht durch lokale, vorher festgelegte Eigenschaften erklären lassen (aber keine Signale schneller als Licht).
Kausalität	Jede Wirkung hat eine Ursache, die ihr zeitlich vorausgeht.	Gilt für die *Verteilung* (Aufbau ⇒ Verteilung), nicht für das einzelne Ergebnis.
Determinismus	Aus dem Anfangszustand folgt die Zukunft eindeutig.	Einzelergebnisse sind zufällig; determiniert ist die Entwicklung der Wellenfunktion und damit die Verteilung.

Begriffe wie *Teilchen*, *Welle* oder *Bahn* stammen aus der makroskopischen Welt. Für Quantenobjekte sind sie nur **Modelle**, die jeweils bestimmte Aspekte beschreiben – und in anderen Situationen versagen.

4 Diskutieren: Was ist ein Quantenobjekt? (→ Abschnitt 6)

Tipps für Argumentationen zur Quantenphysik:

- Trenne sauber zwischen *Einzelereignis* (zufällig) und *Verteilung* (determiniert).
- Sprich von „Nachweis" bzw. „Nachweiswahrscheinlichkeit" statt von „Aufenthalt", wenn es um Messungen geht.
- Vermeide Bahnbegriffe („fliegt durch Spalt 1") für Situationen ohne Weginformation.
- Nutze Modelle bewusst: „Im Wellenmodell lässt sich … beschreiben, im Teilchenmodell …".

MUSTERRECHNUNG

Nachweiswahrscheinlichkeit

($|\psi|^2 = 2{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{m^{-1}}$, $\Delta x = 0{,}01$ nm)

Ansatz: $P \approx |\psi(x)|^2 \cdot \Delta x$

$P \approx 2{,}0 \cdot 10^9\ \mathrm{m^{-1}} \cdot 1 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m} = 0{,}02 =$ **2 %**

E_n

Atome leuchten in ihren eigenen Farben

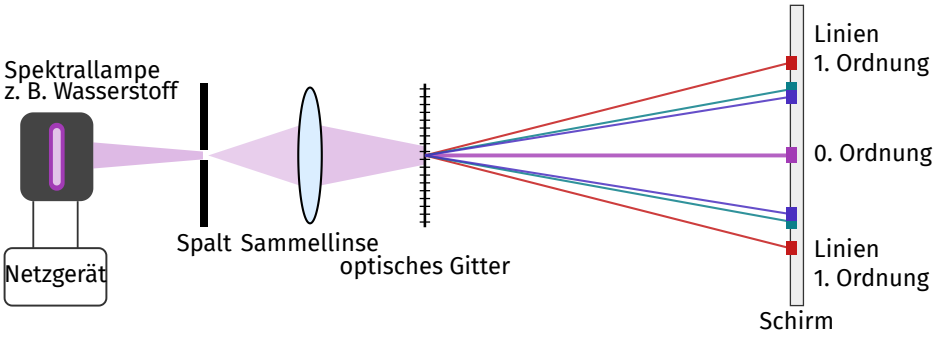
Linienspektren, Energieniveaus, Emission und Absorption, Franck-Hertz-Versuch: Wie Atome Energie nur portionsweise aufnehmen und abgeben.

Feuerwerk, Polarlicht und ein Element aus der Sonne

Das Rot im Feuerwerk stammt von Strontium, das Grün von Barium oder Kupfer, das Gelb von Natrium; Polarlichter leuchten grün und rot, weil angeregte Sauerstoffatome bestimmte Farben aussenden. Jedes Element hat seinen eigenen „Fingerabdruck“ aus Spektrallinien: 1868 entdeckten Astronomen im Sonnenlicht eine gelbe Linie, die zu keinem bekannten Element passte – so wurde **Helium** gefunden, Jahrzehnte bevor man es auf der Erde nachwies.

1 Linienspektren: Fingerabdrücke der Elemente (→ Abschnitt 1)

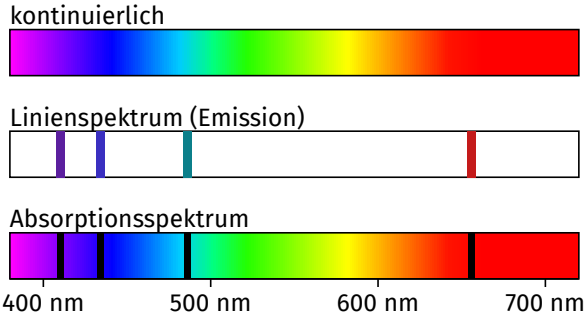
Bringt man ein Gas in einer **Gasentladungsröhre** (Spektrallampe) zum Leuchten und zerlegt das Licht mit einem Gitter, sieht man kein lückenloses Farbband, sondern einzelne, scharfe farbige Linien: ein **Linienspektrum** (diskretes Spektrum).



Aufbau zur Beobachtung eines Linienspektrums (von oben, nicht maßstäblich). Jede Wellenlänge wird unter einem anderen Winkel abgelenkt: Es entstehen einzelne farbige Bilder des Spalts, die **Spektrallinien**.

Woher der Unterschied kommt, hängt davon ab, *was* da leuchtet:

- **Kontinuierliches Spektrum:** Glühende Festkörper und dichte Gase (Glühlampe, Sonnenoberfläche) senden **alle** Wellenlängen aus – die Atome stehen eng zusammen und beeinflussen sich ständig.
- **Linienspektrum:** Leuchtende Gase geringer Dichte (einzelne Atome) senden nur **bestimmte**, für das Element charakteristische Wellenlängen aus.
- **Absorptionsspektrum:** Schickt man weißes Licht durch ein kühles Gas, fehlen genau diese Wellenlängen: dunkle Linien auf hellem Grund.



Spektren im Vergleich; Linien- und Absorptionsspektrum von Wasserstoff

2 Das Energiestufenmodell (→ Abschnitt 3)

Niels Bohr erkannte 1913, wie Linienspektren entstehen: Ein Atom kann nur in bestimmten Zuständen mit festen Energien existieren. Diese Zustände stellt man in einem **Energieniveauschema** dar.

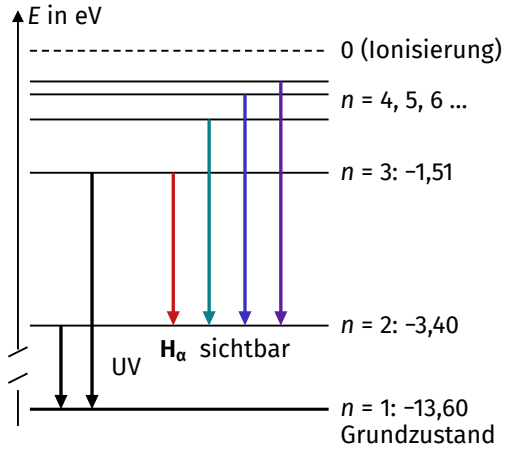
So liest du ein Energieniveauschema

- **Die senkrechte Achse ist die Energie des Atoms.** Je weiter oben eine Linie, desto mehr Energie hat das Atom.
- **Jede waagerechte Linie ist ein erlaubter Zustand** (Energieniveau). Dazwischen gibt es keine erlaubten Energien – wie auf einer Treppe.
- **Die waagerechte Richtung hat keine Bedeutung** – kein Ort, keine Bahn des Elektrons.
- **Nummerierung** von unten nach oben (n = 1, 2, 3 …); nach oben rücken die Niveaus immer enger zusammen.
- **Pfeile zeigen Übergänge:** nach oben Energieaufnahme (Anregung), nach unten Energieabgabe, meist als Photon. Die Pfeillänge ist die Energiedifferenz.

2 Das Energiestufenmodell (Fortsetzung) (→ Abschnitt 3)

- **Grundzustand:** Zustand niedrigster Energie, in dem sich ein Atom normalerweise befindet.
- **Angeregte Zustände:** Atome verlassen sie nach kurzer Zeit (typisch 10^{-8} s) unter Aussendung eines Photons; der genaue Zeitpunkt ist zufällig.
- **Ionisierungsenergie:** Mindestenergie, um ein Elektron ganz aus dem Atom zu lösen (Wasserstoff: 13,6 eV). Ein gerade freies Elektron hat $E = 0$; gebundene Zustände haben negative Energie.

$$h \cdot f = |\Delta E| = E_{\text{oben}} - E_{\text{unten}}$$
Photonenenergie bei Emission bzw. Absorption (Quantensprung)



Energieniveauschema des Wasserstoffatoms mit Übergängen: Die sichtbaren Linien enden alle auf $n = 2$ (Balmer-Serie), die Übergänge auf $n = 1$ liegen im UV.

VERDACHT?!
„Elektronen kreisen auf festen Bahnen um den Kern." Dieses Planetenmodell ist **falsch** – Elektronen haben im Atom keine Bahnen. Gültig bleibt das **Energiestufenmodell**: Die Energieniveaus kann man messen.

3 Emission und Absorption am Wasserstoffatom (→ Abschnitt 4)

Für Wasserstoff gilt $E_n \approx -13{,}6\ \text{eV}/n^2$ (die Formel musst du nicht kennen – im Abitur werden Niveauwerte angegeben):

n	1	2	3	4	5	6	∞
E_n in eV	−13,60	−3,40	−1,51	−0,85	−0,54	−0,38	0

Absorption: Atome eines kühlen Gases absorbieren genau die Photonen, deren Energie zu einem Übergang *aus dem besetzten Zustand nach oben* passt. Die angeregten Atome senden die Energie zwar wieder aus – aber in *alle* Richtungen, sodass in Durchstrahlrichtung Licht fehlt (**Absorptionsspektrum**; im Sonnenspektrum: **Fraunhofer-Linien**). **Resonanzabsorption:** Eine Natriumflamme wirft im Licht einer Natriumdampflampe einen dunklen Schatten; im Licht einer anderen Lampe ist sie nahezu durchsichtig.

4 Rechnen mit Energieniveauschemata (→ Abschnitt 6)

Quecksilber (Energien bezogen auf den Grundzustand, vereinfachter Ausschnitt aus dem Termschema):

Niveau	A (Grundzustand)	B	C	D	E	Ionisierung
E in eV	0	4,67	4,89	5,46	7,73	10,44

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

Wellenlänge der H_α-Linie ($n = 3 \to n = 2$)

Ansatz: $\frac{h \cdot c}{\lambda} = E_3 - E_2 \Rightarrow \lambda = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_2}$

$E_3 - E_2 = -1{,}51\ \text{eV} - (-3{,}40\ \text{eV}) = 1{,}89\ \text{eV}$

$\lambda = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}89 \cdot 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \approx$ **657 nm**

(rot; gemessen: 656 nm)

Zuordnung einer Hg-Linie (gemessen: $\lambda = 546$ nm)

Ansatz: $\Delta E = \frac{h \cdot c}{\lambda} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{546 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}$

$\Delta E \approx 3{,}64 \cdot 10^{-19}\ \text{J} \approx 2{,}27\ \text{eV}$

passt zum Übergang E → D: 7,73 eV − 5,46 eV = **2,27 eV**

n^2

Elektronen im Kasten – der Potenzialtopf

Ein einfaches Modell erklärt, warum eingesperrte Elektronen nur bestimmte Energien haben – und warum Quantenpunkte je nach Größe anders leuchten.

Farbe nach Größe

In **QLED-Fernsehern** stecken **Quantenpunkte**: winzige Halbleiterkristalle, nur 2 bis 10 nm groß, die blaues LED-Licht in sehr reines grünes oder rotes Licht umwandeln. Alle Quantenpunkte können aus *demselben* Material bestehen – kleine Kristalle leuchten blau, mittlere grün, größere rot. Die Farbe hängt nur von der **Größe** ab.

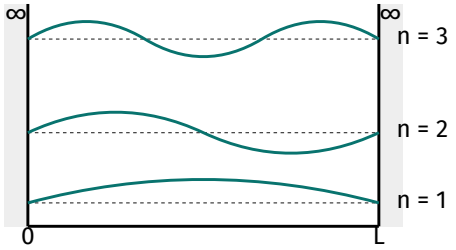
1 Das Modell: Elektron zwischen unendlich hohen Wänden (→ Abschnitt 1)

Das Modell **eindimensionaler Potenzialtopf mit unendlich hohen Wänden** beruht auf drei Annahmen:

- **Eindimensional:** Das Elektron kann sich nur in x-Richtung zwischen $x = 0$ und $x = L$ bewegen (L: Topfbreite).
- **Flacher Boden:** Im Topf ist die potenzielle Energie überall gleich (null). Es wirkt keine Kraft; die Energie ist reine Bewegungsenergie.
- **Unendlich hohe Wände:** Außerhalb des Topfs kann das Elektron *nie* nachgewiesen werden: $\psi = 0$.

Stehende Wellen: Auf einer eingespannten Gitarrensaite überlagern sich zwei gegenläufige Wellen. An den **Knoten** löschen sie sich immer aus, an den **Bäuchen** schwingt die Saite besonders stark. Benachbarte Knoten liegen eine **halbe Wellenlänge** auseinander; an den Enden liegt immer ein Knoten.

Auch die de-Broglie-Welle des Elektrons bildet im Topf **stehende Wellen**. Weil ψ außerhalb null ist, liegt an beiden Wänden ein **Knoten**.



Nur stehende Wellen mit Knoten an den Wänden passen in den Topf (nicht maßstäblich).

$$L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} \Rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

$n = 1, 2, 3, \ldots$ (Quantenzahl)

2 Quantisierte Energie (→ Abschnitt 2)

1. **Wellenlänge:** $\lambda_n = 2L/n$
2. **Impuls** (de Broglie): $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{n \cdot h}{2L}$
3. **Energie** (nur Bewegungsenergie): $E_n = \frac{p_n^2}{2m}$

$$E_n = \frac{h^2}{8\,m\,L^2} \cdot n^2$$

Energieniveaus im unendlich hohen Potenzialtopf

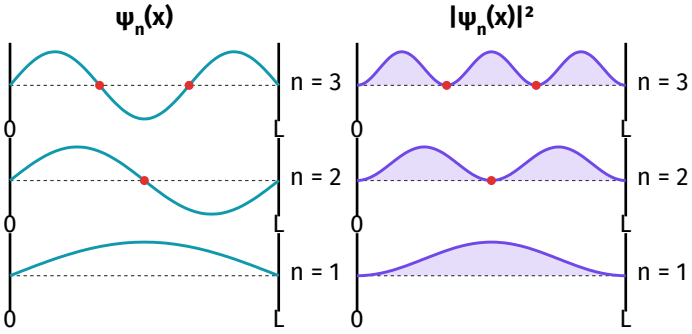
- Die Energien sind **diskret** und wachsen mit n^2: $E_2 = 4E_1$, $E_3 = 9E_1$ …
- Sie sind proportional zu $1/L^2$: Halbe Topfbreite ⇒ vierfache Energie.
- Die kleinste Energie E_1 ist **nicht null** (Nullpunktsenergie): Ein auf L eingesperrtes Elektron kann nicht den exakten Impuls null haben.

3 Wellenfunktionen und Nachweiswahrscheinlichkeiten (→ Abschnitt 3)

$$\psi_n(x) = A \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi\,x}{L}\right)$$

für $0 \le x \le L$ (außerhalb $\psi = 0$)

An beiden Wänden ist der Sinus null (Winkel 0 bzw. $n \cdot 180°$). A sorgt dafür, dass das Elektron mit Wahrscheinlichkeit 1 im Topf gefunden wird.



Wellenfunktion und Nachweiswahrscheinlichkeitsdichte; Punkte: Knoten im Inneren.

3 Wellenfunktionen und Nachweiswahrscheinlichkeiten (Fortsetzung) (→ Abschnitt 3)

- ***n* = 1:** größte Nachweiswahrscheinlichkeit in der Mitte, an den Wänden null. ***n* = 2:** Genau in der Mitte wird das Elektron *nie* nachgewiesen (Knoten), links und rechts davon schon – klassisch undenkbar. Allgemein hat ψ_n genau $n - 1$ Knoten im Inneren.
- **Klassisch** würde ein hin- und herfliegendes Teilchen überall gleich häufig angetroffen. Fragen wie „Wie kommt das Elektron bei $n = 2$ von links nach rechts?“ beruhen auf der Vorstellung einer Bahn – einem Quantenobjekt lässt sich keine Bahn zuschreiben.

4 Grenzen des Modells, Mehrelektronensysteme und Pauli-Prinzip (→ Abschnitt 5)

Endlich hohe Wände: ψ ist an den Wänden nicht mehr null, sondern fällt außerhalb schnell ab – das Elektron kann mit kleiner Wahrscheinlichkeit **außerhalb** nachgewiesen werden (bei dünner Wand: **Tunneleffekt**). Die Welle hat effektiv mehr Platz: Die Niveaus liegen **etwas niedriger**, und es gibt nur **endlich viele** gebundene Zustände.

Atome sind keine Kästen: Sie sind dreidimensional, und die potenzielle Energie sinkt zum Kern hin ab (Trichter statt Topf). Deshalb rücken die Niveaus im Atom nach oben zusammen ($E_n \sim -1/n^2$), statt mit n^2 auseinanderzulaufen.

PAULI-PRINZIP

Zwei Elektronen in einem System können nie in allen Quantenzahlen übereinstimmen. Im eindimensionalen Topf gibt es neben n nur noch den *Spin* („auf“ oder „ab“). Jedes Niveau ist deshalb mit **höchstens zwei Elektronen** besetzt.

Die Elektronen füllen die Niveaus von unten nach oben auf. Bei N Elektronen (N gerade) sind die Niveaus 1 bis $N/2$ voll besetzt. Das energieärmste absorbierbare Photon hebt ein Elektron von $N/2$ auf $N/2 + 1$.

5 Anwendung: Farbstoffe und Quantenpunkte (→ Abschnitt 7)

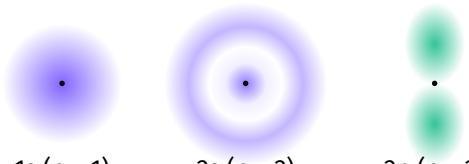
Viele Farbstoffmoleküle (z. B. Cyanine, β-Carotin) besitzen eine Kette, entlang der sich N Elektronen nahezu frei bewegen: ein eindimensionaler Potenzialtopf der Länge L. Längere Ketten ⇒ kleinere Energieabstände ⇒ Absorption bei größeren Wellenlängen. Der Farbstoff erscheint in der *Komplementärfarbe*. Bei **Quantenpunkten** (dreidimensional): Je kleiner der Kristall, desto größer die Energieabstände, desto kurzwelliger das Licht.

$$\Delta E = \frac{h^2}{8\,m\,L^2} \cdot (N + 1)$$

Übergang $N/2 \to N/2 + 1$, denn $(N/2 + 1)^2 - (N/2)^2 = N + 1$

6 Vom Topf zum Atom: Orbitale des Wasserstoffatoms (→ Abschnitt 8)

Für das Wasserstoffatom erhält man wieder diskrete Energien ($E_n \approx -13{,}6\ \text{eV}/n^2$) und zu jedem Zustand eine Wellenfunktion. Ihre Betragsquadrate stellt man als **Orbitale** dar: „Wolken“, deren Dichte die Nachweiswahrscheinlichkeit angibt. Mit steigendem n werden sie größer und erhalten Knotenflächen. Für das Abitur genügt die **Hauptquantenzahl *n***. **Orbitale sind keine Bahnen!**



1s (n = 1) 2s (n = 2) 2p (n = 2)

Orbitale 1s, 2s und 2p (schematische Schnittbilder, Punkt: Kern)

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

Grundzustand und Übergang (L = 0,50 nm)

Ansatz: $E_1 = \dfrac{h^2}{8\,m_e\,L^2}$

$$E_1 = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s})^2}{8 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (0{,}50 \cdot 10^{-9}\ \text{m})^2} \approx 2{,}41 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

in eV: $\dfrac{2{,}41 \cdot 10^{-19}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} \approx \mathbf{1{,}50\ eV}$

$2 \to 1$: $\Delta E = E_1 \cdot (2^2 - 1^2) = 3\,E_1 \approx 7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$

$$\lambda = \frac{h \cdot c}{\Delta E} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{7{,}23 \cdot 10^{-19}\ \text{J}} \approx \mathbf{275\ nm}$$

Farbstoff (N = 8, L = 1,23 nm, Übergang 4 → 5)

Ansatz: $\Delta E = \dfrac{h^2}{8\,m_e\,L^2} \cdot (5^2 - 4^2) = \dfrac{h^2}{8\,m_e\,L^2} \cdot 9$

$$\Delta E = \frac{(6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s})^2 \cdot 9}{8 \cdot 9{,}109 \cdot 10^{-31}\ \text{kg} \cdot (1{,}23 \cdot 10^{-9}\ \text{m})^2} \approx 3{,}58 \cdot 10^{-19}\ \text{J}$$

$\lambda = \dfrac{h \cdot c}{\Delta E} \approx \mathbf{555\ nm}$ (grün absorbiert, Farbstoff erscheint purpur)

Kα

Röntgenstrahlung – Bremsen und Springen

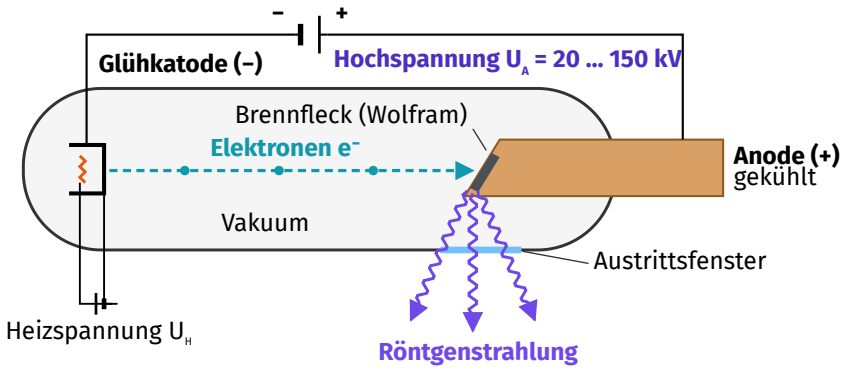
Wie aus schnellen Elektronen Röntgenphotonen werden: kontinuierliches Bremsspektrum und charakteristische Linien.

Die hellsten Röntgenblitze der Welt entstehen bei Hamburg

Seit 1895, als Wilhelm Conrad Röntgen die „X-Strahlen" entdeckte, ist Röntgenstrahlung aus Medizin und Technik nicht mehr wegzudenken: Röntgenbilder, Gepäckkontrolle, Materialprüfung. In Schenefeld bei Hamburg steht der **European XFEL**, ein 3,4 km langer Röntgenlaser.

1 Die Röntgenröhre (→ Abschnitt 1)

Röntgenstrahlung ist elektromagnetische Strahlung wie Licht – nur mit viel kürzerer Wellenlänge und deshalb (nach $E = h \cdot f$) mit sehr energiereichen Photonen. Man braucht nur zwei Zutaten: **sehr schnelle Elektronen** und ein **Metall**, auf das sie prallen.



Aufbau einer Röntgenröhre (schematisch): Beim Aufprall der beschleunigten Elektronen auf den Brennfleck entsteht Röntgenstrahlung.

Die Elektronen erreichen die Anode mit der kinetischen Energie $E_{kin} = e \cdot U_A$ – bei 25 kV also 25 keV. Nur etwa 1 % dieser Energie wird in Röntgenstrahlung umgewandelt; der Rest erwärmt die Anode, die deshalb gekühlt werden muss.

Eigenschaften: Röntgenstrahlung durchdringt Stoffe geringer Dichte gut, wird von Stoffen mit hoher Ordnungszahl (Knochen: Calcium; Blei) stark absorbiert, ionisiert Materie, schwärzt Filme und wird von elektrischen und magnetischen Feldern nicht abgelenkt.

Ihre Wellennatur zeigt Röntgenstrahlung bei der Beugung an Kristallgittern (Max von Laue, 1912). Das Spektrum misst man mit einem **Drehkristall-Spektrometer**: Ein Kristall mit bekanntem Netzebenenabstand d reflektiert jede Wellenlänge nach der Bragg-Bedingung unter einem anderen Winkel θ (vgl. Einheit 4).

$$2 \cdot d \cdot \sin\theta = k \cdot \lambda$$

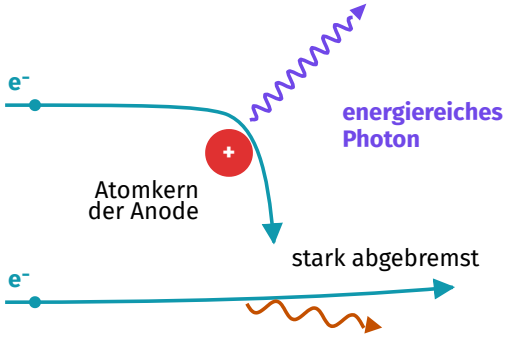
Bragg-Bedingung, k = 1, 2, …

2 Das Bremsspektrum und die Grenzwellenlänge (→ Abschnitt 2)

Die schnellen Elektronen dringen in die Anode ein und fliegen dort dicht an Atomkernen vorbei. Der positiv geladene Kern zieht ein Elektron an: Es wird **abgelenkt und abgebremst**. Die verlorene Bewegungsenergie sendet es als Photon aus: **Bremsstrahlung**.

- Fliegt das Elektron in größerem Abstand vorbei, wird es nur **wenig** abgebremst: Es entsteht ein energiearmes, langwelliges Photon.
- Kommt es dem Kern sehr nahe, wird es **stark** abgebremst: Es entsteht ein energiereiches, kurzwelliges Photon.

Wie nah ein Elektron einem Kern kommt, ist zufällig. Deshalb kommen alle Photonenenergien vor: Das Bremsspektrum ist **kontinuierlich**. Zu kurzen Wellenlängen hin hat es aber eine **scharfe Grenze**: Ein Elektron kann an ein Photon höchstens seine gesamte Bewegungsenergie $e \cdot U_A$ abgeben.



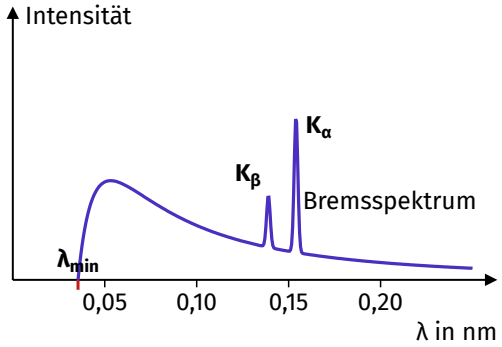
wenig abgebremst: energiearmes Photon

2 Das Bremsspektrum und die Grenzwellenlänge (Fortsetzung) (→ Abschnitt 2)

$$e \cdot U_A = h \cdot f_{max} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{min}} \Rightarrow \lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_A}$$

Grenzwellenlänge (Duane-Hunt'sches Gesetz)

- λ_{min} hängt **nur von der Spannung**, nicht vom Anodenmaterial ab.
- Die scharfe Grenze ist ein weiterer Beleg für Photonen: Ein Elektron gibt seine Energie höchstens als *ein* Photon der Energie $e \cdot U_A$ ab. Mit diesem „umgekehrten Fotoeffekt" lässt sich h bestimmen.

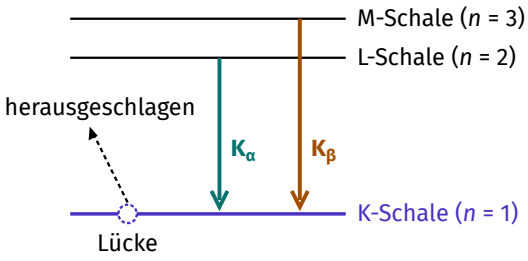


Röntgenspektrum einer Kupferanode bei 35 kV (qualitativ)

3 Das charakteristische Spektrum (→ Abschnitt 3)

Ab einer bestimmten Spannung wachsen auf dem Bremsspektrum schmale, hohe Linien. Sie verschieben sich nicht, wenn man die Spannung weiter erhöht – sie werden nur stärker. Wechselt man das Anodenmaterial, springen sie an eine andere Stelle: ein Fingerabdruck des Elements wie in Einheit 8, aber mit den **innersten Elektronen** der Anodenatome (**charakteristisches Röntgenspektrum**).

Schalen: Die Elektronen besetzen die K-Schale ($n = 1$), L-Schale ($n = 2$), M-Schale ($n = 3$) … Nach dem **Pauli-Prinzip** passen in die K-Schale genau **zwei**, in die L-Schale acht Elektronen. Bei Kupfer (29 Elektronen) sind K- und L-Schale voll besetzt.



Entstehung der K-Linien (schematisch, nicht maßstäblich; K-Schale bei Kupfer etwa −9 keV)

1. Ein schnelles Elektron schlägt ein Elektron aus der **K-Schale** eines Anodenatoms heraus. Dafür muss seine Energie größer sein als die Bindungsenergie der K-Elektronen (Kupfer: 9,0 keV; Molybdän: 20,0 keV).
2. Ein Elektron aus einer höheren Schale füllt die Lücke; die Energiedifferenz wird als Röntgenphoton ausgesandt: $\mathbf{K_\alpha}$ (von $n = 2$), $\mathbf{K_\beta}$ (von $n = 3$). Ohne Lücke ist dieser Übergang wegen des Pauli-Prinzips unmöglich.
3. Weil die Energieniveaus charakteristisch für das Element sind, ist es auch die Lage der Linien. Ihre Energie wächst mit der Kernladungszahl (Moseley, 1913).

Anode	K_α	K_β	Mindestspannung für K-Linien
Kupfer ($Z = 29$)	0,154 nm	0,139 nm	≈ 9,0 kV
Molybdän ($Z = 42$)	0,071 nm	0,063 nm	≈ 20,0 kV
Wolfram ($Z = 74$)	0,021 nm	0,018 nm	≈ 69,5 kV

ABITURRELEVANTE RECHENANSÄTZE – MUSTERRECHNUNGEN

Grenzwellenlänge ($U_A = 25$ kV)

Ansatz: $\lambda_{min} = \frac{h \cdot c}{e \cdot U_A}$

$\lambda_{min} = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 25\,000\ \text{V}} \approx \mathbf{0{,}050\ nm}$

***h* aus der Grenzwellenlänge** (30 kV, $\lambda_{min} = 0{,}0414$ nm)

Ansatz: $h = \frac{e \cdot U_A \cdot \lambda_{min}}{c}$

$h = \frac{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C} \cdot 30\,000\ \text{V} \cdot 0{,}0414 \cdot 10^{-9}\ \text{m}}{3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}} \approx \mathbf{6{,}63 \cdot 10^{-34}\ J\ s}$

Energie der K_α-Linie (Kupfer, $\lambda = 0{,}154$ nm)

Ansatz: $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$

$E = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \text{J s} \cdot 3{,}00 \cdot 10^{8}\ \text{m/s}}{0{,}154 \cdot 10^{-9}\ \text{m}} \approx 1{,}29 \cdot 10^{-15}\ \text{J}$

in eV: $\frac{1{,}29 \cdot 10^{-15}\ \text{J}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{J/eV}} \approx \mathbf{8{,}06\ keV}$

Glanzwinkel (Cu-K_α, LiF-Kristall $d = 0{,}201$ nm)

Ansatz: $2\,d \sin\theta = \lambda \Rightarrow \sin\theta = \frac{\lambda}{2\,d}$

$\sin\theta = \frac{0{,}154\ \text{nm}}{2 \cdot 0{,}201\ \text{nm}} \approx 0{,}383 \Rightarrow \theta \approx \mathbf{22{,}5°}$